DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

# Schadenversicherungsmathematik I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 17. Mai 2019

*Hinweise:*

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 9 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

*Mitglieder der Prüfungskommission:*

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

# Teil I – Tarifierung [80 Punkte]

**Aufgabe 1 (Credibility-Verfahren) [50 Punkte]**

(a) Nennen Sie eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendung von Credibility-Verfahren bzgl. der Verschiedenheit der zu betrachtenden Risiken. [4 Punkte]

(b) Ein heuristischer Credibility-Ansatz beruht auf der Approximation mit der Standard-Normalverteilung:

$$\mathrm{P}\left(\sqrt{n}\cdot\frac{|\mathrm{SB}-\mu|}{\sigma}\leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\to 1-\alpha \quad (n\to\infty)$$

Daraus kann man einen Konfidenzbereich für die Realisierung des Schadenbedarfs SB herleiten:

$$\mu-\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma\leq \mathrm{SB}\leq \mu+\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma$$

Des Weiteren ergibt sich die Mindestbestandsgröße hier zu:

$$n_0=\frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

Erläutern Sie, wie sich hieraus ein Credibility-Ansatz (Beschreibung konstituierender Elemente und Anwendungsbeispiel) herleiten lässt und welcher Effekt bei dem Credibility-Faktor zu beachten ist. [10 Punkte]

(c) Gegeben seien drei Kfz-Flotten, die in drei Jahren folgende Schadenbedarfe zeigen:

| | SB im Jahr (Werte ganzzahlig gerundet) | | | |
|---|---|---|---|---|
| Flottennr. | 1 | 2 | 3 | Gesamt |
| 1 | 69 | 65 | 59 | 64 |
| 2 | 210 | 40 | 90 | 113 |
| 3 | 550 | 208 | 600 | 453 |
| Gesamt | 276 | 104 | 250 | 210 |

Vereinfachend sei angenommen, dass alle Flotten gleich groß sind sowie im Zeitablauf konstante Bestandsgrößen aufweisen. Damit ist das Bühlmann-Modell anwendbar. Berechnen Sie die drei Schätzer

$$\widehat{m}=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}R_{ij}$$

$$\widehat{u}=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\left(R_{ij}-\frac{R_{i+}}{J}\right)^2$$

$$\widehat{w}=\frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{R_{i+}}{J}-\widehat{m}\right)^2-\frac{\widehat{u}}{J}$$

mit $I = 3$ Flotten in $J = 3$ Jahren und den Schadenbedarfen $R_{ij}$.

Berechnen Sie weiter den Credibility-Faktor $c$ (der ist für alle Flotten gleich), indem Sie zunächst den korrekten Term für $x$ in

$$c = \frac{J}{J + x}$$

einsetzen und den jeweiligen Credibility-Schätzer für den Schadenbedarf jeder Flotte. [20 Punkte]

(d) Der Schätzer für $w$ kann in manchen Situationen negative Werte annehmen. Beschreiben Sie qualitativ, was das bedeutet und welcher Credibility-Schätzer dann resultiert. [6 Punkte]

(e) Welches Problem des Bühlmann-Modells löst das Bühlmann-Straub-Modell? Welche Voraussetzung des Bühlmann-Straub-Modells ist kritisch? Was kann hierfür eine Lösung sein? Bitte jeweils nur qualitativ beantworten. [10 Punkte]

**Aufgabe 2 (Erfahrungstarifierung) [30 Punkte]**

(a) Eine Tabelle mit nachfolgender Struktur wird bei der Ermittlung der GDV-Rückstufung herangezogen. Erläutern Sie kurz das Vorgehen bei der Berechnung der Werte der einzelnen Spalten und ihre Bedeutung.

