Prüfungsbericht FIMA I 2019

<u>Aufgabe 1:</u> (24 min)

a) Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt mit zwei Zuständen, der aus zwei Wertpapieren bestehe, einer sicheren Anlage zum Zins 5% sowie einem risikobehafteten Wertpapier. Das Wertpapier weise einen anfänglichen Preis von 75 Geldeinheiten auf und den Rückflussvektor $(105, 55)^T$ in t = 1.

i) Bestimmen Sie die State Space-Matrix V und den anfänglichen Preisvektor w!

ii) Weisen Sie nach, dass der vorstehend spezifizierte State Space-Markt arbitragefrei ist! Wie lautet der preiserzeugende Vektor?

iii) Bestimmen Sie die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten!

iv) Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis des Finanztitels $(c^2, c)^T$ auf der Basis einer **risikoneutralen Bewertung**!

v) Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis des Finanztitels $(c, c^2)^T$, wobei c = 5, durch **Duplikation**!

vi) Wie lauten die arbitragefreien Preise der Finanztitel mit den Rückflussvektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$. Argumentieren Sie hier grundsätzlich, d.h. ohne Vornahme einer konkreten Berechnung!

(12 min)

b) Gegeben sei nun ein allgemeiner einperiodiger State Space-Markt mit s Zuständen und n+1 Finanztiteln. Der Markt sei vollständig. Der Finanztitel 0 entspreche dabei der risikolosen Anlage zum sicheren Zins r. Der preiserzeugende Vektor $w^* = (w_1^*, \ldots, w_s^*)^T$ des State Space-Markts existiere und sei strikt positiv.

i) Weisen Sie nach, dass $\sum_{i=1}^{s} q_i = 1$ gilt.

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie die Beziehung $V^T w^* = w$, wobei w dem Preisvektor der Finanztitel des Marktes entspricht und V die State Space-Matrix ist.

ii) Bestimmen Sie den Preis des Finanztitels, dessen Rückflussvektor $C = (c_1, \ldots, c_s)^T$ in t=1 dem ersten Einheitsvektor entspricht ($c_1 = 1$, $c_j = 0$ für $j \neq 1$) durch **risiko-neutrale Bewertung**! Interpretieren Sie das Ergebnis!

iii) Bestimmen Sie den Preis des i-ten Einheitsvektors ($c_i = 1$, $c_j = 0$ für $j \neq i$) durch **Duplikation**!

(12 min)

Lösung Aufgabe 1:

Aufgabenteil a)

i) $V = \begin{pmatrix} 1{,}05 & 105 \\ 1{,}05 & 55 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 75 \end{pmatrix}$

ii) Betrachte LGS $V^T x = w$, d.h.

(I) $1{,}05x_1 + 1{,}05x_2 = 1$

(II) $105x_1 + 55x_2 = 75$

Multiplikation von (I) mit 100 ergibt

(I`) $105x_1 + 105x_2 = 100$

(I`)-II) ergibt $50x_2 = 25$, d.h. $x_2=1/2$.

Aus (I) folgt dann

$$x_1 = \frac{1 - (1{,}05)(0{,}5)}{1{,}05} = \frac{1}{1{,}05} - 0{,}5$$

$$= 0{,}952381 - 0{,}5 = 0{,}452381$$

Die Lösung des LGS ist <u>strikt</u> positiv, damit ist der Markt arbitragefrei.

iii) $q_1 = 1{,}05x_1 = 0{,}475$

$q_2 = 1{,}05x_2 = 0{,}525$

iv) Preis auf Basis risikoneutraler Bewertung lautet

$$\frac{1}{1.05} E_Q\left[\begin{pmatrix} c^2 \\ c \end{pmatrix}\right] = \frac{0{,}475c^2 + 0{,}525c}{1{,}05}$$

v) Betrachte LGS

$$x_1\begin{pmatrix} 1{,}05 \\ 1{,}05 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 105 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix},$$

d.h.

(I) $1{,}05x_1 + 105x_2 = 5$

(II) $1{,}05x_1 + 55x_2 = 25$

(I)-(II) $50x_2 = -20$, $x_2 = -2/5$

Weiter:

$1{,}05x_1 = 5 + 105(2/5) = 5 +42 = 47$

$x_1 = 44.762$

Preis: 44.762 + 75 (-0,4) = 14.76.

vi) Die arbitragefreien Preise der Einheitsvektoren entsprechen den Lösungen des Gleichungssystems unter ii), d.h. 0.45238 sowie 0.5.

