DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Wertorientiertes Risikomanagement

gemäß Prüfungsordnung 3
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 13. Oktober 2018

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 90 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 45 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht (inklusive dieses Deckblattes) aus 6 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl,
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

Aufgabe 1. *[23 Punkte]*

Die Stand-alone-Versicherung AG ist ein eigenständiger Sachversicherer. Zum 31.12.2017 hat das Unternehmen die folgenden Bilanzen (HGB und ökonomisch) veröffentlicht:

HGB-Bilanz per 31.12.2017				**ökonomische Bilanz per 31.12.2017**			
Aktiva		**Passiva**		**Aktiva**		**Passiva**	
Aktien	80	Eigenkapital	100	Aktien	100	Eigenkapital	160
festverzinsliche Wertpapiere	300	versicherungs-technische Rück-stellungen	260	festverzinsliche Wertpapiere	290	versicherungs-technische Rück-stellungen	200
Forderungen	20	Pensionsrück-stellungen	30	Forderungen	20	Pensionsrück-stellungen	40
sonstige Aktiva	20	sonstige Passiva	30	sonstige Aktiva	20	sonstige Passiva	30
Summe	420	**Summe**	420	**Summe**	430	**Summe**	430

Im veröffentlichten Risikobericht schreibt die Stand-alone-Versicherung AG, dass sie ein internes Simulationsmodell zur Quantifizierung ihrer Risiken auf Basis einer ökonomischen Bewertung einsetzt. Es werden aus 1000 Simulationen die 10 schlechtesten Resultate für das ökonomische Ergebnis explizit angegeben:

	x-schlechtestes Ergebnis Positive Werte stellen Verluste dar.									
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Stand-alone-Versicherung AG	40	55	80	100	120	130	140	160	180	275

(a) *[4 Punkte]* Geben Sie mögliche Gründe für die wertmäßigen Unterschiede zwischen den folgenden Bilanzpositionen der HGB-Bilanz und der ökonomischen Bilanz an:

(i) Aktien

(ii) festverzinsliche Wertpapiere

(iii) versicherungstechnische Rückstellungen

(iv) Pensionsrückstellungen

(b) *[3 Punkte]* Die Stand-alone-Versicherung AG verwendet als Risikomaß $1,25 \cdot ES_{0,99}$, also das 1,25-fache des Expected Shortfall zum Niveau 99,0%.

(i) Geben Sie einen möglichen Grund dafür an, dass das Unternehmen ein relativ geringes Niveau von 99,0% wählt und dafür den 1,25-fachen Expected Shortfall als Risikomaß ansetzt.

(ii) Berechnen Sie das benötigte Risikokapital per 31.12.2017.

(c) *[1 Punkt]* Im Jahr 2016 betrug das ökonomische Eigenkapital der Stand-alone-Versicherung AG noch 240 Mio. Euro. Innerhalb des Jahres 2017 gab es allerdings eine Dividendenausschüttung in Höhe von 10 Mio. Euro sowie einen Aktienrückkauf in Höhe von 90 Mio. Euro. Wie hoch war der ökonomische Nettogewinn des Geschäftsjahres 2017?

(d) *[3 Punkte]* Im Rahmen einer wertorientierten Steuerung setzt das Unternehmen für das vorgegebene Sicherheitsniveau eine Hurdle-Rate von 10% an. Berechnen Sie unter Verwendung des benötigten Risikokapitals per 31.12.2017 den

(i) EVA für das Jahr 2017

(ii) RORAC für das Jahr 2017

Hat das Unternehmen im Jahr 2017 Wert geschaffen?

(e) *[4 Punkte]* Das Unternehmen hat die Berechnung von EVA und RORAC offensichtlich durchgeführt, ohne dabei zu überprüfen, ob das vorhandene Risikokapital auf ökonomischer Basis mit dem benötigten Risikokapital übereinstimmt. Nehmen Sie diese Überprüfung vor, indem Sie als vorhandenes Risikokapital für das Geschäftsjahr 2017 den Mittelwert der Jahresendwerte 2016 und 2017 ansetzen. Leiten Sie – unter Verwendung eines sicheren Zinses von 2% – für die tatsächliche Risikoposition eine passende Hurdle-Rate her. Wie verändern sich EVA bzw. RORAC, wenn man die Berechnungen mit der neuen Hurdle-Rate sowie dem vorhandenen Risikokapital durchführt?