| SF-Klasse im Vorjahr | Schadenbedarfe im aktuellen Jahr mit genau… Schäden im Vorjahr | | | Schadenbedarfe nach SF-Klasse im aktuellen Jahr | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | Bedarf | SF-Klasse |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| … | | | | | |
| 1 | 500 | 700 | 1050 | | |
| 2 | 461 | 645 | 968 | 500 | 2 |
| 3 | 429 | 601 | 901 | 461 | 3 |
| 4 | 402 | 563 | 844 | 429 | 4 |
| 5 | 379 | 531 | 796 | 402 | 5 |
| 6 | 359 | 503 | 754 | 379 | 6 |
| 7 | 341 | 477 | 716 | 359 | 7 |
| 8 | 326 | 456 | 685 | 341 | 8 |
| 9 | 312 | 437 | 655 | 326 | 9 |
| 10 | 300 | 420 | 630 | 312 | 10 |
| 11 | 289 | 405 | 607 | 300 | 11 |
| 12 | 279 | 391 | 586 | 289 | 12 |
| 13 | 270 | 378 | 567 | 279 | 13 |
| 14 | 262 | 367 | 550 | 270 | 14 |
| 15 | 254 | 356 | 533 | 262 | 15 |
| 16 | 247 | 346 | 519 | 254 | 16 |
| 17 | 241 | 337 | 506 | 247 | 17 |
| 18 | 235 | 329 | 494 | 241 | 18 |
| … | … | … | … | … | … |
| 28 | 194 | 272 | 407 | 197 | 28 |
| 29 | 191 | 267 | 401 | 194 | 29 |
| 30 | 188 | 263 | 395 | 191 | 30 |
| 31 | | | | 188 | 31 |
| … | | | | | |

[4 Punkte]

(b) Leiten Sie für die SF-Klassen 17 und 30 im Vorjahr bei 1 Schaden im Vorjahr sowie für die SF-Klasse 29 im Vorjahr mit 2 Schäden im Vorjahr jeweils die Rückstufung her (jeweils Angabe der SF-Klasse, in die zurückgestuft wird). Begründen Sie, dass die Rückstufung nicht um eine konstante Klassenanzahl erfolgt. [14 Punkte]

(c) Benennen Sie Charakteristika der GDV-Rückstufung und stellen Sie dies einem Modell basierend auf einer Schadenzahlverteilung gegenüber. [12 Punkte]

# Teil II – Rückversicherung [100 Punkte]

**Aufgabe 3 (Stabilisierung) [35 Punkte]**

(a) Begründen Sie mit Hilfe der Entlastungseffektfunktion, weshalb der Rückversicherer bei unlimitierten Schadenexzedenten überproportional an der Inflation partizipiert. [5 Punkte]

(b) Wir betrachten nun eine Pareto-verteilte Schadenhöhe $X \sim \text{Pareto}(t, \alpha)$, d.h.

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} \qquad \text{für } x \geq t.$$

Wie verändert sich der erwartete xs-Schaden im Layer $C$ xs $D$, wenn man von der Schadenhöhe $X$ zu einer inflationierten Schadenhöhe $X_i := (1+i) \cdot X$ mit $i > 0$ und $(1+i) \cdot t \leq D$ übergeht? Begründen Sie Ihre Antwort! [6 Punkte]

(c) Bei Schadenexzedenten in sog. „Longtail-Sparten“ werden üblicherweise Stabilisierungsklauseln vereinbart. Was ist die grundlegende Idee hinter diesen Klauseln? [4 Punkte]

(d) Erläutern Sie den Unterschied zwischen einer APK10 und einer SIC30. [4 Punkte]

(e) Wir betrachten nun einen Schadenexzedenten 3 000 xs 1 000 für das Anfalljahr 2014. Es sei eine APK10 mit Indexbasis 2013 vereinbart. Zur Stabilisierung wird hierbei folgender Index verwendet:

| $I_{2013}$ | $I_{2014}$ | $I_{20015}$ | $I_{2016}$ | $I_{2017}$ | $I_{2018}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 103 | 108 | 112 | 116 | 120 |

Berechnen Sie für folgenden Schaden aus 2014 die stabilisierten Deckungen sowie kumulierte Schadenzahlungen und Reserven im XL für die Jahre 2014 bis 2018:

| | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|
| kumulierte Zahlungen | 1 000 | 2 000 | 2 000 | 3 000 | 5 000 |
| Reserve | 3 000 | 2 000 | 3 000 | 2 000 | 0 |
| Schadenaufwand | 4 000 | 4 000 | 5 000 | 5 000 | 5 000 |

[16 Punkte]

**Aufgabe 4 (Haftpflicht-Exposure) [25 Punkte]**

Zur Exposure-Quotierung in der Haftpflichtversicherung wird häufig das sogenannte Riebesell-Modell verwendet („Zuschlagsquotierung“).

