DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

# Finanzmathematik und Investmentmanagement

gemäß Prüfungsordnung 3
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 11. Oktober 2019

*Hinweise:*

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

*Mitglieder der Prüfungskommission:*

Prof. Dr. Peter Albrecht, Prof. Dr. Raimond Maurer
Dr. Aristid Neuburger

**Aufgabe 1.** *[Zahlungsströme, Versicherungs- u. Finanzmarktprodukte][14 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Betrachten Sie einen variabel verzinslichen Titel mit zwei Jahren Laufzeit, Nennwert 100.000 Euro und halbjährlich nachschüssigen Zinszahlungen, die an die Entwicklung des 6-Monats-LIBOR gekoppelt sind. Die LIBOR-Entwicklung lautet (Zinssätze jeweils in annualisierter Form) 4% ($t_0 = 0$), 3% ($t_1 = 0,5$), 2% ($t_2 = 1$) und 1% ($t_3 = 1,5$).

Wie lautet der Zahlungsstrom $\{Z(t_i); i = 1, \ldots, 4\}$ der Rückflüsse des variabel verzinslichen Titels zu den Zeitpunkten $t_1 = 0,5$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1,5$ und $t_4 = 2$? Begründen Sie Ihre Lösung!

(b) *[6 Punkte]* Ein Investor legt sein anfängliches Kapital $V_0$ auf die folgende Weise an. Er erwirbt 100 DAX-Calls mit Ausübungspreis $K$ und einer Laufzeit von 7 Jahren. Den Restbetrag legt er (mit Zinseszins) über 7 Jahre zum Periodenzins 5% an.

Stellen Sie die Rückfluss-Position $V_7$ dieses Investments zum Zeitpunkt $T = 7$ dar. Welches Mindest-Endvermögen $F$ („Floor“) hat sich der Investor bei Anwendung dieser Strategie gesichert? Welche Mindestverzinsung $r_F$ („Floor-Zins“) - bezogen auf das anfängliche Kapital - resultiert hieraus?

(c) *[4 Punkte]* Stellen Sie den kollektiven Gesamtschadenprozess $S(t)$, $t \geq 0$, im Rahmen des Cramér-Lundberg-Modells der Ruintheorie dar. Erläutern Sie die eingehenden Komponenten sowie die hierbei getroffenen Annahmen!

*Lösungsskizze:*

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
Z(t_1) &= 0,04 \cdot 0,5 \cdot 100.000 = 2.000 \\
Z(t_2) &= 0,03 \cdot 0,5 \cdot 100.000 = 1.500 \\
Z(t_3) &= 0,02 \cdot 0,5 \cdot 100.000 = 1.000 \\
Z(t_4) &= 0,01 \cdot 0,5 \cdot 100.000 + 100.000 \\
&= 100.500
\end{aligned}$$

Der Zahlungsstrom lautet somit

$$Z = \{2.000, 1.500, 1.000, 100.500\}.$$

Begründung: Der Referenzzins für die Zinszahlungen in $t_i$ ($i = 1, \ldots, 4$) ist der LIBOR in $t_{i-1}$, der linear auf die Halbjahresperioden aufgeteilt wird. In $t_4$ erfolgt zusätzlich die Tilgung des Nennwerts.

(b) Es bezeichne $C_0 = C_0(K)$ den Preis zum Zeitpunkt $t = 0$ eines DAX-Calls mit Ausübungspreis $K$.

Rückfluss-Position:

$V_7 = 100 \max\{\mathrm{DAX}(7) - K, 0\} + (V_0 - 100\,C_0)(1,05)^7$, wobei DAX(7) den Marktwert des DAX zum Zeitpunkt $t = 7$ bezeichne. Dabei ist vorauszusetzen, dass $V_0 \geq 100\,C_0$.

Mindest-Endvermögen:

Da $\max\{\mathrm{DAX}(7) - K, 0\} \geq 0$, gilt $V_7 \geq (V_0 - 100\,C_0)(1,05)^7 =: F$.

Floor-Zins:

Es muss gelten

$$V_0(1 + r_F)^7 = F = (V_0 - 100\,C_0)(1,05)^7.$$

Hieraus resultiert

$$\begin{aligned} r_F &= \left[\tfrac{V_0 - 100\,C_0}{V_0}(1,05)^7\right]^{1/7} - 1 \\ &= (1,05)\left(\tfrac{V_0 - 100\,C_0}{V_0}\right)^{1/7} - 1. \end{aligned}$$

(c) Für den kollektiven Gesamtschadenprozess gilt $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, $t \geq 0$.

Dabei bezeichnet $S(t)$ den akkumulierten Gesamtschaden eines Kollektivs bis zum Zeitpunkt $t$, $N(t)$ die akkumulierte Schadenzahl bis zum Zeitpunkt $t$ und $Y_i$ die Höhe des $i$-ten Schadens. Im Cramér-Lundberg-Modell ist $N(t)$, $t \geq 0$, ein zeitlich homogener Poisson-Prozess und die $Y_i$, $i \in \mathbb{N}$, werden als i. i. d. sowie als stochastisch unabhängig von $N(t)$, $t \geq 0$, angenommen.

**Aufgabe 2.** *[Individualbewertung] [14 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Betrachten Sie einen Investor, der dem Erwartungsnutzen-Kalkül (Bernoulli-Prinzip) folgt und die Nutzenfunktion $u(x) = \ln x$ besitzt, wobei $x > 0$. Bestimmen Sie für diesen Fall das Arrow/Pratt-Maß $r(x)$ für die absolute Risikoaversion sowie das Sicherheitsäquivalent $s(X)$ für eine beliebige Zufallsvariable $X > 0$, für die $\mathrm{E}[\, u(X)]$ wohldefiniert ist!

(b) *[6 Punkte]* Betrachten Sie die (spezielle) quadratische Nutzenfunktion

$$u(x) = x - \alpha x^2.$$

(i) *[2 Punkte]* Wie ist der Definitionsbereich von $u$ einzuschränken, sodass $u$ streng monoton steigend ist?

(ii) *[4 Punkte]* Betrachten Sie das Nullnutzenprinzip $\mathrm{E}[\, u(\pi - S)] = u(0)$ sowie eine Zufallsvariable $S$ mit $\mathrm{E}[S] = 0$. Bestimmen Sie die Nullnutzenprämie $\pi$ und drücken Sie diese in Termen von $\mathrm{Var}(S)$ aus! Welche der beiden Lösungen ist (unter geeigneter Anforderung an die Varianz $\mathrm{Var}(S)$) zulässig, wenn die Nutzenfunktion auf dem Definitionsbereich als streng monoton steigend vorausgesetzt wird? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) *[5 Punkte]* Ein Unternehmen besitzt ein Anfangsvermögen von $v_0 = 1.000$ Geldeinheiten. In der betrachteten Periode kann ein Schaden $S$ eintreten, der dieses Anfangsvermögen mindert. Die Verteilung von $S$ ist gegeben durch:

| $k$ | 0 | 100 | 200 | 600 |
|---|---|---|---|---|
| $P[S = k]$ | $0,9$ | $0,04$ | $0,04$ | $0,02$ |

Das Unternehmen kann zur Deckung des Schadens eine Vollversicherung gegen die Prämie $\pi$ abschließen.

Das Unternehmen beurteilt die Endvermögensposition $V_1$ auf Basis des Bernoulli-Prinzips und legt dabei die Nutzenfunktion

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq 500, \\ 250 + 0,5x, & \text{falls } x > 500, \end{cases}$$

zugrunde.

Bei welcher Höhe der Prämie ist das Unternehmen indifferent zwischen dem Abschluss eines Versicherungsvertrags und dem Verzicht auf die Versicherung?

*Hinweis*: Betrachten Sie die Endvermögenspositionen $v_0 - \pi$ im Falle einer Vollversicherung bzw. $v_0 - S$ im Falle der Nichtversicherung.

*Lösungsskizze:*

(a) Das Arrow/Pratt-Maß ist definiert durch

$$r(x) = -u''(x)/u'(x).$$

Im Fall $u(x) = \ln x$ gilt $u'(x) = x^{-1}$ und $u''(x) = -x^{-2}$. Insgesamt folgt damit $r(x) = 1/x$.