(f) *[1 Punkt]* Was könnte der Grund für den Aktienrückkauf des Jahres 2017 gewesen sein?

(g) *[3 Punkte]* Die Gierig-Konzern AG, die bislang die beiden Unternehmen Wucher AG und Teuer AG besitzt, prüft aktuell im Rahmen einer Due Diligence die Stand-alone-Versicherung AG zu kaufen. Hierfür hat sie die Stand-alone-Versicherung AG in ihr internes Modell integriert und die folgenden Ergebnisse per 31.12.2017 erhalten:

Gesellschafts-Kombinationen	**benötigtes Risikokapital**
Gierig-Konzern	500
Wucher und Teuer	360
Wucher und Stand-alone	330
Teuer und Stand-alone	270
Wucher	250
Teuer	200
Stand-alone	160

Der Gierig-Konzern verwendet ebenfalls das Risikomaß $1,25 \cdot ES_{0,99}$ und alloziert das benötigte Risikokapital mittels des Shapley-Algorithmus auf die Tochtergesellschaften. Wie viel benötigtes Risikokapital würde die Stand-alone-Versicherung AG durch die Integration in den Konzern einsparen?

(h) *[4 Punkte]* Der Gierig-Konzern ermittelt den Kaufpreis für die Stand-alone-Versicherung AG mit Hilfe der Ertragswert-Methode. Bei dieser Methode wird der ökonomische Marktwert eines Unternehmens als Barwert der künftigen Aktionärserträge ermittelt.

(i) Bei der Kaufpreis-Berechnung unterstellt der Gierig-Konzern für einen unendlich langen Zeitraum einen jährlichen Aktionärsertrag in Höhe des EVA aus Aufgabenteil d). Zur Diskontierung wird ein Satz von 10% angesetzt. Berechnen Sie den Kaufpreis.

(ii) Durch die Eingliederung in den Gierig-Konzern und die damit verbundene Diversifikation würde sich der EVA aus Aufgabenteil d) durch den Ansatz des geringeren benötigten Risikokapitals aus Aufgabenteil g) verbessern. Um welchen Betrag würde sich dadurch der Unternehmenswert bei Verwendung der Ertragswertmethode verändern?

Aufgabe 2. *[12 Punkte]* Der ökonomische Wert der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten besteht aus dem Erwartungswert der künftigen Verpflichtungen und aus der Risikomarge.

(a) *[1 Punkt]* Welche Funktion erfüllt die Risikomarge?

(b) *[6 Punkte]* Nennen Sie zwei Konzepte zur Berechnung der Risikomarge und geben Sie zu jedem der Konzepte einen Vorteil und einen Nachteil an.

(c) *[5 Punkte]* An welcher Stelle geht der Wert der finanziellen Optionen und Garantien in die versicherungstechnischen Verbindlichkeiten ein? Nennen Sie zudem zwei Beispiele für finanzielle Optionen und Garantien und zu jedem Beispiel die Richtung der Wertänderung der Verbindlichkeiten, die ein Zinsanstieg verursacht.

Aufgabe 3. *[11 Punkte]* Die Länger-Lebensversicherungs AG untersucht im Rahmen ihres ORSA die Risiken, die mit einer extremen Euro-Krise verbunden wären (Ausfall einzelner Staatsanleihen im Euro-Raum sowie Austritt von Ländern aus der Euro-Zone).

(a) *[4 Punkte]* Nennen Sie mit jeweils kurzen Begründungen Risiken zu vier unterschiedlichen Risikoklassen nach Solvency II, die sich bei einer derart extremen Euro-Krise realisieren würden.

(b) *[3 Punkte]* Auf welche Art lässt sich das Risiko einer extremen Euro-Krise qualitativ bewerten, und wie würde man die Relevanz einstufen?

(c) *[4 Punkte]* Geben Sie zu jedem der von Ihnen unter Teilaufgabe a) genannten Risiken eine Maßnahme zur Risikoreduktion an.

Aufgabe 4. *[22 Punkte]*

(a) *[1 Punkt]* Geben Sie eine kurze Definition für betriebliche Altersversorgung an.

(b) *[16 Punkte]* Pensionskassen fallen als Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung nicht unter das Aufsichtsregime Solvency II. Grenzen Sie die für **Pensionskassen** geltenden Regelungen von denen für ein unter Solvency II fallendes **Lebensversicherungsunternehmen** ab.