(a) Erläutern Sie die grundlegende Modellannahme. [2 Punkte]

(b) Gegeben sei ein Risiko mit einer Prämie $s_0$ für die Deckungssumme $v_0$. Leiten Sie unter der Annahme des Zuschlagssatzes $z$ die zugehörige Prämienfunktion $S_z(v)$ des Riebesell-Modells her (d.h. die Prämie $S_z(v)$ in Abhängigkeit von der Deckungssumme $v$). [5 Punkte]

Ein Erstversicherer (EV) zeichnet folgende Beteiligung an einem gelayerten Programm für ein Risiko:

| Layer Nr. $i$ | Haftung $c_i$ (für 100%) | Priorität $d_i$ (für 100%) | Anteil $\sigma_i$ des EV | Prämie $p_i$ für den Anteil des EV |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 000 | 0 | 50% | 100 |
| 2 | 5 000 | 5 000 | 20% | 50 |
| 3 | 10 000 | 10 000 | 50% | 50 |

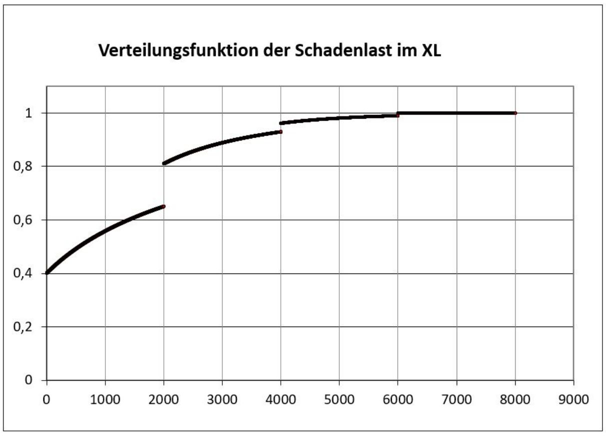
Wir betrachten nun einen XL pro Risiko 4 000 xs 1 000, in den der EV das Risiko einbringt.

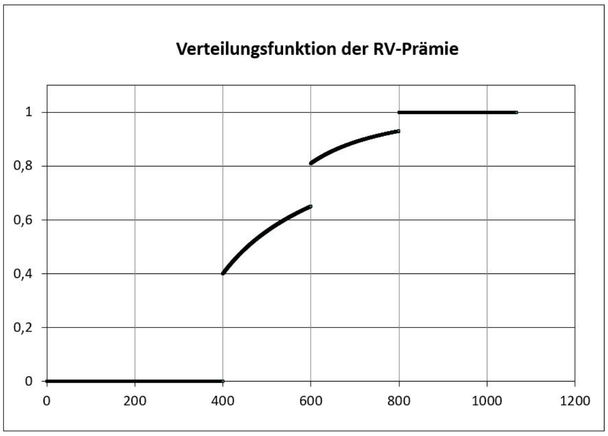
(c) Bestimmen Sie die Haftungsabschnitte, die der Rückversicherungslayer am Originalrisiko deckt. [10 Punkte]

(d) Führen Sie eine Zuschlagsquotierung für den XL durch. Verwenden Sie hierbei eine Schadenquote von 60% und einen Zuschlagssatz von 10%. [8 Punkte]

**Aufgabe 5 (Wiederauffüllungen) [15 Punkte]**

Für einen Schadenexzedenten $C$ xs $D$ seien $m$ bezahlte Wiederauffüllungen zu $x\%$ pro rata capita und eine Upfront-Prämie $\widehat{P}_0$ vereinbart. Die Schadenlast des gedeckten Portefeuilles sei durch ein kollektives Modell mit stetiger Schadenhöhenverteilung darstellbar. Die folgenden Graphen zeigen die Verteilungsfunktionen der xs-Schadenlast $\widehat{S}$ sowie der Rückversicherungsprämie.




(a) Geben Sie die allgemeine Formel zur Berechnung der Wiederauffüllungsprämie $\widehat{P}_{\text{WA}}$ aus der xs-Schadenlast $\widehat{S}$ an. [2 Punkte]

(b) Begründen Sie, warum die Verteilungsfunktion der xs-Schadenlast Sprungstellen besitzt, obwohl die Schadenhöhenverteilung stetig ist. [3 Punkte]

Bestimmen Sie aus den Graphen die folgenden Größen (ohne Begründung):

(c) Die Haftung $C$. [2 Punkte]

(d) Die Anzahl $m$ der Wiederauffüllungen. [2 Punkte]

(e) Die Upfront-Prämie $\widehat{P}_0$. [2 Punkte]

(f) Den Prozentsatz $x\%$ zu dem die Wiederauffüllungen bezahlt sind. [2 Punkte]