Das Sicherheitsäquivalent genügt der Bedingung

$$u(s(X)) = \mathrm{E}[u(X)],$$

im Fall $u(x) = \ln x$ somit

$$\ln s(X) = \mathrm{E}[\ln X]$$

und damit insgesamt

$$s(X) = \exp(\mathrm{E}[\ln X]).$$

(b) (i) Es gilt $u'(x) = 1 - 2ax$ und damit

$$u'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \tfrac{1}{2a}.$$

Für $x < \frac{1}{2a}$ ist $x \mapsto u(x)$ streng monoton steigend.

(ii) Ausgangspunkt: $\mathrm{E}[u(\pi - S)] = u(0) = 0$.

Es gilt

$$\mathrm{E}[(\pi - S) - a(\pi - S)^2] = \pi - \mathrm{E}[S] - a\pi^2 + 2a\pi\mathrm{E}[S] - a\mathrm{E}[S^2].$$

Mit $\mathrm{E}[S] = 0$ und $\mathrm{E}[S^2] = \mathrm{Var}(S)$ folgt:

$$a\pi^2 - \pi + a\mathrm{Var}(S) = 0.$$

Lösungen:

$$\begin{aligned}\pi_{1/2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2\mathrm{Var}(S)}}{2a} \\ &= \tfrac{1}{2a} \pm \sqrt{\tfrac{1}{(2a)^2} - \mathrm{Var}(S)}.\end{aligned}$$

Aufgrund der Bedingung $x < \frac{1}{2a}$ (Aufgabenteil (i)) lautet die zulässige Lösung:

$$\pi = \tfrac{1}{2a} - \sqrt{\tfrac{1}{(2a)^2} - \mathrm{Var}(S)}.$$

(c) Für Indifferenz muss gelten $\mathrm{E}[u(v_0-S)] = \mathrm{E}[u(v_0-\pi)]$. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[u(v_0-S)]\\
=&u(1.000)\cdot 0,9+u(900)\cdot 0,04+u(800)\cdot 0,04+u(400)\cdot 0,02\\
=&(250+500)\cdot 0,9+(250+450)\cdot 0,04+(250+400)\cdot 0,04+400\cdot 0,02\\
=&675+28+26+8=737.
\end{aligned}$$

Es gilt ferner $\mathrm{E}[u(v_0-\pi)] = u(v_0-\pi)$. Für $v_0-\pi \le 500$ kann der Nutzen maximal 500 sein. Insofern ist der Bereich $v_0-\pi > 500$ zu betrachten. Mithin lautet die Indifferenzgleichung

$$250+0,5(v_0-\pi)=737.$$

Hieraus resultiert als Indifferenzprämie

$$\pi = v_0-974=26.$$

**Aufgabe 3.** *[Grundprinzipien der Finanzmathematik in Einperiodenmodellen] [25 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Betrachten Sie im Kontext eines Einperiodenmodells (perfekter Markt) folgende Finanzmarktsituation:

- Sparbuch mit Zinssatz $r = 0$,
- Aktie mit Spot-Preis $S_0 = 50$ und zufälligem Preis $S_1$ in $T = 1$,
- Call-Option auf diese Aktie mit Strike $K = 45$ und Fälligkeit in $T = 1$ mit Preis $C_0^{\text{call}} = 10$,
- Put-Option auf diese Aktie mit Strike $K = 45$ und Fälligkeit in $T = 1$ mit Preis $C_0^{\text{put}} = 4$.

(i) *[4 Punkte]* Wie beurteilen Sie die Arbitragefreiheit der Preise? Konstruieren Sie gegebenenfalls eine Arbitragestrategie.

(ii) *[2 Punkte]* Ein *Straddle* ist eine Optionsposition, die als Long-Position den Erwerb einer Call- und einer Put-Option auf denselben Basiswert mit identischem Strike und identischer Fälligkeit kombiniert.

Angenommen, die Preise von Aktie $S_0 = 50$ und Call-Option $C_0^{\text{call}} = 10$ sind korrekt. Wie ist dann der Straddle auf die Aktie mit Strike $K = 45$ - in Abwesenheit von Arbitrage - zu bewerten?

*Hinweis*: Beachten Sie die Put-Call-Parität.

(b) *[8 Punkte]* Ein Investor erwirbt ein strukturiertes Produkt auf den DAX mit den folgenden Modalitäten. Die Mindestrückzahlung beträgt 105% bezogen auf einen Betrag von 25.000 €. Im Fall einer positiven DAX-Entwicklung beträgt - wenn die Mindestrückzahlung hierdurch überschritten wird - die Rückzahlung 25.000 € zuzüglich einer Partizipation in Höhe von 50% der einjährigen DAX-Rendite bezogen auf den investierten Betrag von 25.000 €.

(i) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie das Rückzahlungsprofil des Produkts zum Zeitpunkt $t = 1$.

(ii) *[5 Punkte]* Gegeben sei nun ein einperiodiges Binomialmodell für die Entwicklung eines DAX-Portfolios. Der Startwert des DAX-Portfolios beträgt $\text{DAX}_0 = 55.000$ € und am Ende der Periode ist der DAX entweder um 30% gestiegen oder um 20% gefallen. Der risikolose Zins sei 5%.

Bestimmen Sie den fairen (arbitrage-freien) Preis des strukturierten Produkts durch direkte Replikation des Rückzahlungsprofils.

(c) *[11 Punkte]* Betrachten Sie das folgende Finanzmarktmodell mit zwei primären Produkten, Sparbuch und Aktie, und mit drei möglichen Szenarien $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ($P[\{\omega_i\}] > 0$ für $i = 1, 2, 3$):

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{S_1^0(\omega_1) = 2} \\
\boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 2} \\
& \boxed{S_1^0(\omega_3) = 2}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \boxed{S_1^1(\omega_1) = 24} \\
\boxed{S_0^1 = 9} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^1(\omega_2) = 16} \\
& \boxed{S_1^1(\omega_3) = 16}
\end{tikzcd}$$

(i) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Folgern Sie, dass dieses Finanzmarktmodell unvollständig ist.

(ii) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie die Menge der arbitrage-freien Preise für den Contingent Claim $C_1$, definiert durch

$$C_1(\omega_1) = 14, C_1(\omega_2) = 6, C_1(\omega_3) = 14.$$

(iii) *[2 Punkte]* Ist $C_1$ replizierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

*Lösungsskizze:*

(a) (i) Die Auszahlungsprofile von Aktie, Call-Option und Put-Option in $T = 1$ sind nicht unabhängig, sodass durch falsche Bewertung Arbitrage entstehen kann. In Abwesenheit von Arbitrage müssen die Preise der Put-Call-Parität $C_0^{\text{call}} - C_0^{\text{put}} = S_0 - K$ genügen. Diese Bedingung ist jedoch für die gegebenen Preise verletzt.

Eine Arbitragestrategie, die zu einem sicheren Gewinn der Höhe 1 führt, kann wie folgt konstruiert werden:

*Zeitpunkt t=0:*

| | |
|---|---|
| Kaufe Aktie | $-50$ |
| Verkaufe Call | $+\ 10$ |
| Kaufe Put | $-\ \ 4$ |
| Leihe Geld | $+\ 44$ |
| $\sum$ | 0 |

*Zeitpunkt t=T=1:*

| | |
|---|---|
| Verkaufe Aktie | $S_1$ |
| Payoff des Short Calls | $-(S_1 - 45)^+$ |
| Payoff des Long Puts | $+(45 - S_1)^+$ |
| Bezahle Schulden | $-44$ |
| $\sum$ | 1 |

(ii) Aufgrund der Put-Call-Parität $C_0^{\text{call}} - C_0^{\text{put}} = S_0 - K$ ergibt sich ausgehend von Aktienpreis und Call-Preis der arbitrage-freie Wert der Put-Option

$$C_0^{\text{put}} = C_0^{\text{call}} - S_0 + K = 10 - 50 + 45 = 5,$$

also als Wert des Straddles $C_0^{\text{straddle}} = C_0^{\text{call}} + C_0^{\text{put}} = 10 + 5 = 15.$

(b) (i) Das Rückzahlungsprofil $L_1$ des Produkts zu $t = 1$ ist gegeben durch

$$L_1 = \max\{25.000 \cdot 1,05, 25.000 + 25.000 \cdot 0,5 \cdot R_{\mathrm{DAX}}\},$$

wobei

$$R_{\mathrm{DAX}} := \frac{\mathrm{DAX}_1 - \mathrm{DAX}_0}{\mathrm{DAX}_0}$$

die Einperiodenrendite des DAX-Portfolios bezeichnet.