Gehen Sie dabei genau auf die unten unter (i) - (vi) aufgeführten Aspekte ein.

Gehen Sie dabei für Pensionskassen schon von den Regelungen der Richtlinie (EU) 2016/2341 (EbAV-Richtlinie) aus, insoweit dort solche getroffen sind.

(i) für die Bestimmung der vorhandenen Eigenmittel maßgebliche Bilanz

(ii) Anrechenbarkeit von Eigenmitteln

(iii) Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen

(iv) Bestimmung der Solvenzkapitalanforderung

(v) einzurichtende Governance-Funktionen

(vi) Durchführung des ORSA

(c) *[5 Punkte]* Welche Adressaten werden bei den Berichtspflichten von Solvency II unterschieden? Welche Auskunftspflichten gegenüber welchen Stakeholdern sind in der EbAV-Richtlinie zusätzlich geregelt?

Aufgabe 5. *[22 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie Value-at-Risk und Tail-Value-at-Risk zum Niveau 0,99 von $Exp(\lambda)$, der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$.

Hinweis.

- $Exp(\lambda)$ hat die Verteilungsfunktion $1 - \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$.
- $\int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - x$

(b) *[10 Punkte]*

(i) *[4 Punkte]* Verifizieren Sie, dass die Funktion

$$C_\theta(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \theta(1 - u_1)(1 - u_2)), \quad u_i \in [0, 1],\ \theta \in [-1, 1].$$

eine Copula ist.

(ii) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie die obere Tailabhängigkeit von C_θ und erläutern Sie die Bedeutung des Ergebnisses.

Hinweis. Den Grenzwert können Sie mit der Regel von de l'Hospital oder als Ableitung berechnen.

(iii) *[2 Punkte]* Geben Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion von (X_1, X_2) an, wenn $X_1 \sim Exp(1)$ und $X_2 \sim Exp(2)$ gilt und die Abhängigkeitsstruktur durch $C_{0,5}$ gegeben ist.

(c) *[6 Punkte]* Ein Schadenversicherungsunternehmen modelliert die gemeinsame Verteilung der Verlustgrößen zweier Sparten (X_1, X_2) mittels der Copula $C_{0,5}$ und der Randverteilungen $X_1 \sim Exp(1)$ und $X_2 \sim Exp(2)$.

Das Unternehmen möchte die Angemessenheit des Parameters $\theta = 0,5$ wegen einer unzureichenden eigenen Datenbasis anhand von Beobachtungen aus einem externen Datenpool überprüfen. Der Datenpool stellt jedoch nicht die Originaldaten (x_{1i}, x_{2i}), $i = 1, \ldots, n$, zur Verfügung, sondern die mit den jeweiligen empirischen Randverteilungsfunktionen der einzelnen Datenlieferanten transformierten Daten (y_{i1}, y_{i2}), $i = 1, \ldots, n$. Genauer: Stammen die Beobachtungen (x_{1i}, x_{2i}), $i = m, m+1, \ldots, m+k$ von ein und demselben Datenlieferanten, so ermittelt der Datenpool die empirischen Verteilungsfunktionen G_1 der x_{1i}, $i = m, \ldots, m+k$ bzw. G_2 der x_{2i}, $i = m, \ldots, m+k$, und berechnet $(y_{1i}, y_{i2}) := (G_1(x_{i1}), G_2(x_{i2}))$, $i = m, \ldots, m+k$.

(i) *[2 Punkte]* Welchen Grund könnte die Transformation haben?

(ii) *[4 Punkte]* Geben Sie einen Punktschätzer für θ auf Basis dieser externen Daten an. Dabei können Sie **ohne** Nachweis die folgenden Beziehungen für die gemeinsame Verteilung von (X_1, X_2) nutzen:

- lineare Korrelation: $\varrho_{(X_1,X_2)} = \frac{\theta}{4}$
- Kendall's tau: $\tau_{(X_1,X_2)} = \frac{2\theta}{9}$
- Spearman's rho: $\rho_{S(X_1,X_2)} = \frac{\theta}{3}$

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1.

(a) Die folgenden Gründe für die Unterschiede können u.a. genannt werden:

(i) *Aktien:* Nach HGB werden Aktien i.d.R. im Umlaufvermögen mit dem strengen Niederstwertprinzip bewertet. Daher können sich sog. stille Reserven bilden, wenn die ökonomischen Werte bzw. Marktwerte oberhalb der HGB-Buchwerte liegen. Dies könnte hier der Fall sein.