(g) Die Wahrscheinlichkeit, mit der der XL schadenfrei bleibt. [2 Punkte]

**Aufgabe 6 (Risikoteilung) [15 Punkte]**

In einem Versicherungsportefeuille werden die Schäden, die größer als 1000 sind, durch ein kollektives Modell

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

beschrieben, wobei $N \sim$ Poisson(2) und $X_n \sim$ Pareto(1000, 3) gilt, d.h. $X_n$ hat die Dichte

$$f(x) = 3 \cdot 1000^3 \cdot x^{-4} \qquad \text{für x>1000}.$$

Wir betrachten einen unlimitierten Schadenexzedenten mit Priorität $D = 1000$. Die Schadenlast im XL wird dann offenbar durch das kollektive Modell

$$\hat{S} = \sum_{n=1}^{N} \hat{X}_n \quad \text{mit} \quad \hat{X}_n := X_n - 1000$$

beschrieben.

(a) Begründen Sie, warum die Poisson-Verteilung eine naheliegende Schadenzahlverteilung ist. *[5 Punkte]*

(b) Verwenden Sie die zweite Wald'sche Formel um zu zeigen, dass

$$\mathrm{Var}(\hat{S}) = \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(\hat{X}_n^2)$$

gilt. *[4 Punkte]*

(c) Berechnen Sie die Varianz der Schadenlast im XL. *[6 Punkte]*

**Aufgabe 7 (Arten und Formen der Rückversicherung) [10 Punkte]**

(a) Was versteht man unter fakultativer Rückversicherung? [2 Punkte]

(b) Erklären sie den Unterschied zwischen einem Erstversicherungspool und einem Rückversicherungspool. [4 Punkte]

(c) Was versteht man unter einem Coded XL? Wann werden Coded XLs typischerweise eingesetzt? [4 Punkte]

# Lösungshinweise

## Lösungshinweise zu Aufgabe 1

(a) Die Risiken dürfen a priori nicht unterscheidbar sein. Somit wäre eine Anwendung bei Kfz-Flotten sachgerecht, aber nicht bei Diebstahl aus Erst- und Zweitwohnungen.

(b) Hat man eine Bestandsgröße $n$ unterhalb der Mindestbestandsgröße, so ergibt sich der Credibility-Faktor $Z$ als Größenverhältnis der beiden Konfidenzbereiche zu:

$$Z = \sqrt{\frac{n}{n_0}}$$

$Z$ liegt zwischen 0 und 1; d.h. bei Erreichen der Mindestbestandsgröße wird volle Credibility zugeordnet. Durch die Wurzelfunktion werden schon recht kleine Teilbestände vergleichsweise hochgewichtet: Ist $n$ z.B. 1% der Mindestbestandsgröße, so ergibt sich bereits $Z = 0{,}1$.

Anwendungsbeispiel regionaler Schadenbedarfsindex: Regionale Einheit $r$ mit Bestand $n$ unterhalb der Mindestbestandsgröße, die zu einer größeren Region $R$ gehört. Dann ergibt sich der Credibility-SB-Index zu

$$\mathrm{SB}_{r;\mathrm{Cred}} = \sqrt{\frac{n}{n_0}}\mathrm{SB}_r + \left(1 - \sqrt{\frac{n}{n_0}}\right)\mathrm{SB}_R$$

(c) Es ergibt sich:

$$\widehat{m} = 210; \quad \widehat{u} = 17.727; \quad \widehat{w} = 38.816.$$

Der Credibility-Faktor ergibt sich zu

$$c = \frac{J}{J + \widehat{u}/\widehat{w}} = 0{,}868 \qquad \text{(gerundet)}$$

Damit sind die Credibility-Schätzer:

| Flottennr. | $c$ | SB-beob. | Cred.-SB |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,868 | 64 | 83 |
| 2 | 0,868 | 113 | 126 |
| 3 | 0,868 | 453 | 421 |
| Gesamt | | 210 | 210 |

(d) Das bedeutet, dass die beobachtete Verschiedenheit (Varianz zwischen den Individuen) der Individualmittel kleiner ist als die zufällige Streuung, die aus den Individuen jeweils einzeln geschätzt und anschließend gemittelt wurde (mittlere Varianz der Individuen).