(ii) Die Entwicklung des DAX-Portfolios ist gegeben durch:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \boxed{\mathrm{DAX}_1 = 71.500\ (+30\%)} \\ \boxed{\mathrm{DAX}_0 = 55.000} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{\mathrm{DAX}_1 = 44.000\ (-20\%)} \end{tikzcd}$$

Wenn der DAX fällt, so beträgt die Rückzahlung $25.000 \cdot 1,05 = 26.250$. Wenn der DAX steigt, beträgt die Rückzahlung $25.000 + 25.000 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 28.750$. Damit gilt

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \boxed{L_1 = 28.750} \\ \boxed{L_0} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{L_1 = 26.250} \end{tikzcd}$$

<u>Replikation in $t = 1$:</u>

$$\begin{aligned} 71.500x + 1,05y &= 28.750 \qquad (1) \\ 44.000x + 1,05y &= 26.250 \qquad (2) \end{aligned}$$

Aus (1)-(2) folgt $27.500x = 2.500$ und damit $x = \frac{1}{11} \approx 0,0909$. Durch Einsetzen in (1) ergibt sich damit

$$y = [28.750 - 71.500 \cdot 0,0909](1,05)^{-1} = 21.190,4762.$$

<u>Wert des Replikationsportfolios in $t = 0$:</u>

$$55.000x + y = 55.000 \cdot 0,0909 + 21.190,4762 = 26.190,4762.$$

Der Wert des Replikationsportfolios ist zugleich der gesuchte faire Preis des strukturierten Produkts.

(c) (i) Jedes äquivalente Martingalmaß $Q$ ist mit Gewichten $q_i = Q[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2, 3$, bestimmt durch

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathrm{E}_Q\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = q_1 \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1) + q_2 \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2) + q_3 \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_3)$$

und die Nebenbedingung $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Durch Einsetzen der Werte im konkreten Modell ergibt sich

$$9 = 12q_1 + 8q_2 + 8q_3 = 12q_1 + 8(1 - q_1) = 4q_1 + 8.$$

Es folgt $q_1 = \frac{1}{4}$ und $q_2 + q_3 = \frac{3}{4}$. Jede Aufteilung

$$q_2(\alpha) = \tfrac{3}{4}\alpha, q_3(\alpha) = \tfrac{3}{4}(1 - \alpha) \quad \text{mit } \alpha \in (0, 1)$$

definiert ein äquivalentes Martingalmaß $Q_\alpha$. Da die Menge der äquivalenten Martingalmaße unendlich viele Elemente besitzt, ist das Finanzmarktmodell gemäß 2. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung unvollständig.

(ii) Für den Contingent Claim $C_1$ berechnet man unter dem Martingalmaß $Q_\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, den arbitrage-freien Preis

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha} =& S_0^0 \left( q_1 \tfrac{C_1(\omega_1)}{S_1^0} + q_2(\alpha) \tfrac{C_1(\omega_2)}{S_1^0} + q_3(\alpha) \tfrac{C_1(\omega_3)}{S_1^0} \right) \\ =& 1 \left( \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{14}{2} + \tfrac{3}{4}\alpha \cdot \tfrac{6}{2} + \tfrac{3}{4}(1 - \alpha) \cdot \tfrac{14}{2} \right) \\ =& 7 - 3\alpha. \end{aligned}$$

Dieser hängt explizit von $\alpha \in (0, 1)$ ab. Man erhält die Menge der arbitragefreien Preise $\mathcal{C}_0 = (4, 7)$, also ein ganzes Preisintervall.

(iii) Der Claim ist nicht replizierbar, da anderenfalls der arbitrage-freie Preis eindeutig ist und den Kosten der Replikation entspricht.

Alternativ argumentiert: Replizierbare Contingent Claims sind von der Form

$$C_1 = \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1.$$

Dies trifft offenbar auf den gegebenen Contingent Claim nicht zu, da er im Gegensatz zur Aktie in den Szenarien $\omega_2$ und $\omega_3$ verschiedene Werte annimmt.

**Aufgabe 4.** *[Zinsen, Zinsprodukte, Sensitivitäten (Duration, Konvexität)] [32 Punkte]*

(a) *[8 Punkte]* Gegeben seien zwei Standardbonds $A$ und $B$ mit korrespondierenden Kursen $P_A$ und $P_B$ in $t = 0$, Nennwerten $N_A$ und $N_B$, Nominalzinsen $i_A$ und $i_B$ sowie Restlaufzeiten $T_A = 2$ und $T_B = 3$. Gehen Sie ferner davon aus, dass die einjährige Spot Rate $r_0^z(1)$ zu $t = 0$ bereits bekannt ist.

(i) *[2 Punkte]* Wie lauten die Zahlungsströme der Bonds $A$ und $B$?

(ii) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie in $t = 0$ die zugehörige Diskontstruktur (Kurse der Einheitszerobonds) $\{P(0,1), P(0,2), P(0,3)\}$ sowie die (restliche) Zinsstruktur (Spot Rates) $\{r_0^z(2), r_0^z(3)\}$ bei zusammengesetzter Verzinsung.

(iii) *[1 Punkt]* Geben Sie mithilfe der Kurse der Einheitszerobonds eine Berechnungsformel für die in $t = 0$ gültige Forward Rate für eine Anlage von $t = 2$ bis $t = 3$ bei *stetiger* Verzinsung an.

(b) *[9 Punkte]* Betrachten Sie eine Stufenzinsanleihe, die im ersten Jahr einen Kupon von 1%, im zweiten Jahr einen Kupon von 2%, im dritten Jahr einen Kupon von 3% und im vierten Jahr einen Kupon von 5% aufweist. Die Kupons sind jeweils am Jahresende fällig. Der Nennwert ist 100 Euro und die Laufzeit beträgt 4 Jahre. Das aktuelle Marktzinsniveau ist flach und liegt bei 4% p.a.

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den heutigen Marktpreis der Anleihe.

(ii) *[3 Punkte]* Schätzen Sie die prozentuale Preisveränderung der Anleihe unter Verwendung des Durationskonzepts ab. Nehmen Sie an, dass sich das Marktzinsniveau auf 3% p.a. reduziert.

(iii) *[4 Punkte]* Verwenden Sie nunmehr Duration und Konvexität zur Schätzung der Preisveränderung. Wie groß ist die prozentuale Preisveränderung, wenn sich das Marktzinsniveau auf 3% p.a. reduziert?

(c) *[15 Punkte]* Gegeben seien die Zahlungszeitpunkte $t \le T_1 < T_2$. Betrachten Sie einen in $t$ abgeschlossenen Forwardkontrakt mit Fälligkeit $T_1$ auf einen Zerobond mit Nennwert $N = 1$ Euro und Fälligkeit $T_2$. Bestimmen Sie den Wert des Forwardkontrakts in $t$, d. h. den Forwardpreis $F(t; T_1, T_2)$,

(i) *[5 Punkte]* zum einen auf der Basis des Vergleichs zweier alternativer Strategien, die in $T_2$ die Auszahlung 1 Euro liefern,

(ii) *[10 Punkte]* und zum anderen auf Basis einer risikoneutralen Bewertung unter Verwendung eines äquivalenten Martingalmaßes $Q$ bezüglich des Numéraires Geldmarktfonds $(K_t)_{t\ge 0}$.

*Lösungsskizze:*

(a) (i) Der Zahlungsstrom von Bond $A$ lautet $\{-P_A, N_A \cdot i_A, N_A \cdot i_A + N_A\}$, der Zahlungsstrom von Bond $B$ lautet $\{-P_B, N_B \cdot i_B, N_B \cdot i_B, N_B \cdot i_B + N_B\}$.