Aufgabenteil b)

i) Die erste Zeile von V^T ist gegeben durch den Vektor (1 + r)(1, …, 1) und die erste Zeile von w ist gegeben durch den Skalar 1. Die erste Zeile des Gleichungssystems $V^T w^* = w$ lautet somit $(1+r)\sum_{i=1}^{n} w_i^* = 1$ und damit gilt $\Sigma q_i = 1$.

ii) $$w_C = \frac{1}{1+r} E_Q[C] = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{s} c_j \, q_j$$
$$= \frac{1}{1+r} c_1 q_1 = \frac{1}{1+r}(1+r) w_1^* = w_1^* .$$

Der arbitragefreie Preis des ersten Einheitsvektors entspricht dem ersten Wert des preiserzeugenden Vektors.

iii) Da der State Space-Markt vollständig ist, d.h. die Matrix V den Rang s hat, lässt sich jeder (s,1)-Vektor als Linearkombination darstellen, d.h. es gibt einen Portfoliovektor x mit $Vx = e_i$, wobei $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$ dem i-ten Einheitsvektor entspricht. Der Preis dieses Portfolios ist gegeben durch

$$\Sigma x_i w_i = w^T x = (V^T w^*)^T x = w^{*T} V x$$
$$= w^{*T} e_i = w_i^* .$$

Aufgabe 2: (24 min)

a) Ein fünfjähriger Standardbond ist charakterisiert durch die Zahlungsreihe {Z, Z, Z, Z, Z+N} seiner Zins- und Tilgungszahlungen. Dabei bedeute N den Nennwert des Bonds und Z = Ni die Höhe der jeweiligen Zinszahlungen, wobei i den Nominalzins des Bonds bezeichne.

i) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für den fairen Wert des Bonds unter Benutzung der geometrischen Summe, wenn ein fristigkeitsunabhängiger Markt zins in Höhe von r zu Grunde gelegt wird!

ii) Weisen Sie auf der Grundlage von a) nach, dass im Falle r = i der faire Wert des Bonds seinem Nennwert entspricht (Pari-Notierung)!

iii) Bestimmen Sie den fairen Wert des Bonds zum Zeitpunkt s, wobei $0 < s < 5$.

iv) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die effektive Rendite (Baldwin-Verzinsung) des Bonds bei Annahme der Wiederanlage der Rückflüsse zum Marktzins r und einem Kaufpreis von P_0! Benutzen Sie dabei die geometrische Summe.

(12 min)

b) i) Bestimmen Sie den Barwert einer ewigen (unbegrenzte Restlaufzeit) Anleihe mit konstanter Kuponzahlung $Z = Ni$! Gehen Sie dabei von einem fristigkeitsunabhängigen Marktzins r aus.

<u>Hinweis:</u> Bei endlicher Laufzeit T gilt für den Kuponbond die Barwertformel

$$P_0(r, T) = N[\frac{i}{r} + (1 - \frac{i}{r})(1 + r)^{-T}].$$

ii) Welchen Wert nimmt die Macaulay-Duration der ewigen Kuponanleihe unter i) an?

iii) Welchen Wert nimmt die (relative) Konvexität der ewigen Kuponanleihe unter i) an?

(12 min)

<u>Lösung Aufgabe 2:</u>

a) i) Definiere den Aufzinsungsfaktor durch $q := 1 + r$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} P_0(r) &= Zq^{-1} + Zq^{-2} + Zq^{-3} + Zq^{-4} + Zq^{-5} + Nq^{-5} \\ &= Zq^{-5}(q^4 + q^{3} + q^2 + q + 1) + Nq^{-5} \\ &= \frac{Z}{q^5}\left(\frac{q^5 - 1}{q - 1}\right) + Nq^{-5} \\ &= \frac{Z}{r}\left(1 - \frac{1}{q^5}\right) + Nq^{-5} \end{aligned}$$