Da die $\widehat{m}_i$ Schätzer für $\mu(T_i)$ sind, ist es in diesem Fall sinnvoll $w = \mathrm{Var}(T_i) = 0$ anzunehmen (d.h. homogenes Kollektiv) und keine Unterschiede der individuellen Erwartungswerte anzusetzen. Dies führt auf $c = 0$ und der Credibility-Schätzer ist der Schätzer für $m$ (sinnvoll, da die einzelnen Mittel eh nahezu gleich sind).

(e) Im Bühlmann-Modell ist nicht vorgesehen, dass Individuen im Lauf der Jahre Volumenänderungen aufweisen (z.B. unterschiedliche Fahrzeuganzahlen bei Flotten). Hier schafft die Erweiterung zum Bühlmann-Straub-Modell Abhilfe.

Kritisch ist die Voraussetzung der identischen Verteilung der Verteilungsqualitäten: A priori d.h. ohne Kenntnis der Schadenerfahrung dürfen die Individuen nicht unterscheidbar sein. Dies ist z.B. bei Kfz-Flotten mit unterschiedlicher Zusammensetzung nach Fahrzeugarten nicht gegeben. Mögliche Lösung: Oft gibt es deutliche Unterschiede in der a priori Risikostruktur; diese werden durch den Bestandsmix-Parameter „herausnormiert“. Man kann die transformierte Zielgröße als Schadenquote verstehen mit dazu passendem Gewicht „verd. Beitrag“. Dies führt auf das strukturbereinigte Bühlmann-Straub-Modell; man kann auch einen rekursiven Algorithmus aus GLM und Credibility verwenden.

**Lösungshinweise zu Aufgabe 2**

(a) Die Schadenbedarfe dieser Tabelle werden mit dem Marginalsummenverfahren auf Basis mehrerer Merkmalsdimensionen insbesondere SF-Klasse Vorjahr und Schadenanzahl Vorjahr bestimmt. Dabei beschreibt die Spalte 1 die Zuordnung zur SF-Klasse des Vorjahrs. Die Spalten 2 bis 4 enthalten je SF-Klasse-Vorjahr die Schadenbedarfe aus dem aktuellen Jahr mit 0, 1 oder 2 Schäden im Vorjahr; die Spalte 5 zeigt die Zuordnung der Schadenbedarfe der im Vorjahr schadenfreien Risiken zur SF-Klasse des aktuellen Jahres in Spalte 6 (Aufrücken um 1 Klasse bei Schadenfreiheit bzw. Verbleib in der höchsten SF-Klasse).

(b) Die Rückstufungen ergeben sich zu (suche aus Spalte 5 den Wert, der dem Schadenbedarf aus Spalte 3 bzw. 4 am nächsten kommt): Der Schadenbedarf für SF-Klasse 17 im Vorjahr mit 1 Schaden im Vorjahr ist 337, dem in Spalte 5 341 am nächsten kommt $\Rightarrow$ bei 1 Schaden wird aus SF 17 nach SF 8 zurück gestuft.
Analog ergibt sich für SF-Klasse 30 im Vorjahr mit 1 Schaden (Schadenbedarf 263 kommt in Spalte 5 262 am nächsten): aus SF 30 wird nach SF 15 zurück gestuft. Der Schadenbedarf bei SF 29 mit 2 Schäden im Vorjahr ist 401 und kommt in Spalte 5 402 am nächsten $\Rightarrow$ aus SF 29 wird bei 2 Schäden nach SF 5 zurück gestuft.

Die Dimensionen SF-Klasse Vorjahr und Schadenanzahl Vorjahr werden als unabhängig behandelt. Daher ist die Rückstufung im multiplikativen Sinn konstant. Da die Schadenbedarfe nach SF-Klasse mit zunehmender Zahl schadenfreier Jahre degressiv sinken, erfolgt daher die Rückstufung nicht um eine konstante Klassenanzahl.

(c) Grundsätzlich werden hier auch weitere Merkmalsdimensionen berücksichtigt. Die Dimensionen SF-Klasse Vorjahr und Schadenanzahl Vorjahr werden als unabhängig behandelt. Daher ist die Rückstufung im multiplikativen Sinn konstant. Da die Schadenbedarfe nach SF-Klasse mit zunehmender Zahl schadenfreier Jahre degressiv sinken, erfolgt daher die Rückstufung nicht um eine konstante Klassenanzahl.