(ii) Der Kurs $P(0,1)$ eines Einheitszerobonds mit einer Laufzeit von einem Jahr bei bekannter Spot Rate ist gegeben durch

$$P(0,1) = (1 + r_0^z(1))^{-1}. \tag{3}$$

Ferner gilt

$$P_A = N_A \cdot i_A \cdot P(0,1) + (N_A \cdot i_A + N_A) \cdot P(0,2), \tag{4}$$
$$P_B = N_B \cdot i_B \cdot P(0,1) + (N_B \cdot i_B) \cdot P(0,2) + (N_B \cdot i_B + N_B) \cdot P(0,3). \tag{5}$$

Da $P(0,1)$ gemäß (3) bekannt ist, folgt aus (4)

$$P(0,2) = \frac{P_A - N_A \cdot i_A \cdot P(0,1)}{N_A \cdot i_A + N_A} = \frac{P_A - N_A \cdot i_A \cdot P(0,1)}{N_A \cdot (1 + i_A)}$$

und damit aus (5)

$$P(0,3) = \frac{P_B - N_B \cdot i_B \cdot (P(0,1) + P(0,2))}{N_B \cdot i_B + N_B} = \frac{P_B - N_B \cdot i_B \cdot (P(0,1) + P(0,2))}{N_B \cdot (1 + i_B)}.$$

Dies liefert für die restlichen Spot Rates

$$r_0^z(2) = (P(0,2))^{-1/2} - 1 \text{ sowie } r_0^z(3) = (P(0,3))^{-1/3} - 1.$$

(iii) Die gesuchte Forward Rate ist gegeben durch

$$f_0^s(2,3) = -(\ln P(0,3) - \ln P(0,2)).$$

(b) Es sei $P(r)$ der Marktpreis der Stufenzinsanleihe in $t = 0$ bezogen auf den flachen Zins $r$. Dann gilt:

$$P(r) = (1+r)^{-1} + 2(1+r)^{-2} + 3(1+r)^{-3} + 105(1+r)^{-4},$$
$$P'(r) = -(1+r)^{-2} - 4(1+r)^{-3} - 9(1+r)^{-4} - 420(1+r)^{-5},$$
$$P''(r) = 2(1+r)^{-3} + 12(1+r)^{-4} + 36(1+r)^{-5} + 2100(1+r)^{-6}.$$

(i) $P(0,04) = 95,23$

(ii) Für die modifizierte Duration gilt

$$\mathrm{DUR}^M(0,04) = -P'(0,04)/P(0,04) = 357,38/95,23 = 3,75$$

und entsprechend

$$\Delta P/P \approx -\mathrm{DUR}^M(0,04)(-0,01) = 0,0375.$$

Die approximative Wertsteigerung beträgt 3,75%.

(iii) Die (relative) Konvexität ist gegeben durch

$$\mathrm{CONV}(0,04) = P''(0,04)/P(0,04) = 1701,2855/95,23 = 17,865.$$

Dies liefert unter Berücksichtigung der Konvexität

$$\begin{aligned}\Delta P/P &\approx -\mathrm{DUR}^M(0,04)(-0,01) + \tfrac{1}{2}\mathrm{CONV}(0,04)(-0,01)^2 \\ &= 0,0375 + 0,0009 = 0,0384.\end{aligned}$$

d. h. eine approximative Wertsteigerung in Höhe von 3, 84%.

(c) (i) Strategie 1: Erwerb des $T_2$-Bonds in $t$ zu $P(t,T_2)$ auf Kredit mit Rückzahlung des Kredits in $T_1$. Der Kapitaleinsatz in $t$ beträgt null.

Wert in $T_1$: $P(T_1,T_2) - P(t,T_2) \cdot \dfrac{1}{P(t,T_1)}$.

Strategie 2: Erwerb des $T_2$-Bonds in $t$ durch Abschluss des Forwardkontrakts mit Zahlung des in $t$ vereinbarten Forward-Preises $F(t;T_1,T_2)$ in $T_1$. Der Kapitaleinsatz in $t$ beträgt wiederum null.

Wert in $T_1$: $P(T_1,T_2) - F(t;T_1,T_2)$.

Beide Strategien erfordern keinen anfänglichen Kapitaleinsatz und führen zum Besitz des $T_2$-Bonds in $T_1$. Unter No Arbitrage-Gesichtspunkten müssen sie damit wertmäßig identisch sein.

Folgerung:

$$P(T_1,T_2) - \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)} = P(T_1,T_2) - F(t;T_1,T_2)$$

und damit

$$F(t;T_1,T_2) = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}.$$

(ii) Der Wert der Position in $t$ gemäß risikoneutraler Bewertung lautet:

$$\begin{aligned}&K_t \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{P(T_1,T_2)-F(t;T_1,T_2)}{K_{T_1}}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= K_t \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{P(T_1,T_2)}{K_{T_1}}\middle|\mathcal{F}_t\right] - K_t F(t;T_1,T_2)\mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{K_{T_1}}\middle|\mathcal{F}_t\right].\end{aligned}$$

Der erste Term des letzten Ausdrucks ist gerade der Wert des $T_2$-Bonds in $t$, mithin $P(t,T_2)$. Der zweite Term entspricht gerade $F(t;T_1,T_2)P(t,T_1)$.

Damit lautet der Wert der Position in $t$ nunmehr

$$P(t,T_2) - F(t;T_1,T_2)P(t,T_1).$$

Dieser Wert muss null betragen. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$F(t;T_1,T_2) = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}.$$

**Aufgabe 5.** *[Bewertung von Aktienderivaten im Binomialmodell] [25 Punkte]*

Betrachten Sie das zweiperiodige Binomialmodell, in dem für die Aktie ein Startpreis von 100 € sowie pro Periode eine prozentuale Aufwärtsbewegung von 20% und eine prozentuale Abwärtsbewegung von 10% unterstellt wird. Der einperiodige Zinssatz für die sichere Kapitalanlage bzw. -aufnahme betrage bei flacher Zinsstruktur $r = 5\%$.

(a) *[5 Punkte]* Überprüfen Sie zunächst, dass das so spezifizierte Binomialmodell arbitrage-frei ist. Geben Sie - sofern existent - das äquivalente Martingalmaß explizit an.

(b) *[2 Punkte]* Stellen Sie die Entwicklung des Aktienkurses $S_0, S_1, S_2$ von $t = 0$ bis $t = 2$ für alle Szenarien $\omega \in \Omega = \{(y_1, y_2) : y_i \in \{d, u\}\}$ dar.

(c) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie anhand der risikoneutralen Bewertungsformel den arbitrage-freien Preis einer Europäischen Call-Option auf die betrachtete Aktie mit Fälligkeit in $t = 2$ und Ausübungspreis 100 € zu den Zeitpunkten $t = 0, 1$ in den einzelnen Knoten.

(d) *[10 Punkte]* Betrachten Sie nun eine Anleihe („Bear-Anleihe") mit den folgenden Modalitäten. Die Laufzeit beträgt 2 Jahre, der Nennwert 200.000, es erfolgen keine laufenden Zinszahlungen. Weist die Aktie in $t = 2$ im Vergleich zu $t = 0$ einen Wertverlust auf, so erhält der Käufer der Anleihe zusätzlich zum Nennwert einen Bonus in Höhe von 20% des Absolutbetrags der nicht-annualisierten (negativen) Rendite $(S_2 - S_0)/S_0$.

   (i) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie den Marktwert der Bear-Anleihe in $t = 0$ durch (direkte) Replikation des Rückzahlungsprofils der Anleihe.

   (ii) *[2 Punkte]* Wie hoch ist der Marktwert, wenn die Bear-Anleihe zusätzlich einen jährlichen Nominalzins von 5% abwirft?

*Lösungsskizze:*

(a) „Down"-Faktor $d = 0,9$, „Up"-Faktor $u = 1,2$ und Zins $r = 0,05$ erfüllen die Bedingung $d < 1 + r < u$. Dies sichert die Existenz (genau) eines äquivalenten Martingalmaßes $Q$ und damit insbesondere die Arbitragefreiheit des vorliegenden Binomialmodells.

Die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten unter $Q$ sind gegeben durch

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = 0,5$$

für eine Aufwärtsbewegung sowie durch $1 - q = 0,5$ für eine Abwärtsbewegung der Aktie. Damit gilt

$$Q[\{\omega\}] = (1 - q)^{2 - N(\omega)} q^{N(\omega)},$$

wobei $N(\omega)$ für $\omega \in \Omega = \{(y_1, y_2) : y_i \in \{d, u\}\}$ die Anzahl der Aufwärtsbewegungen bezeichnet.

*Bemerkung:* Die Formel für $q$ ergibt sich aus der Bedingung

$$S_0 = \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{1+r} S_1\right] = \tfrac{1}{1+r}(uS_0 q + dS_0(1-q)).$$

Eine explizite Herleitung ist nicht erforderlich.