<u>Alternativ:</u> $(v := q^{-1})$

$$\begin{aligned} P_0(r) &= Z(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5) + Nv^5 \\ &= Z\,v(1 + v + v^2 + v^3 + v^4) + Nv^5 \\ &= Z\,v\,\frac{1 - v^5}{1 - v} + Nv^5 \end{aligned}$$

ii) Für Z = N i und r = i folgt aus i)

$$P_0(i) = N\left(1 - \frac{1}{q^5}\right) + Nq^{-5} = N$$

iii) $P_s(r) = (1 + r)^s\, P_0(r) = q^s\, P_0(r)$

iv) Es muss gelten

$$\begin{aligned} P_0(1 + r_{eff})^5 &= Zq^4 + Zq^3 + \ldots + Z + N \\ &= Z(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) + N \\ &= Z\,\frac{q^5 - 1}{q - 1} + N \end{aligned}$$

und damit

$$r_{eff} = \sqrt[5]{\left(Z\frac{q^5 - 1}{r} + N\right) / P_0} - 1$$

b) i) Betrachte $\lim_{T\to\infty} P_0(r,T)$. Es gilt

$$\lim_{T\to\infty} P_0(r,T) = \frac{Ni}{r} = \frac{Z}{r}$$

ii) Es gilt zunächst:

$$dP_0/dr = -Z\, r^{-2}$$

Hieraus folgt für die absolute Duration D_A:

$$D_A(r) = -dP/dr_0 = Z\, r^{-2}$$

Für die Macaulay-Duration folgt hieraus:

$$D(r) = (1 + r)\,\frac{D_A(r)}{P_0} = (1 + r)\,\frac{Z}{r^2}\cdot\frac{r}{Z}$$

$$= \frac{1 + r}{r}\,.$$

iii) Es gilt $C(r) = P_0''(r)/\, P_0(r)$.

Nach ii) folgt $P_0''(r) = d(-Z\, r^{-2})/dr = 2Z\, r^{-3}$.

Damit gilt insgesamt:

$$C(r) = 2\,\frac{Z}{r^3}\;\frac{r}{Z} = \frac{2}{r^2}$$

<u>Aufgabe 3:</u> (26 min)

a) Ein anfänglicher Kreditbetrag der Höhe S_0 soll mit gleichhohen <u>nachschüssigen</u> Zahlungen A (Annuität) in n Jahren inklusive aufgelaufener Zinsen getilgt werden. Der als fristigkeitsunabhängig angenommene Kreditzins beträgt r.
Weisen Sie nach, dass die Annuität A gegeben ist durch

$$A = S_0 \frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1}$$

(3 min)

b) Vorgegeben seien nunmehr die Größen S_0 , A und r. bestimmen Sie die erforderliche Kreditlaufzeit n.

(5 min)

c) Weisen Sie nach, dass für t = 1, …, n die Restschuld RS_t am Ende der jeweiligen Periode gegeben ist durch

$$RS_t = S_0 \frac{q^n - q^t}{q^n - 1}.$$

<u>Hinweis:</u> Gehen Sie von dem Ansatzpunkt aus, dass in einem vollkommenen Kapitalmarkt sich die Restschuld zum Zeitpunkt t als Differenz der aufgezinsten Schuld bis t und der aufgezinsten Annuitätenzahlungen der Teilaufgabe a) bis zum Zeitpunkt t ergeben muss.

(8 min)

d) Aktuarin ZZ schließt nun im Alter x (definitionsgemäß t=0) eine Risikolebensversicherung ab, deren Auszahlung im Todesfall sich kongruent zur Restschuld nach Teilaufgabe c) entwickelt. Stellen Sie den Leistungsbarwert LBW_{DRL} dieser Versicherung in Abhängigkeit von der gestutzten Lebensdauer $CT = CT_x$ dar!
Bestimmen Sie den korrespondierenden <u>erwarteten</u> Leistungsbarwert. Verwenden Sie dabei die Größe ${}_{t|}q_x$!

(10 min)

<u>Lösung Aufgabe 3:</u>

a) Barwert der nachschüssigen Rückzahlungen (q = 1 + r)

$$Aq^{-1} + Aq^{-2} + \ldots + Aq^{-n}$$

$$= Aq^{-n}(q^{n-1} + \ldots + q + 1) = A\frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

Damit gilt

$$S_0 = A \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

und hieraus folgt

$$A = S_0 \frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1}$$

b) Für die Annuität gilt zunächst

$$A = S_0 \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1} = \frac{S_0 r}{1 - q^{-n}} .$$