Durch die Zuordnung der Schadenbedarfe wird die Rückstufung definiert. Daher sind im Zeitpunkt der Rückstufung die Schadenbedarfe bestmöglich gleich zwischen den Risiken, die nach Schadenfreiheit in der SF-Klasse sind, und denjenigen, die in diese SF-Klasse zurückgestuft werden. Allerdings kann es in der Folgezeit zu Inhomogenitäten kommen. Dies könnte durch die Verwendung einer Matrix von Beitragssätzen bzw. Schadenbedarfen statt eines Vektors vermieden werden.

Bei einem Modell mit Schadenzahlverteilung werden keine weiteren Merkmale berücksichtigt. Des weiteren ist der Ansatz nicht ganzzahliger Vertragsgewichte wie z.B. Jahreseinheiten nicht möglich. In einem solchen Modell wie etwa dem Negativ-Binomial-Modell entsteht in Abhängigkeit von der Beobachtungsdauer und der bereits beobachteten Schadenanzahl eine Matrix aus Beitragssätzen.

## Lösungshinweise zu Aufgabe 3

(a) Seien $X$ die Schadenhöhe ohne Inflation im kollektiven Modell und

$$r_X(x) := \frac{E(\min(x, X))}{E(X)}$$

die zugehörige Entlastungseffektfunktion. Bezeichne $X_i := (1+i)\cdot X$ die Schadenhöhe mit Inflation $i > 0$ und $D$ die Priorität eines unlimitierten XLs. Ist dann $P(X_i > D) > 0$, so gilt

$$r_{X_i}(D) = \frac{E(\min(D, (1+i)X)}{E((1+i)X)} = \frac{E(\min(\frac{D}{1+i}, X))}{E(X)} = r_X\left(\frac{D}{1+i}\right) < r_X(D),$$

d.h. der prozentuale Entlastungseffekt durch den XL ist mit Inflation höher als ohne Inflation.

(b) Es gilt

$$F_{X_i}(x) = F_X\left(\frac{x}{1+i}\right)$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\min(C,((X_i-D)^+)) &= \int_D^{C+D} (1-F_{X_i}(x))\,dx \\
&= \int_D^{C+D} \left(1-F_X\left(\frac{x}{1+i}\right)\right) dx \\
&= \int_D^{C+D} (1+i)^\alpha \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha dx \\
&= (1+i)^\alpha \int_D^{C+D} (1-F_X(x))\,dx \\
&= (1+i)^\alpha\, \mathrm{E}(\min(C,((X-D)^+)).
\end{aligned}$$

Der erwartete Schaden im Layer $C$ xs $D$ ändert sich also mit dem Faktor $(1+i)^\alpha$.

(c) Grundlegende Idee hinter Stabilisierungsklauseln: Wird ein Schaden durch Inflation mit dem Faktor $1+i$ teurer, so werden auch Priorität und Haftung mit dem Faktor $1+i$ angepasst. Die inflationsbedingte Teuerung wird dann „gerecht“ auf Erst- und Rückversicherer aufgeteilt, d.h. die prozentuale Aufteilung des Schadens ändert sich durch die Inflation nicht mehr.

(d) Bei der APK10 beginnt man mit der Stabilisierung der Deckung, sobald der Stabilisierungsindex im Vergleich zum Basisindex um mindestens 10% gewachsen ist. Die Schadenzahlungen und Reserven werden dann vom aktuellen Index auf den Basisindex bereinigt. Bei der SIC30 beginnt man mit der Stabilisierung erst dann, wenn der Stabilisierungsindex im Vergleich zum Basisindex um mindestens 30% gewachsen ist. Die Inflationbereinigung findet dann auf $1{,}3 \cdot$ Basisindex statt.

(e) Seien $C := 3\,000$ und $D := 1\,000$. Es bezeichne $z_i$ die inkrementelle Zahlung im Jahr $i$ und $r_i$ die Reserve am Ende des Jahres $i$, also

| $i$ | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 1 000 | 1 000 | 0 | 1 000 | 2 000 |
| $r_i$ | 3 000 | 2 000 | 3 000 | 2 000 | 0 |

Mit

$$f_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{I_i}{I_{2013}} < 1,1 \\ \frac{I_{2013}}{I_i} & \text{falls } \frac{I_i}{I_{2013}} \geq 1,1 \end{cases} \quad \text{und} \quad F_i := \frac{z_{2014} + \cdots + z_i + r_i}{f_{2014} z_{2014} + \cdots + f_i z_i + f_i r_i}$$

sind dann $C_i^{\text{stab}} := F_i C$ die stabilisierte Haftung und $D_i^{\text{stab}} := F_i D$ die stabilisierte Priorität im Jahr $i$. Einsetzen liefert

| $i$ | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 1,000 | 1,000 | 0,893 | 0,862 | 0,833 |
| $F_i$ | 1,000 | 1,000 | 1,069 | 1,090 | 1,104 |
| $C_i^{\text{stab}}$ | 3 000 | 3 000 | 3 206 | 3 271 | 3 312 |
| $D_i^{\text{stab}}$ | 1 000 | 1 000 | 1 069 | 1 090 | 1 104 |