(b) Der Kursverlauf der Aktie ist gegeben durch:

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{S_2 = u^2 S_0 = 144} \\
 & \boxed{S_1 = uS_0 = 120} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\boxed{S_0 = 100} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{S_2 = udS_0 = 108} \\
 & \boxed{S_1 = dS_0 = \ \ 90} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \boxed{S_2 = d^2 S_0 = \ \ 81}
\end{tikzcd}$$

(c) Aus dem obigen Kursverlauf der Aktie ist die Auszahlung der Call-Option in $t = 2$ ablesbar:

$$C_2(\omega) = (S_2(\omega) - 100)^+ = \begin{cases} 44 & \text{für } \omega = (u, u), \\ 8 & \text{für } \omega = (u, d) \text{ und } \omega = (d, u), \\ 0 & \text{für } \omega = (d, d). \end{cases}$$

Es sei $V_t$ der arbitrage-freie Preis der Call-Option zum Zeitpunkt $t$, $t = 0, 1, 2$. Dann gilt $V_2 = C_2$, und man berechnet rekursiv

$$\begin{aligned}
V_1((u,\cdot)) &= \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{1+r} V_2 | \mathcal{F}_1\right](u,\cdot) = \tfrac{1}{1+r}[V_2((u,u))q + V_2((u,d))(1-q)] \\
&= \tfrac{1}{1{,}05}[44 \cdot 0,5 + 8 \cdot 0,5] = \tfrac{520}{21} \approx 24,7619, \\
V_1((d,\cdot)) &= \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{1+r} V_2 | \mathcal{F}_1\right](d,\cdot) = \tfrac{1}{1+r}[V_2((d,u))q + V_2((d,d))(1-q)] \\
&= \tfrac{1}{1{,}05}[8 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5] = \tfrac{80}{21} \approx 3,8095
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
V_0 &= \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{1+r} V_1\right] = \tfrac{1}{1+r}[V_1((u,\cdot))q + V_1((d,\cdot))(1-q)] \\
&= \tfrac{1}{1{,}05}\left[\tfrac{520}{21} \cdot 0,5 + \tfrac{80}{21} \cdot 0,5\right] \approx 13,6054.
\end{aligned}$$

(d) (i) Die Bear-Anleihe zahlt einen Bonus auf den Nennwert nur im Fall einer negativen Wertentwicklung der Aktie in $t = 2$, also nur im Szenario $(d, d)$. In den Szenarien $(u, u)$, $(u, d)$, $(d, u)$ wird keine Bonuszahlung fällig. Für die Rückzahlung der Bear-Anleihe gilt dann:

- $(u,u)$, $(u,d)$, $(d,u)$: 200.000
- $(d,d)$: $200.000(1+0,2\cdot|0,9\cdot 0,9-1|)=207.600$

Die Berechnung der Stückzahlen $x$ in der Aktie und $y$ im Sparbuch mit Wertentwicklung $(1;1+r;(1+r)^2)=(1;1,05;1,1025)$ erfolgt in jedem Knoten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$\underline{t=1,\omega=(u,\cdot)}$:

$$\begin{aligned} 144x &+ 1,1025y = 200.000 \\ 108x &+ 1,1025y = 200.000 \end{aligned}$$

Damit gilt $x=0$, $y=181.405,8957$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_1((u,\cdot)) = 120x + 1,05y = 190.476,1905.$$

$\underline{t=1,\omega=(d,\cdot)}$:

$$\begin{aligned} 108x &+ 1,1025y = 200.000 \\ 81x &+ 1,1025y = 207.600 \end{aligned}$$

Damit gilt $x=-281,4815$, $y=208.979,5918$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_1((d,\cdot)) = 90x + 1,05y = 194.095,2364.$$

$\underline{t=0}$:

$$\begin{aligned} 120x &+ 1,05y = 190.476,1905 \\ 90x &+ 1,05y = 194.095,2364 \end{aligned}$$

Damit gilt $x=-120,6349$, $y=195.192,7372$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_0 = 100x + y = 183.129,2472.$$

Dies ist der arbitrage-freie Preis der Bear-Anleihe.

(ii) Die zusätzlichen Zahlungen in $t=1$ und $t=2$ betragen $200.000\cdot 0,05 = 10.000$. Bewertung durch Barwertbildung mit Zins 5% ergibt eine Marktwerterhöhung von

$$10.000\cdot(1,05)^{-1} + 10.000\cdot(1,05)^{-2} = 18.594,1043,$$

d. h. der Wert der Bear-Anleihe mit Zinszahlungen beträgt 201.723,3515.

**Aufgabe 6.** *[Value at Risk: Eigenschaften und Anwendungen] [25 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Definieren Sie das monetäre Risikomaß Value at Risk $\mathrm{V@R}_\lambda$ zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ ausgehend von der Menge der (z. B. aus Sicht der Aufsicht) akzeptablen Finanzpositionen (*Akzeptanzmenge*). Erläutern Sie anhand Ihrer Definition, in welchem Sinn der Value at Risk als Kapitalanforderung aufgefasst werden kann.

(b) *[7 Punkte]* Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Finanzpositionen $X_1$ und $X_2$, deren Verteilungen spezifiziert sind durch:

$$P[X_i = 10] = 0,97, P[X_i = -100] = 0,03 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

(i) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie zum Niveau $\lambda = 0,05$ den Value at Risk für die Finanzpositionen $X_1$ und $X_2$ sowie für die aggregierte Position $X_1 + X_2$.

*Hinweis*: Wenn $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig sind, gilt

$$P[X = x, Y = y] = P[X = x] \cdot P[Y = y].$$

(ii) *[2 Punkte]* Welche Konsequenz hat das Ergebnis aus (i) für die Subadditivität des Value at Risk? Welche Problematik kann hieraus in Praxisanwendungen des Value at Risk resultieren?

(c) *[7 Punkte]*

(i) *[3 Punkte]* Zeigen Sie, dass für eine normalverteilte Finanzposition $X$ mit Varianz $\sigma^2(X)$ der Value at Risk die Form

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = \mathrm{E}[-X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma(X) \tag{6}$$

besitzt, wobei $\Phi^{-1}$ die Quantilfunktion der Standardnormalverteilung ist.

(ii) *[2 Punkte]* In der klassischen Portfoliotheorie a la Markowitz wird die Varianz als Risikomaß (bezogen auf Renditen) verwendet; Erweiterungen betrachten jedoch aufgrund von Schwächen der Varianz alternative Risikomaße.

Nennen Sie Schwächen der Varianz als Risikomaß und erläutern Sie *kurz* die Implikation von (6) für die Verwendung des Value at Risk als Risikomaß in der Portfoliooptimierung bei normalverteilten Renditen.

(iii) *[2 Punkte]* Folgern Sie mithilfe von (6), dass sich der $\mathrm{V@R}_\lambda$ für $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$ auf der Menge der Gauß'schen Zufallsvariablen subadditiv verhält, d. h. für zwei gemeinsam normalverteilte Finanzpositionen $X$, $Y$ gilt

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X + Y) \leq \mathrm{V@R}_\lambda(X) + \mathrm{V@R}_\lambda(Y).$$

(d) *[4 Punkte]* Die Solvabilitätskapitalanforderung (SCR) unter Solvency II wird (siehe auch §97(2) VAG) durch den Mean Value at Risk

$$\mathrm{SCR}(E_1) = \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1 - \mathrm{E}[E_1])$$

zum Niveau $0,005$ der Basiseigenmittel $E_1$ im Einjahreshorizont definiert.

(i) *[2 Punkte]* Gegeben seien zwei gemeinsam normalverteilte Finanzpositionen $X$, $Y$ mit Korrelation $\rho$. Zeigen Sie mithilfe von (6), dass in diesem Fall die Anwendung der Wurzelformel zur Aggregation mathematisch korrekt auf das SCR der Position $X + Y$ führt.

(ii) *[2 Punkte]* Wie schätzen Sie allgemein die Anwendbarkeit der Wurzelformel zur Risikoaggregation ein?

(e) *[4 Punkte]* Der Wert $V_u$ einer Finanzposition zum Zeitpunkt $u$ sei durch einen Risikofaktor $Z$ erklärbar via $V_u = v(Z_u)$ für eine stetig differenzierbare Funktion $v$. Im Folgenden sei $t$ ein fixierter Zeitpunkt, zu dem die Risikomessung erfolgt.

(i) *[2 Punkte]* Geben Sie für kleines $h > 0$ die Delta-Approximation für den Periodengewinn $\Delta V := V_{t+h} - V_t$ an.

(ii) *[2 Punkte]* Die Wertänderung $\Delta Z := Z_{t+h} - Z_t$ sei normalverteilt mit den Parametern $\mathrm{E}[\Delta Z] = h\mu$ und $\mathrm{Var}[\Delta Z] = h\sigma^2$. Bestimmen Sie mit der Delta-Normal-Approximation eine Formel für den Value at Risk $\mathrm{V@R}_\lambda$ des Periodengewinns $\Delta V$ zum Niveau $\lambda$.