Hieraus folgt

$$A - Aq^{-n} = S_0 r$$

und weiter

$$q^n = \frac{A}{A - S_0 r}$$

sowie

$$n \ln q = \ln(A) - \ln(A - S_0 r)$$

und schließlich

$$n = \frac{\ln(A) - \ln(A - S_0 r)}{\ln q} .$$

c) Nach Hinweis gilt ($q = 1 + r$)

$$\begin{aligned}
RS_t &= S_0 q^t - A (q^{t-1} + \dots + q + 1) \\
&= S_0 q^t - A \frac{q^t - 1}{q - 1} \\
&= S_0 q^t - S_0 \frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1} \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \\
&= S_0 \left[q^t - \frac{q^n(q^t - 1)}{q^n - 1} \right] \\
&= S_0 \frac{q^t (q^n - 1) - q^n (q^t - 1)}{q^n - 1} \\
&= S_0 \frac{q^n - q^t}{q^n - 1}
\end{aligned}$$

d) Ist t der Todeszeitpunkt, so erfolgt eine Zahlung der Höhe RS_t. Der Todeszeitpunkt in Termen der gestutzten Lebensdauer entspricht $CT + 1$. Damit ist für $CT = 0, \dots, n-1$ der Barwert der Zahlung in $t = CT + 1$ gegeben durch

$$RS_{CT+1} \cdot q^{-(CT+1)} = S_0 \frac{q^n - q^{CT+1}}{q^n - 1} q^{-(CT+1)}$$

$$= S_0 \frac{q^{n-(CT+1)} - 1}{q^n - 1} = S_0 \frac{q^{n-1-CT} - 1}{q^n - 1}$$

Insgesamt gilt

$$LBW = \begin{cases} S_0 \dfrac{q^{n-1-CT} - 1}{q^n - 1} & CT = 0,\ldots, n - 1 \\ 0 & CT \geq n \end{cases}$$

und ferner

$$E(LBW) = \frac{S_0}{q^{n-1}} \sum_{t=0}^{n-1} (q^{n-1-t} - 1)\, P(CT = t)$$

$$= \frac{S_0}{q^{n-1}} \sum_{t=0}^{n-1} (q^{n-1-t} - 1)\ {}_{t|}q_x$$

<u>Aufgabe 4:</u> (16 min)

a) Betrachten Sie eine binäre Put-Option mit dem folgenden Auszahlungsprofil: Notiert der Basiswert am Ende der Laufzeit auf oder unter dem Schwellenwert X = 100, so erhält der Käufer der Option den fixen Betrag N. Ansonsten verfällt die Option wertlos.

Unterstellen Sie für die Kursentwicklung des Basistitels einen einperiodigen Binomialprozess mit Startwert $s_0 = 100$ sowie einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 15% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 10 %. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage r = 1%.

i) Skizzieren Sie zunächst die Entwicklung des Basistitels sowie der Option!

ii) Bestimmen Sie auf der Basis des **Duplikationsprinzips** den arbitragefreien Preis in t = 0 der einperiodigen binären Put-Option mit X = 100 und N = 1. Geben Sie **explizit** die zuggrundeliegende Duplikationsstrategie an.

iii) Bestimmen Sie auf der Basis des **Duplikationsprinzips** den arbitragefreien Schlussabrechnungspreis F_0 eines einperiodigen Forward auf den Basistitel. Interpretieren Sie das Ergebnis!

(6 min)

b) Versicherungsunternehmen BBB verkauft eine einjährige aktienindexgebundene Lebensversicherung zur Gesamtprämie EUR 20 000 an einen x-jährigen Kunden. Die Modalitäten der Versicherung in Bezug auf den Erlebensfall lauten wie folgt:
Es wird eine Rückzahlung der Gesamtprämie garantiert. Im Falle einer **negativen** DAX-Entwicklung erhält der Versicherte einen Bonus von 50% auf die einjährige DAX-Rendite bezogen auf einen maßgeblichen Investitionsbetrag in Höhe von EUR 19 000.

Das Unternehmen sieht sich der folgenden Anlagesituation in t = 0 gegenüber: Es herrscht ein sicherer Zins von 5%, der DAX steht bei 9 500 und einjährige DAX-Puts mit einem Ausübungspreis von 9 500 weisen eine Optionsprämie von EUR 520 auf.

i) Wie lautet das Leistungsprofil der Erlebensfallleistung in t = 1?

ii) Welche Option ist in diesem Leistungsprofil eingebettet?

iii) Wie lautet der marktkonsistente Wert dieses Leistungsprofils in t = 0?

iv) Welche faire Prämie resultiert hieraus?

v) Welcher Betrag verbleibt dem Unternehmen zur Deckung einer Todesfallleistung und von Betriebskosten?