(ii) *festverzinsliche Wertpapiere:* Diese werden oftmals im Anlagevermögen gehalten, so dass Zinsanstiege bzw. Spreadausweitungen i.d.R. nicht zu Abschreibungen, sondern zu stillen Lasten führen. Dies könnte hier der Fall gewesen sein, da die ökonomischen Werte geringer als die HGB-Buchwerte sind.

(iii) *versicherungstechnische Rückstellungen:* Sehr oft liegen bei Sachversicherern, wie der Stand-alone-Versicherung AG, die ökonomischen Werte der versicherungstechnischen Rückstellungen deutlich unterhalb der HGB-Werte. Mögliche Gründe dafür sind:

- Diskontierung der Schadenreserven in der ökonomischen Bilanz im Gegensatz zu HGB
- Berechnung der ökonomischen Schadenreserven mit aktuariellen Methoden als Best Estimate, wohingegen in der HGB-Bilanz mit Sicherheiten bilanziert wird
- kein Ansatz einer Schwankungsrückstellung in der ökonomischen Bilanz

(iv) *Pensionsrückstellungen:* Diese werden in der HGB-Bilanz mit dem sog. BilMoG-Zins diskontiert, der Ende 2017 bei 3,68% lag. Bei einer ökonomischen Bewertung muss die aktuelle Zinsstrukturkurve angesetzt werden, die derzeit deutlich unter 3,68% liegt.

(b) Das Unternehmen verwendet als Risikomaß $1,25 \cdot ES_{0,99}$.

(i) Grund hierfür sind vermutlich numerische Überlegungen. Bei nur 1.000 Simulationen sind die Simulationsergebnisse in den hohen Quantilen numerisch nicht stabil. Die Wahl des Expected Shortfall zu einem relativ geringen Niveau von 99% hat einen stabilisierenden Einfluss auf die Ergebnisse. Durch die Multiplikation mit 1,25 wird das Sicherheitsniveau wiederum erhöht, so dass – zumindest bei den vorliegenden Simulationen – die einjährige Ruinwahrscheinlichkeit bei ca. 0,2% liegt.

(ii) Das benötigte Risikokapital C berechnet sich wie folgt:

$C = 1,25 \cdot (40 + 55 + 80 + 100 + 120 + 130 + 140 + 160 + 180 + 275) = 160$ Mio. Euro.

(c) Der ökonomische Nettogewinn ermittelt sich als Differenz der ökonomischen Eigenkapitalien unter Berücksichtigung der Dividendenausschüttung und des Aktienrückkaufs wie folgt:

$$N = 160 - 240 + 10 + 90 = 20 \text{ Mio. Euro.}$$

(d) Unter Verwendung von $N = 20$ Mio. Euro, $C = 160$ Mio. Euro und $h = 10\%$ ergibt sich

(i) $EVA = N - h \cdot C = 20 - 160 \cdot 10\% = 4$ Mio. Euro > 0, daher Wertschaffung,

(ii) $RORAC = \frac{N}{C} = \frac{20}{160} = 12,5\% > 10\%$, daher Wertschaffung.

Das Unternehmen hat 2017 demnach Wert geschaffen.

(e) Das vorhandene Risikokapital auf ökonomischer Basis $C_{\text{vorh.}}$ ergibt sich durch die Mittelung der Jahresendwerte:

$$C_{\text{vorh.}} = \frac{160 + 240}{2} = 200 \text{ Mio. Euro.}$$

Eine zur tatsächlichen Risikoposition auf Basis des vorhandenen Risikokapitals passende Hurdle-Rate $h_{\text{vorh.}}$ lässt sich wie folgt ermitteln. Dabei unterstellt man, dass überschüssiges Kapital sicher zum Zins von s = 2% angelegt wird:

$$200 \cdot h_{\text{vorh.}} = 160 \cdot h + 40 \cdot s = 160 \cdot 10\% + 40 \cdot 2\% = 16,8$$

und damit $h_{\text{vorh.}} = 16,8/200 = 8,4\%$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} EVA_{\text{vorh.}} &= N - h_{\text{vorh.}} \cdot C_{\text{vorh.}} = 20 - 200 \cdot 8,4\% = 3,2 \text{ Mio. Euro,} \\ RORAC_{\text{vorh.}} &= \frac{N}{C_{\text{vorh.}}} = \frac{20}{200} = 10\%. \end{aligned}$$

(f) Die Stand-alone-Versicherung AG hatte vermutlich Ende 2016 mit 240 Mio. Euro deutlich mehr ökonomisches Eigenkapital, als sie bei dem vorgegebenen Sicherheitsniveau benötigt hatte. Wahrscheinlich wurde das vorhandene Risikokapital durch den Aktienrückkauf reduziert, um die angestrebte Risikoposition zu erreichen.