Bringt man kumulierte Zahlungen und Schadenaufwand des Jahres $i$ in die Deckung $C_i^{\text{stab}}$ xs $D_i^{\text{stab}}$ ein, so erhält man folgende Zahlen für den XL:

| | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|
| kumulierte xs-Zahlungen | 0 | 1 000 | 931 | 1 910 | 3 312 |
| xs-Reserve | 3 000 | 2 000 | 2 275 | 1 361 | 0 |
| xs-Schadenaufwand | 3 000 | 3 000 | 3 206 | 3 271 | 3 312 |

.

**Lösungshinweise zu Aufgabe 4**

(a) Grundlegende Annahme bei der Zuschlagsquotierung: Eine Verdoppelung der Deckungssumme kostet immer den gleichen prozentualen Zuschlag $z$ auf die Prämie.

(b) Aus dieser Annahme folgt sofort

$$S_z(2^n v_0) = (1+z)^n s_0$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Setzt man in diese Formel $n = \log_2(v/v_0)$ ein, so erhält man die stetige Fortsetzung

$$S_z(v) = s_0 \cdot (1+z)^{\log_2(v/v_0)} = s_0 \cdot (v/v_0)^{\log_2(1+z)}.$$

(c) Es sei $C := 15.000$ und $D := 5.000$. Im ersten Schritt berechnen wir den Haftungsabschnitt $c_i^{\text{RV}}$ xs $d_i^{\text{RV}}$, den der Rückversicherungslayer $C$ xs $D$ am Originallayer $c_i$ xs $d_i$ deckt. Hierzu berechnen wir zuerst die kumulierte Haftung der ersten $i$ Originallayer

$$h_i := \sum_{\nu=1}^{i} \sigma_\nu c_\nu.$$

Falls $D \geq h_i$ oder $C + D \leq h_{i-1}$, so setzen wir $c_i^{\text{RV}} := 0$ und $d_i^{\text{RV}} := 0$. Ansonsten ist

$$c_i^{\text{RV}} = \frac{[\min(C+D, h_i) - \max(D, h_{i-1})]^+}{\sigma_i} \quad \text{und} \quad d_i^{\text{RV}} = d_i + \frac{[D - h_{i-1}]^+}{\sigma_i}.$$

Mit diesen Formeln erhalten wir

| Layer Nr. $i$ | Kumulierte Haftung $h_i$ des EV | Haftung $c_i^{RV}$ des RV | Priorität $d_i^{RV}$ des RV |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 500 | 3 000 | 2 000 |
| 2 | 3 500 | 5 000 | 5 000 |
| 3 | 8 500 | 3 000 | 10 000 |

(d) Sei $\zeta := \log_2(1+10\%) \approx 0{,}138$. Der Anteil $\pi_i$ des Rückversicherers am Schadenbedarf des $i$-ten Originallayers berechnet sich als

$$\pi_i = \frac{(c_i^{RV} + d_i^{RV})^\zeta - (d_i^{RV})^\zeta}{(c_i + d_i)^\zeta - (d_i)^\zeta}.$$

Mit $s_i := 60\% \cdot p_i$ erhält man den erwarteten Schaden $\hat{s}_i$ des Rückversicherers aus dem dem $i$-ten Originallayer mittels $\hat{s}_i = \pi_i \cdot s_i$.

| Layer Nr. $i$ | Schadenbedarf $s_i$ des EV | Anteil $\pi_i$ des RV am erw. Schaden | Erw. Schaden $\hat{s}_i$ des RV |
|---|---|---|---|
| 1 | 60 | 11,84% | 7,10 |
| 2 | 30 | 100,00% | 30,00 |
| 3 | 30 | 36,73% | 11,02 |
| Summe | | | 48,12 |

Die Zuschlagsquotierung liefert also einen Schadenbedarf von 48,12 für den RV-Layer.