*Lösungsskizze:*

(a) Die Akzeptanzmenge des $\mathrm{V@R}_\lambda$ ist gegeben durch

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{X} | P[X < 0] \leq \lambda\},$$

wobei $\mathcal{X}$ die Menge aller Finanzpositionen zu einem festen Zeitpunkt bezeichnet. Dies bedeutet, dass alle Finanzpositionen, die mit Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich $\lambda$ keine Verluste erzeugen, akzeptabel sind. Der $\mathrm{V@R}_\lambda$ lässt sich aus der Akzeptanzmenge ableiten via

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | X + m \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | P[X + m < 0] \leq \lambda\}. \qquad (7)$$

In diesem Sinn ist der $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ der kleinste Geldbetrag, der zu einer Finanzposition $X$ hinzuzufügen ist, sodass diese akzeptabel wird.

(b) (i) Aus Definition (7) folgt unmittelbar $\mathrm{V@R}_{0,05}(X_1) = \mathrm{V@R}_{0,05}(X_2) = -10$. Die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ nimmt nur die folgenden Werte an:

$$X_1 + X_2 = \begin{cases} 20 & \text{wenn } X_1 = X_2 = 10 \\ -90 & \text{wenn } X_1 = 10, X_2 = -100 \text{ oder } X_1 = -100, X_2 = 10 \\ -200 & \text{wenn } X_1 = X_2 = -100 \end{cases}$$

Für die Eintrittswahrscheinlichkeiten gilt hierbei:

$$\begin{aligned}
P[X_1+X_2=20] &= P[X_1=10, X_2=10] = P[X_1=10]P[X_2=10] \\
&= (0,97)^2 = 0,9409 \\
P[X_1+X_2=-90] &= P[X_1=10, X_2=-100] + P[X_1=-100, X_2=10] \\
&= P[X_1=10]P[X_2=-100] \\
&\quad +P[X_1=-100]P[X_2=10] \\
&= 2\cdot 0,03\cdot 0,97 = 0,0582 \\
P[X_1+X_2=-200] &= P[X_1=-100, X_2=-100] \\
&= P[X_1=-100]P[X_2=-100] \\
&= (0,03)^2 = 0,0009
\end{aligned}$$

Hieraus ist ablesbar: $\mathrm{V@R}_{0,05}(X_1+X_2)=90$. Insbesondere gilt:

$$90 = \mathrm{V@R}_{0,05}(X_1+X_2) > \mathrm{V@R}_{0,05}(X_1) + \mathrm{V@R}_{0,05}(X_2) = -20.$$

(ii) Das Ergebnis verdeutlicht, dass das Risikomaß V@R im Allgemeinen nicht subadditiv ist. Damit kann V@R ökonomisch sinnvolle Diversifikation zwischen Risiken bestrafen. Hieraus können Probleme bei der Steuerung, z. B. im Kontext von Limit- und Schwellenwertsystemen, resultieren.

(c) (i) Für die Normalverteilung (stetige Verteilung) ist der Value at Risk zum Niveau $\lambda$ bestimmt durch

$$\lambda = P[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0].$$

Hierbei gilt

$$P[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0] = P\left[\tfrac{X-\mathrm{E}[X]}{\sigma(X)} \leq \tfrac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X)-\mathrm{E}[X]}{\sigma(X)}\right] = \Phi\left(\tfrac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X)-\mathrm{E}[X]}{\sigma(X)}\right),$$

da die normierte Zufallsvariable $(X-\mathrm{E}[X])/\sigma(X)$ standardnormalverteilt ist. Dies liefert

$$\Phi^{-1}(\lambda) = \tfrac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X)-\mathrm{E}[X]}{\sigma(X)}$$

und damit nach Umformen die Behauptung.

(ii) Die Varianz behandelt - im Sinn der zweiseitigen Interpretation des Risikobegriffs - Abweichungen nach oben und unten gleich. Sie hat als Risikomaß Bedeutung vor allem im Kontext elliptischer Verteilungen (inkl. Normalverteilung), die insbesondere symmetrisch verteilt sind. In der Anwendungspraxis treten jedoch häufig Fälle auf (Hedgefonds; Private Equity; Aktienportfolios, die durch Aktien- und Währungsderivate gesteuert werden), in denen bei Renditeverteilungen eine signifikante Schiefe vorliegt, sodass der Einsatz alternativer Risikomaße motiviert wird.

Im Fall normalverteilter Renditen/Finanzpositionen minimiert nun - bei fixiertem Erwartungswert - jedes Portfolio, das Standardabweichung bzw. Varianz minimiert somit auch das Risikomaß $\mathrm{V@R}_\lambda$, $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$. Alternative Mean/Risk-Ansätze entfalten ihre Relevanz somit erst außerhalb der Klasse Gauß'scher Verteilungen (bzw. allgemeiner elliptischer Verteilungen).

(iii) Da $X, Y$ gemeinsam normalverteilt sind, ist auch die aggregierte Position $X + Y$ normalverteilt, d. h.

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X+Y) = \mathrm{E}[-(X+Y)] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma(X+Y).$$

Nach elementarer Stochastik gilt (unabhängig von den Verteilungen) für die Varianz

$$\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho\sigma(X)\sigma(Y)$$

bzw. auf Ebene der Standardabweichung

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho\sigma(X)\sigma(Y)}. \tag{8}$$

Dies jedoch zeigt (da $\Phi^{-1}(\lambda) \leq 0$ für $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V@R}_\lambda(X+Y) &= \mathrm{E}[-(X+Y)] - \Phi^{-1}(\lambda)\sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho\sigma(X)\sigma(Y)} \\
&\leq \mathrm{E}[-(X+Y)] - \Phi^{-1}(\lambda)\sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\sigma(X)\sigma(Y)} \\
&= \mathrm{E}[-X] + \mathrm{E}[-Y] - \Phi^{-1}(\lambda)(\sigma(X) + \sigma(Y)) \\
&= \mathrm{V@R}_\lambda(X) + \mathrm{V@R}_\lambda(Y).
\end{aligned}$$

(d) (i) Mit (6) gilt nach Definition des SCR

$$\begin{aligned}
\mathrm{SCR}(X) &= \mathrm{V@R}_{0,005}(X - \mathrm{E}[X]) = -\Phi^{-1}(0,005)\sigma(X), \\
\mathrm{SCR}(Y) &= \mathrm{V@R}_{0,005}(Y - \mathrm{E}[Y]) = -\Phi^{-1}(0,005)\sigma(Y), \\
\mathrm{SCR}(X+Y) &= \mathrm{V@R}_{0,005}(X + Y - \mathrm{E}[X+Y]) = -\Phi^{-1}(0,005)\sigma(X+Y),
\end{aligned}$$

d. h. die SCRs entsprechen bis auf einen positiven Faktor $-\Phi^{-1}(0,005)$ der Standardabweichung der Finanzpositionen. Dies impliziert nach Multiplikation mit $-\Phi^{-1}(0,005)$ zusammen mit (8)

$$\mathrm{SCR}(X+Y) = \sqrt{(\mathrm{SCR}(X))^2 + (\mathrm{SCR}(Y))^2 + 2\rho\mathrm{SCR}(X)\mathrm{SCR}(Y)},$$

d. h. die Aggregation des Risikokapitals per Wurzelformel ist im Normalverteilungskontext mathematisch korrekt.

(ii) Die Wurzelformel liefert eine mathematisch korrekte Aggregation für gemeinsam normalverteilte Risiken (bzw. allgemeiner elliptische Verteilungen). Bei abweichenden Randverteilungen der Risiken (speziell: schiefe Verteilungen, heavy tails) oder Abhängigkeiten (speziell: Tailabhängigkeiten) ist die Wurzelformel mathematisch hingegen nicht korrekt.