(4 min)

c) Alternativ wird – bei gleichen Kapitalmarktbedingungen – das Leistungsprofil der aktienindexgebundenen Lebensversicherung im Erlebensfall unter b) wie folgt festgelegt:
Auf einen Betrag in Höhe von EUR 19 000 wird eine garantierte Mindestverzinsung von 4% gewährt. Alternativ kommt im Falle einer **positiven** DAX-Entwicklung eine 50%-ige Partizipation, bezogen auf einen maßgeblichen Investitionsbetrag von EUR 19 000 zum Zuge – jedoch nur, wenn dies zu einer höheren Auszahlung führt.

i) Wie lautet das Leistungsprofil der Erlebensfallleistung in t = 1?

ii) Welche Option ist in diesem Leistungsprofil eingebettet?

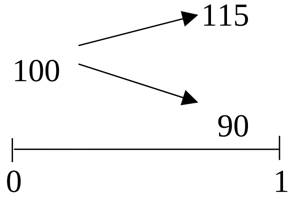
iii) Wie lautet der marktkonsistente Wert dieses Leistungsprofils in t = 0?

(6 min)

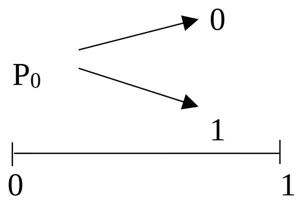
<u>Lösung Aufgabe 4:</u>

<u>Aufgabenteil a)</u>

i) Entwicklung Basistitel:



Entwicklung Option:



ii) Duplikation:

(I) $1{,}01x_1 + 115x_2 = 0$

(II) $1{,}01x_1 + 90x_2 = 1$

(I)-(II): $25x_2 = -1$, $x_2 = -1/25 = -0.04$

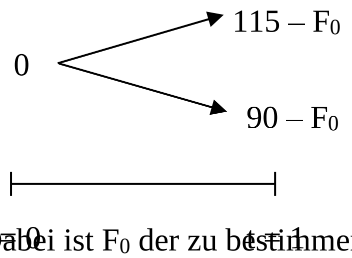
(I): $x_1 = 4.5545$

Arbitragefreier Preis:

$$1 \cdot x_1 + 100x_2 = 0.5545.$$

<u>Duplikationsstrategie in t = 0:</u> 0.04 Aktien (short) und riskolose Anlage des Betrags 4.5545.

iii) Für die Forwardposition gilt aus Sicht des Investors:



Dabei ist F_0 der zu bestimmende Forwardpreis. Erwirbt der Investor x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition damit die folgenden Bedingungen:

$100x + y = 0$	(t = 0)
$115x + 1.01\,y = 115 - F_0$	(t = 1, Fall a)
$90x + 1.01\,y = 90 - F_0$	(t = 1, Fall b)

Aus (II) – (III) folgt x = 1 und damit y = -100. Aus (II) und (III) folgt damit jeweils $F_0 = 101$, d.h. der Forwardpreis entspricht dem zum sicheren Zins aufgezinsten heutigen Wert des Basistitels (Cost-of-Carry-Preis).

Aufgabenteil b):

i) Rückzahlungsprofil in $t = 1$ ($DAX(0) = 9500$)

$$L_1 = \max\{20000,\ 20000 - 19000 \cdot 0.5\ \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\}$$

$$= \max\{20000,\ 20000 + 9500 - DAX(1)\}$$

ii) $L_1 = 20000 + \max\{9500 - DAX(1),\ 0\}$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Put mit Ausübungspreis $X = 9500$.

iii) $L_1 = 20000(1.05)^{-1} + 520$

$= 19047.62 + 520 = 19567.62$

iv) $19567.62 \cdot p_x$

v) $20000 – 19567.62 \cdot p_x$

Aufgabenteil c):

i) Rückzahlungsprofil in $t = 1$

$$L_1 = \max\{1.04 \cdot 19000,\ 19000 + 19000 \cdot 0.5\ \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\}$$

$$= \max\{19760,\ 19000 + (DAX(1) - 9500)\}$$

ii) Zerlegung des Rückzahlungsprofils:

$L_1 = 19760 + \max(0,\ DAX(1) - 9500 - 760)$

$= 19760 + \max(DAX(1) - 10260,\ 0)$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Call mit einem Ausübungspreis in Höhe von $X = 10260$.

iii) Fairer Wert L_0 in $t = 0$:

$L_0 = 19760(1.05)^{-1} + C_0(10260) = 18819.05 + C_0(10260)$.

Dabei bezeichnet $C_0(10260)$ den Marktpreis eines einjährigen DAX-Calls mit Ausübungspreis $X = 10260$ in $t = 0$.