**Lösungshinweise zu Aufgabe 5**

(a) $\widehat{P}_{\mathrm{WA}} = x\% \cdot \min\left(m, \frac{\widehat{S}}{C}\right) \cdot \widehat{P}_0$

(b) Es bezeichne $X$ die Schadenhöhe des kollektiven Modells. Ist $\mathrm{P}(X > C + D) > 0$, so gilt

$$\mathrm{P}(\min(C, (X-D)^+) = C) > 0,$$

d.h. es treten mit positiver Wahrscheinlichkeit Totalschäden im Layer auf. Der Sprung der Verteilungsfunktion bei $C$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass es im Layer einen Totalschaden und keine Teilschäden gibt. Der Sprung bei $2C$ ist die Wahrscheinlichkeit für zwei Totalschäden und keine Teilschäden, etc.

Aus den Verteilungsfunktionen kann man folgende Werte ablesen:

(c) $C = 2000$

(d) $m = 2$

(e) $\widehat{P}_0 = 400$

(f) $x\% = 50\%$

(g) Wahrscheinlichkeit, dass der XL schadenfrei bleibt: 40%

**Lösungshinweise zu Aufgabe 6**

(a) Es ist plausibel, dass die Schäden mit einem Poisson-Prozess entstehen, d.h.

- die Schadenanzahlen in disjunkten Zeitintervallen sind unabhängig,
- es treten nie zwei oder mehr Schäden im exakt gleichen Zeitpunkt ein und
- die erwartete Anzahl Schäden in einem Zeitintervall hängt nur von dessen Länge ab.

Sind diese Annahmen erfüllt, so ist die Anzahl der Schäden in einem festen Zeitintervall automatisch Poisson-verteilt.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{S}) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(\hat{X}_n) + \mathrm{Var}(N) \cdot \mathrm{E}(\hat{X}_n)^2 \\ &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(\hat{X}_n) + \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(\hat{X}_n)^2 \\ &= \mathrm{E}(N) \cdot \left(\mathrm{Var}(\hat{X}_n) + \mathrm{E}(\hat{X}_n)^2\right) \\ &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(\hat{X}_n^2).\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_n^2) &= \int_{1000}^{\infty} (x-1000)^2 \cdot f(x)\,dx \\
&= \int_{1000}^{\infty} (x-1000)^2 \cdot 3 \cdot 1000^3 \cdot x^{-4}\,dx \\
&= 3 \cdot 1000^3 \left( \int_{1000}^{\infty} x^{-2}\,dx - 2000 \cdot \int_{1000}^{\infty} x^{-3}\,dx + 1000^2 \int_{1000}^{\infty} x^{-4}\,dx \right) \\
&= 3 \cdot 1000^3 \cdot \left[ -\frac{1}{x} + \frac{1000}{x^2} - \frac{1000^2}{3x^3} \right]_{1000}^{\infty} \\
&= 3 \cdot \left( 1000^2 - 1000^2 + \frac{1000^2}{3} \right) = 1\,000\,000
\end{aligned}$$

und wegen $\mathrm{E}(N) = 2$ somit

$$\mathrm{Var}(\hat{S}) = 2 \cdot 1\,000\,000 = 2\,000\,000.$$

**Lösungshinweise zu Aufgabe 7**

(a) Bei fakultativer Rückversicherung handelt es sich um die fallbezogene Überwälzung von Risiken. Der Zedent bietet dem RV die Beteiligung an einem Einzelrisiko an. Der RV kann bei jedem Risiko entscheiden, ob er sich beteiligt.

(b) Ein Erstversicherungspool ist als Erstversicherer organisiert (stellt selbst Policen aus). Die Poolmitglieder sind als Vermittler für den Pool tätig.

Bei einem Rückversicherungspool zeichnen die Poolmitglieder selbständig Risiken und bringen diese dann in den Pool ein. Der Pool agiert als Rückversicherer.

(c) Die Schadenaufteilung beim Coded XL ist wie beim XL pro Risiko. Es wird jedoch keine Prämienrate auf das GNPI vereinbart sondern ein Prämienraster vereinbart, d.h. für jedes eingebrachte Risiko ist die Rate abhängig von der Deckungs- oder Versicherungssumme. Das Prämienraster wird typischerweise mit Hilfe einer Exposure-Quotierung abgeleitet.

Coded XLs werden bei Portefeuilles eingesetzt, deren Zusammensetzung sich stark ändert, insbesondere bei wenigen exponierenden Risiken und Wachstum im hochsummigen Bereich.