(e) (i) Es sei $z = z(t)$ sowie $\Delta z = z(t+h) - z(t)$ für $h > 0$. Dann gilt gemäß Taylor-Approximation 1. Ordnung

$$\Delta v := v(z + \Delta z) - v(z) \approx \frac{dv(z)}{dz} \Delta z.$$

Übertragen auf die Zufallsvariable $\Delta Z$ ergibt sich mit $d = \frac{dv}{dz}$

$$\Delta V \approx d \Delta Z.$$

(ii) $\Delta V$ ist unter den gegebenen Voraussetzungen normalverteilt mit

$$\mathrm{E}[\Delta V] = hd\mu, \ \mathrm{Var}[\Delta V] = hd^2\sigma^2.$$

Dementsprechend gilt

$$\mathrm{V@R}_\lambda(\Delta V) = -hd\mu - \Phi^{-1}(\lambda)\sqrt{h}|d|\sigma.$$

**Aufgabe 7.** *[Axiomatische Theorie der Risikomaße & risikoadjustierte Performance-Maße] [15 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]*

(i) *[3 Punkte]* Definieren Sie den Begriff eines monetären Risikomaßes auf einer Menge $\mathcal{X}$ von Finanzpositionen. Interpretieren Sie *kurz* die beiden definierenden Eigenschaften.

(ii) *[1 Punkt]* Definieren Sie den Begriff eines konvexen Risikomaßes. Erläutern Sie *kurz*, welche wichtige ökonomische Eigenschaft konvexe Risikomaße - im Gegensatz zum Value at Risk - abdecken.

(b) *[6 Punkte]*

(i) *[2 Punkte]* Definieren Sie für eine Finanzposition $X$ den Average Value at Risk (AV@R) zum Niveau $\lambda \in (0, 1)$. Geben Sie zwei Eigenschaften des Risikomaßes AV@R an.

(ii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie zum Niveau $\lambda = 0,1$ den Value at Risk und den Average Value at Risk für eine Finanzposition $X$, die zu den Parametern $\mu = 100$ und $\sigma^2 = 9$ normalverteilt ist. Was stellen Sie fest?

*Hinweise*: Es gilt $\Phi^{-1}(0,1) = -1,2816$ sowie $\varphi(\Phi^{-1}(0,1)) = 0,1755$, wobei $\Phi$ und $\varphi$ die Verteilungsfunktion bzw. die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnen. Nutzen Sie zur Berechnung des Average Value at Risk die Substitution $x = \Phi^{-1}(\alpha)$ sowie $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

(c) *[3 Punkte]* Eine gängige Alternative zum V@R ist der Tail Value at Risk (TV@R). Geben Sie die formale Definition des TV@R an. Interpretieren Sie die Definition, insbesondere mit Blick auf eine der Kernschwächen des Value at Risk.

(d) *[2 Punkte]* Beschreiben Sie *kurz* den Grundgedanken des Konzepts der risikoadjustierten Performance-Maße.

*Lösungsskizze:*

(a) (i) Ein Funktional $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heißt monetäres Risikomaß, falls:

(1) *Inverse Monotonie:* Ist $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle Szenarien $\omega \in \Omega$, so gilt $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

(2) *Cash-Invarianz:* Für jede reelle Zahl $m$ gilt $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

Eigenschaft (1) besagt, dass die Risikokennziffer für eine Position $Y$ kleiner als die Risikokennziffer einer Position $X$ ist, wenn $Y$ stets mindestens so viel wert ist wie $X$. Eigenschaft (2) bedeutet, dass Risikomaße auf einer monetären Skala messen: Wird zur Finanzposition $X$ das Kapital $m$ € hinzugefügt, so verringert sich das Risiko der Finanzposition $X+m$ um diesen Betrag.

(ii) Ein monetäres Risikomaß $\rho$ auf $\mathcal{X}$ heißt konvexes Risikomaß, falls es die Eigenschaft

$$\rho(\lambda X+(1-\lambda)Y) \leq \max\{\rho(X),\rho(Y)\} \quad \text{für } X,Y\in\mathcal{X} \text{ und } \lambda\in(0,1)$$

besitzt und damit ein konvexes Funktional ist:

$$\rho(\lambda X+(1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X)+(1-\lambda)\rho(Y) \quad \text{für } X,Y\in\mathcal{X} \text{ und } \lambda\in(0,1).$$

Die Eigenschaft der Konvexität bedeutet, dass ein Risikomaß ökonomisch sinnvolle Diversifikation nicht bestraft.

(b) (i) Der Average Value at Risk zum Niveau $\lambda\in(0,1)$ ist definiert durch

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) := \tfrac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\,d\alpha.$$

Hierbei handelt es sich um ein kohärentes Risikomaß, also ein konvexes Risikomaß, das zusätzlich positiv homogen ist, welches per Konstruktion Risiko im gesamten Tail der Verteilung misst.

(ii) Es gilt $\mathrm{V@R}_\alpha(X) = -\mu-\Phi^{-1}(\alpha)\,\sigma$, $\alpha\in(0,1)$, also

$$\mathrm{V@R}_{0,1}(X) = -\mu-\Phi^{-1}(0,1)\,\sigma = -100-(-1,2816)\cdot 3 = -96,1553.$$

Mit dem Hinweis folgt zudem

$$\begin{aligned}\mathrm{AV@R}_\lambda(X) &= \tfrac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\,d\alpha = -\mu+\left(\tfrac{1}{\lambda}\int_0^\lambda -\Phi^{-1}(\alpha)\,d\alpha\right)\sigma \\ &= -\mu+\left(\tfrac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\lambda)} -x\varphi(x)\,dx\right)\sigma = -\mu+\tfrac{1}{\lambda}\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))\sigma,\end{aligned}$$

also

$$\mathrm{AV@R}_{0,1}(X) = -100+\tfrac{1}{0,1}\varphi(\Phi^{-1}(0,1))\cdot 3 = -94,7351.$$

Es gilt $\mathrm{AV@R}_{0,1}(X) > \mathrm{V@R}_{0,1}(X)$, da der Average Value at Risk das Risiko im gesamten Tail der Verteilung berücksichtigt.

(c) Der Tail Value at Risk zum Niveau $\lambda\in(0,1)$ einer Finanzposition $X$ ist definiert durch

$$\mathrm{TV@R}_\lambda(X) := \mathrm{E}[-X \mid -X > \mathrm{V@R}_\lambda(X)].$$

Er entspricht somit dem bedingten erwarteten Verlust gegeben, dass der Verlust $-X$ den Value at Risk $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ überschreitet, und besitzt somit eine klare ökonomische Interpretation. Insbesondere werden - im Gegensatz zum Value at Risk - Verluste im Tail gemessen.

(d) Gebräuchliche Kennzahlen in der externen Berichterstattung wie z. B. Return on Equity (ROE) stellen reine Ertragsmaßstäbe dar. Risikoadjustierte Performance-Maße setzen den Return in Relation zu dem dafür eingegangenen Risiko.

**Aufgabe 8.** *[Markowitz-Ansatz, effiziente Portfolios] [17 Punkte]*

(a) *[9 Punkte]* Gegeben seien zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen $R_1$ und $R_2$. Für den Korrelationskoeffizienten gelte $-1 < \rho(R_1, R_2) < 1$.

  (i) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie zunächst die Größe $x_{MVP}$, wobei $(x_{MVP}, 1-x_{MVP})$ die Investmentgewichte des global varianzminimalen Portfolios bezeichnen!

  (ii) *[1 Punkt]* Begründen Sie, warum der erhaltene Ausdruck für $x_{MVP}$ wohldefiniert ist!

  (iii) *[3 Punkte]* Welchen Wert muss $\rho(R_1, R_2)$ annehmen, sodass $x_{MVP}$ einen vorgegebenen Wert $x_0$ annimmt, d. h. $x_{MVP} = x_0$ gilt?

  (iv) *[1 Punkt]* Für welchen Wert von $x_0$ besitzt die Aufgabenstellung (iii) keine wohldefinierte Lösung?

(b) *[5 Punkte]* Gegeben sei nun ein Portfolio aus zwei Aktien, deren Renditen $R_1$ und $R_2$ perfekt positiv korreliert sind, d. h. für den Korrelationskoeffizienten gilt $\rho = 1$. Es sei weiterhin $\sigma(R_1) = \sigma_1$ und $\sigma(R_2) = \sigma_2$. Unterstellen Sie, dass $\sigma_1 < \sigma_2$ gilt. Leerverkäufe bei der Portfoliobildung sind erlaubt.

  (i) *[4 Punkte]* Welche *Investmentgewichte* weist das global varianzminimale Portfolio in diesem Fall auf? Sind Leerverkäufe erforderlich?

  *Hinweis:* Im Fall, dass Leerverkäufe zulässig sind, kann in der vorliegenden Konstellation eine Portfoliovarianz in Höhe von null erreicht werden.

  (ii) *[1 Punkt]* Es existiere nun eine Anlage mit einer sicheren Verzinsung in Höhe von $r_0$. Welche Rendite weist dann das varianzminimale Portfolio aus Aufgabenteil (i) auf? Begründen Sie Ihre Aussage!