(g) Mit dem Shapley-Algorithmus erhalten wir für das allokierte benötigte Risikokapital $C_{\text{allok.}}$ der Stand-alone Versicherung AG

$$C_{\text{allok.}} = \frac{1}{3} \cdot (500 - 360) + \frac{1}{6} \cdot (330 - 250) + \frac{1}{6} \cdot (270 - 200) + \frac{1}{3} \cdot 160 = 125 \text{ Mio. Euro.}$$

Durch die Eingliederung in den Gierig-Konzern und die Allokation des diversifizierten Risikokapitals nach Shapley würde die Stand-alone-Versicherung AG 35 Mio. Euro an Risikokapital einsparen.

(h) Der Gierig-Konzern bewertet die Stand-alone-Versicherung AG mit der Ertragswert-Methode.

 (i) Setzt man als Aktionärsertrag $EVA = 4$ Mio. Euro an, so erhält man bei Verwendung einer Diskontrate von 10% als Kaufpreis $K = 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1,1}} = 44$ Mio. Euro.

 (ii) Als neuer EVA nach Unternehmenskauf und entsprechender Anpassung der ökonomischen Eigenkapitalien ergibt sich $EVA_{\text{kauf}} = 20 - 125 \cdot 10\% = 7,5$ Mio. Euro. und damit als neuer Unternehmenswert $U = K \cdot \frac{7,5}{4} = 82,5$ Mio. Euro. Durch die Nutzung des Diversifikationseffektes wird der Unternehmenswert um 38,5 Mio. Euro steigen.

Aufgabe 2.

(a) Die Risikomarge dient als Aufschlag zur Bewertung des mit den Verpflichtungen assoziierten Risikos.

(b) *Quantilsansatz*

Vorteil: Risikomarge und Erwartungswert der Verpflichtungen können gesamthaft als eine Summe ermittelt werden.

Nachteil: Es ist schwierig festzulegen, welches konkrete Quantil gewählt werden soll. Eine ökonomische Interpretation des Ansatzes ist problematisch. Die Berechnung eines Quantils erfordert i.d.R. stochastische Simulationen.

Hinweis. Es wurde nur ein Nachteil gefragt.

Kapitalkostenansatz

Vorteil: ökonomisch gut interpretierbar und insbesondere gut kombinierbar mit einem n-jährigen Risikokapitalkonzept

Nachteil: Die Berechnung erfordert theoretisch eine Projektion der künftigen Risikokapitalien über die komplette Abwicklungsdauer des Bestands. In der Praxis sind daher Vereinfachungen zur Berechnung nötig.

(c) Der Wert der Optionen und Garantien sind Teil des Erwartungswerts der versicherungstechnischen Verpflichtungen. Beispiele für Optionen und Garantien sind:

- Zinsgarantie, deren Wert bei Zinsanstieg fällt.
- Stornooption, deren Wert bei Zinsanstieg steigt.
- Kapitalabfindungsoption, deren Wert bei Zinsanstieg steigt.

- etc.

Bemerkung: Es waren nur zwei Beispiele gefragt.

Aufgabe 3.

(a)
- Kreditrisiko: (teilweiser) Ausfall oder starke Abwertung von Anleihen der Kapitalanlage und/oder Ausfall von Rückversicherung als Folge der Krise
- Marktrisiko: Aktienverluste aufgrund von Marktturbulenzen, die durch die Krise ausgelöst werden
- Konzentrationsrisiken bei starker Exponierung gegenüber einzelnen Kreditschuldnern oder Aktientiteln
- versicherungstechnische Risiken: Realisation von Kostenrisiken aufgrund eines starken Inflationsanstiegs
- Liquiditätsrisiken: Eine stark ansteigende Unsicherheit der Kunden kann zu einer Stornowelle und damit in einem derartigen Kapitalmarktumfeld theoretisch sogar zu Liquiditätsproblemen führen.
- etc.

Bemerkung: Es waren nur vier Beispiele gefragt.

(b) Zur qualitativen Bewertung eignet sich eine Szenarioanalyse, bei der sämtliche Einfüsse auf das Unternehmen durch Experten beurteilt werden. Ziel ist es, das Ausmaß der Schäden/Verluste (von unbedeutend bis katastrophal) sowie die Eintrittswahrscheinlichkeit zu klassifizieren.

(c)
- Kreditrisiko: Kauf von Credit Default Swaps
- Marktrisiko: Hedging von Aktieninvestments durch Put-Optionen
- Konzentrationsrisiken: stärkere Diversifikation
- versicherungstechnische Risiken in Form von Kostenrisiken aufgrund eines starken Inflationsanstiegs: Berücksichtigung von Preisanpassungsmöglichkeiten in den Produkten
- Liquiditätsrisiken: Verstärkung der Liquiditätsreserven
- etc.

Aufgabe 4.

(a) Betriebliche Altersversorgung (bAV) ist die Zusage von finanziellen Leistungen zum Zwecke der Alters-, Invaliditäts- oder Hinterbliebenenversorgung durch einen Arbeitgeber zugunsten seiner Arbeitnehmer.

(b) (i) für die Bestimmung der vorhandenen Eigenmittel maßgebliche Bilanz

- *Pensionskasse:* handelsrechtliche Bilanz
- *LV unter SII:* eigene Solvenzbilanz auf Basis einer ökonomischen Bewertung

(ii) Anrechenbarkeit von Eigenmitteln

- *Pensionskasse:* Unterscheidung in immer anrechenbare, zum Teil anrechenbare mit und ohne Genehmigung der Aufsicht und abzuziehende Bilanzgrößen
- *LV unter SII:* Tierklassen 1-3 mit anteilmäßigen Höchstgrenzen für die Anrechenbarkeit; Tiering-Kriterien: Basiseigenmittel oder ergänzende Eigenmittel, ständig verfügbar oder nachrangig

(iii) Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen

- *Pensionskasse:* handelsrechtliche Deckungsrückstellung mit Sicherheiten bei den Sterbetafeln, Kostensätzen und Höchstrechnungszins
- *LV unter SII:* Summe aus Best Estimate und Risikomarge, keine Sicherheitszuschläge bei Best Estimate-Sterblichkeiten, (ggf. adjustierte) Zinsstrukturkurve, Berücksichtigung von Optionen und Garantien und zukünftigen Überschüssen

(iv) Bestimmung der Solvenzkapitalanforderung

- *Pensionskasse:* 4% der Deckungsrückstellung + 0,3% des riskierten Kapitals
- *LV unter SII:* einjähriger 99,5%-VaR auf Basis der Standardformel oder eines internen Modells

(v) einzurichtende Governance-Funktionen

- *Pensionskasse:* interne Revision, Risikomanagement-Funktion, versicherungsmathematische Funktion
- *LV unter SII:* interne Revision, Risikomanagement-Funktion, versicherungsmathematische Funktion, Compliance-Funktion

(vi) Durchführung des ORSA

- *Pensionskasse:* nur qualitativ
- *LV unter SII:* Aufgaben des ORSA auf Basis von i.d.R. marktkonsistenten Bewertungsansätzen:
  - Einschätzung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs
  - kontinuierliche Einhaltung von SCR und der Anforderungen an die vt. Rückstellungen
  - Beurteilung der Angemessenheit der Standardformel bzw. des internen Modells

(c) In Solvency II bestehen Berichtspflichten (Offenlegungspflichten) quantitativer und qualitativer Art (QRT und SFCR) gegenüber der Öffentlichkeit und Berichtspflichten gegenüber der Aufsicht (QRT, RSR, ORSA-Bericht).

In der EbAV-Richtlinie sind neben Offenlegungspflichtungen und Berichtspflichten gegenüber der Aufsicht auch Auskunftspflichten gegenüber potentiellen Versorgungsanwärtern, Versorgungsanwärtern und Leistungsempfängern geregelt.

Aufgabe 5.