(c) *[3 Punkte]* Gegeben seien drei Aktien A, B und C. Man fixiere den Erwartungswert der Portfoliorendite $R_P$, d. h. es gilt $\mathrm{E}[R_P] = r$. Auf der Basis einer Lagrange-Optimierung ergeben sich die folgenden Investmentgewichte des korrespondierenden (lokal) varianzminimalen Portfolios:

$$x_A = 1/3, \; x_B = 4/3 - 5r, \; x_C = 5r - 2/3.$$

Für welche Werte von $r$ ist der Ausschluss von Leerverkäufen (No Short Sales) gewährleistet?

*Lösungsskizze:*

(a) Es bezeichne $R = xR_1 + (1-x)R_2$ die Rendite eines beliebigen Portfolios aus den beiden Aktien. Es seien ferner $\sigma^2 := \mathrm{Var}(R)$, $\sigma_1^2 := \mathrm{Var}(R_1)$, $\sigma_2^2 := \mathrm{Var}(R_2)$, $\rho := \rho(R_1, R_2)$.

Es gilt damit

$$\sigma^2 = \sigma^2(x) = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2\rho x(1-x)\sigma_1\sigma_2.$$

(i) Bestimmung der varianzminimalen Position:

$$0 = \frac{d\sigma^2}{dx} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 4x\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Es folgt

$$2x\sigma_1^2 + 2x\sigma_2^2 - 4x\rho\sigma_1\sigma_2 = 2\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

und damit

$$x_{MVP} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

(ii) Es gilt $\mathrm{Var}(R_1 - R_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$. Es gilt $\mathrm{Var}(R_1 - R_2) > 0$, wenn $R_1 - R_2$ eine nicht-degenerierte Zufallsgröße ist, d. h. es gilt nicht $R_1 - R_2 = c$ bzw. $R_1 = R_2 + c$. Der letzte Ausdruck impliziert, dass $R_1$ und $R_2$ linear abhängig sind. Dies ist ausgeschlossen, da nach Voraussetzung $|\rho| < 1$ gilt.

(iii) Aus $x_{MVP} = x_0$ folgt

$$\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 = x_0(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)$$

bzw.

$$2\rho x_0\sigma_1\sigma_2 - \rho\sigma_1\sigma_2 = x_0\sigma_1^2 + x_0\sigma_2^2 - \sigma_2^2.$$

Damit gilt insgesamt

$$\rho = \frac{x_0\sigma_1^2 - (1-x_0)\sigma_2^2}{(2x_0 - 1)\sigma_1\sigma_2}.$$

(iv) Offenbar für $x_0 = 1/2$.

(b) (i) Die Portfoliovarianz $\sigma_P^2$ lautet im Fall $\rho = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= x\sigma_1^2 + (1-x)\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2 \\ &= (x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2)^2. \end{aligned}$$

Nach Hinweis ist die varianzminimale Position gegeben durch $\sigma_P^2 = 0$. Hieraus folgt:

$$x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 = 0$$

und somit:

$$x = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}$$
$$1 - x = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

Fazit: Die Aktie 2 ist leer zu verkaufen.

<u>Alternativ:</u> Bestimmung des varianzminimalen Portfolios über

$$0 = \tfrac{d\sigma^2}{dx} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 4x\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Mit $\rho = 1$ folgt hieraus

$$x = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

(ii) Das varianzminimale Portfolio aus (i) weist eine Renditevarianz von null auf. Damit ist das varianzminimale Portfolio eine sichere Anlage. Dessen Rendite muss der sicheren Verzinsung $r_0$ entsprechen, denn aus Gründen der Arbitragefreiheit (Law of One Price) ist die sichere Verzinsung eine eindeutig bestimmte Größe.

(c) Es muss gelten $x_A \geq 0$, $x_B \geq 0$ sowie $x_C \geq 0$.

Für $x_A$ ist dies erfüllt. Weiter gilt:

$$x_B \geq 0 \Leftrightarrow r \leq 4/15$$
$$x_C \geq 0 \Leftrightarrow r \geq 2/15.$$

Damit ist die Nichtnegativitätsbedingung für $2/15 \leq r \leq 4/15$ gewährleistet.

**Aufgabe 9.** *[Portfoliotheorie mit sicherer Anlage und CAPM] [13 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Der effiziente Rand einer Menge von vorgegebenen riskanten Anlagen ist gegeben durch ($h > 0$, $\sigma \geq \sigma_{MVP}$)

$$\mu = \mu_{MVP} + \sqrt{h(\sigma^2 - \sigma^2_{MVP})}.$$

Dem Investor steht zusätzlich eine risikolose Anlage zum Zins $r_0$ zur Verfügung. Das resultierende Tangentialportfolio besitze die Koordinaten $(\sigma_T, \mu_T)$ im $(\sigma, \mu)$-Raum. Der Investor möchte nun ein effizientes Portfolio $P$ mit $\mathrm{E}[R_P] = \mu_0$ realisieren.

(i) *[1 Punkt]* Welche grundsätzliche Struktur muss dieses Portfolio besitzen?

(ii) *[3 Punkte]* Welche Investmentgewichte für $P$ ergeben sich aus (i)?

(b) *[3 Punkte]* Welchem Portfolio entspricht das Tangentialportfolio im Kapitalmarktgleichgewicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

*Hinweis:* Eine rein verbale Begründung genügt.

(c) *[6 Punkte]* Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die Koordinaten des effizienten Rands:

$$\mu = \frac{1}{10} + \sqrt{\frac{1}{40}\left(\sigma^2 - \frac{1}{15}\right)}.$$

Unter Berücksichtigung einer V@R-Restriktion resultiert ein optimales Portfolio mit den $(\mu, \sigma)$-Koordinaten $(0,1483; 0,4)$.

Gehen Sie nun davon aus, dass zusätzlich ein risikoloses Investment existiert. Wie hoch muss der zugehörige risikolose Zins sein, damit das zuvor ermittelte Portfolio unverändert das optimale Portfolio ist?

*Lösungsskizze:*

(a) (i) Es bezeichne $R_T$ die Rendite des Tangentialportfolios $T$. Es muss dann gelten

$$R_P = xr_0 + (1-x)R_T.$$

(ii) Hieraus erhalten wir

$$\mathrm{E}[R_P] = xr_0 + (1-x)\mathrm{E}[R_T]$$

bzw.

$$\mu_P = xr_0 + (1-x)\mu_T = x(r_0 - \mu_T) + \mu_T$$

Aus der Bedingung $\mu_P = \mu_0$ erhalten wir

$$x(r_0 - \mu_T) + \mu_T = \mu_0$$

und damit insgesamt

$$x = \frac{\mu_0 - \mu_T}{r_0 - \mu_T} = \frac{\mu_T - \mu_0}{\mu_T - r_0}$$

sowie

$$1 - x = \frac{\mu_0 - r_0}{\mu_T - r_0}.$$

(b) Im Kapitalmarktgleichgewicht sind Nachfrage und Angebot ausgeglichen. Das (rein riskante) Nachfrageportfolio ist das Tangentialportfolio, das (rein riskante) Angebotsportfolio ist das Marktportfolio. Im Kapitalmarktgleichgewicht entspricht somit dem Tangentialportfolio gerade das Marktportfolio.

(c) Die Effizienzgerade bei Berücksichtigung einer risikolosen Anlage zum Zins $r_0$ ist gegeben durch die Tangente von $(0, r_0)$ an den bisherigen effizienten Rand. Die entsprechende Steigung lautet

$$\tfrac{d\mu}{d\sigma} = \left[\tfrac{1}{40}\left(\sigma^2 - \tfrac{1}{15}\right)\right]^{-1/2}(\sigma/40) = \left(\sigma^2 - \tfrac{1}{15}\right)^{-1/2}(\sigma/\sqrt{40}).$$

Auswertung in $\sigma = 0,4$ ergibt

$$\tfrac{d\mu}{d\sigma}(0,4) = 0,207.$$

Dies entspricht zugleich der Steigung $\alpha$ der Effizienzgeraden $\mu = r_0 + \alpha\sigma$. Damit das Portfolio optimal bleibt, d. h. dem Tangentialportfolio entspricht, folgt hieraus die Bedingung

$$0,1483 = r_0 + (0,207)(0,4).$$

Hieraus resultiert insgesamt

$$r_0 = 0,1483 - 0,0828 = 0,0655 \ (6,55\%).$$