(a) Die Beziehung $1-\exp(-\lambda \cdot VaR_{0,99}(X)) = 0,99$ führt auf

$$VaR_{0,99}(X) = -\frac{\ln(0,01)}{\lambda}.$$

Der Expected Shortfall ergibt sich zu

$$\begin{aligned} ES_{0,99}(X) &= \frac{1}{1-0,99}\int_{0,99}^{1} VaR_z(X)\,dz = 100\int_{0,99}^{1}\frac{-\ln(1-z)}{\lambda}\,dz \\ &= -\frac{100}{\lambda}\int_{0}^{0,01}\ln(z)\,dz = \frac{100}{\lambda}[z - z\ln(z)]_0^{0,01} \\ &= \frac{1-\ln(0,01)}{\lambda}. \end{aligned}$$

(b) (i) Es gilt $C_\theta(0,0)=0$, $C_\theta(1,1)=1$, $C_\theta(u_1,1)=u_1$, $C_\theta(1,u_2)=u_2$, und C_θ ist in beiden Variablen monoton wachsend, wie man durch Ableiten nach u_i, $i=1,2$ überprüft:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_\theta}{\partial u_1} &= u_2(1+\underbrace{\theta(1-u_1)(1-u_2)}_{|\cdot|\le 1}) - u_2\underbrace{u_1\theta(1-u_2)}_{|\cdot|\le 1} \\ &\ge \left\{ \begin{array}{ll} \theta u_2(1-u_1)(1-u_2); & \theta \ge 0 \\ -u_2u_1\theta(1-u_2) \quad ; & \theta < 0 \end{array} \right\} \ge 0 \end{aligned}$$

Folglich ist C_θ eine zweidimensionale Verteilungsfunktion auf $[0,1]\times[0,1]$ mit gleichverteilten Rändern.

(ii) Die obere Tailabhängigkeit berechnet sich wie folgt.

$$\begin{aligned}
\lambda_u &= 2+\lim_{u\to 1}\frac{C_\theta(u,u)-1}{1-u}\\
&= 2+\lim_{u\to 1}\frac{u^2(1+\theta(1-2u+u^2))-1}{1-u}\\
&= 2+\lim_{u\to 1}\frac{(1+\theta)u^2+\theta(u^4-2u^3)-1}{1-u}\\
&= 2-\frac{\partial}{\partial u}(1+\theta)u^2+\theta(u^4-2u^3)_{|u=1}\\
&= 2-[2(1+\theta)u+\theta(4u^3-6u^2)]_{u=1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass bei Eintreten eines extremen Verlustes in einer Sparte das Modell einen extremen Verlust in der anderen Sparte für äußerst unwahrscheinlich hält, so dass das Risikomanagement das simultane Eintreten extremer Verluste in beiden Sparten ausblendet.

(iii) Die gemeinsame Verteilungsfunktion von (X_1,X_2) lautet

$$\begin{aligned}
F(x_1,x_2) &= C_{0,5}\left(1-e^{-x_1},1-e^{-2x_2}\right)\\
&= (1-e^{-x_1})(1-e^{-2x_2})(1+0,5e^{-x_1}\cdot e^{-2x_2})\\
&= 1-e^{-x_1}-e^{-2x_2}+\frac{3}{2}e^{-x_1-2x_2}-\frac{1}{2}e^{-x_1-4x_2}\\
&\quad -\frac{1}{2}e^{-2x_1-2x_2}+\frac{1}{2}e^{-2x_1-4x_2}.
\end{aligned}$$

(c) (i) Die angegebene Transformation transferiert die Komponenten auf die Gleichverteilung und eliminiert so einen möglichen Einfluss unterschiedlicher Randverteilungen der Beobachtungen der einzelnen Datenlieferanten. *Anmerkung.* Die Abhängigkeitsstruktur zwischen zwei Sparten kann oft als unternehmensunabhängig betrachtet werden.

(ii) Die lineare Korrelation von (X_1,X_2) kann nicht mit Hilfe der transformierten Daten berechnet werden, da sie von den Randverteilungen abhängt. Daher kann die lineare Korrelation von (X_1,X_2) nicht zur Schätzung von θ herangezogen werden.

Kendall's tau und Spearman's rho hingegen stimmen für die transformierten Daten (y_{i1},y_{i2}), $i=1,\dots,n$, und die ursprünglichen Daten (x_{i1},x_{i2}), $i=1,\dots,n$, überein.

- Lösungsvariante auf Basis von Kendall's tau: Schätze

$$\hat{\tau} := \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \operatorname{sign}\big[(y_{i1} - y_{j1})(y_{i2} - y_{j2})\big]$$

  und setze $\hat{\theta} := \frac{9}{2}\hat{\tau}$.

- Lösungsvariante auf Basis von Spearman's rho: Schätze

$$\hat{\rho_S} := \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\text{Rang}(y_{i1}) - \frac{1}{2}(n+1)\right)\left(\text{Rang}(y_{i2}) - \frac{1}{2}(n+1)\right)$$

  und setze $\hat{\theta} := 3\hat{\rho_S}$.

  Anmerkung. Da die Ränder der transformierten Daten (y_{i1}, y_{i2}), $i = 1, \ldots, n$, gleichverteilt sind, stimmen für die transformierten Daten Spearman's rho und die lineare Korrelation überein. Spearman's rho kann daher auch mit dem gewöhnlichen Korrelationsschätzer

$$\hat{\rho_S} := \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{i1} - \bar{y}_1)(y_{i2} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_{i1} - \bar{y}_1)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_{i2} - \bar{y}_2)^2}}$$

  mit $\bar{y}_j := \sum_{i=1}^{n} y_{ij}$, $j = 1, 2$, geschätzt werden.

Anmerkung. Außerhalb der Aufgabenstellung werden die Angaben im Hinweis verifiziert.

lineare Korrelation

Sei (X_1, X_2) ein Zufallsvektor mit Copula C_θ und Randverteilungen $\text{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Mit der gemeinsamen Dichte

$$\begin{aligned}
f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 C_\theta}{\partial u_1 \partial u_2}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \cdot f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \\
&= \big(1 + \theta - 2\theta \cdot F_{X_1}(x_1) - 2\theta \cdot F_{X_2}(x_2) + 4\theta \cdot F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2)\big) \cdot f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \\
&= (1 + \theta(1 - 2(1 - e^{-\lambda_1 x_1}))(1 - (2(1 - e^{-\lambda_2 x_2})))) \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \\
&= (1 + \theta) \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} + \theta \cdot 2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x_1} \cdot 2\lambda_2 e^{-2\lambda_2 x_2} \\
&\quad - \theta\big(2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} + \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot 2\lambda_2 e^{-2\lambda_2 x_2}\big)
\end{aligned}$$

berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1 X_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 x_2 \cdot f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \Big[(1 + \theta) \cdot x_1 \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot x_2 \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} + \theta \cdot x_1 \cdot 2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x_1} \cdot x_2 \cdot 2\lambda_2 e^{-2\lambda_2 x_2} \\
&\quad - \theta\big(x_1 \cdot 2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x_1} \cdot x_2 \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} + x_1 \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot x_2 \cdot 2\lambda_2 e^{-2\lambda_2 x_2}\big)\Big] dx_1\, dx_2 \\
&= \frac{1 + \theta}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{\theta}{2\lambda_1 \cdot 2\lambda_2} - \theta\left(\frac{1}{2\lambda_1 \cdot \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 \cdot 2\lambda_2}\right) \\
&= \frac{4 + \theta}{4\lambda_1 \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Die lineare Korrelation beträgt

$$\varrho_{(X_1,X_2)} = \frac{\mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \cdot \text{Var}(X_2)}} = \frac{\frac{4+\theta}{4\lambda_1\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}} = \frac{\theta}{4}.$$

Spearman's rho

$$
\begin{aligned}
\rho_{S(X_1,X_2)} &= 12\int_0^1\int_0^1 u_1u_2(1+\theta(1-u_1)(1-u_2))\,du_1\,du_2-3\\
&= 12\int_0^1\int_0^1 [u_1u_2+\theta u_1u_2(1-u_1-u_2+u_1u_2)]\,du_1\,du_2-3\\
&= 12\int_0^1\int_0^1 [(1+\theta)u_1u_2-\theta u_1^2u_2-\theta u_1u_2^2+\theta u_1^2u_2^2]\,du_1\,du_2-3\\
&= 12\cdot[(1+\theta)\cdot\frac{1}{4}-\theta\cdot\frac{1}{3}\cdot 12-\theta\cdot\frac{1}{2}\cdot 13+\theta\cdot\frac{1}{3}\cdot 13]-3\\
&= 12\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{\theta}{36}\right)-3=\frac{\theta}{3}
\end{aligned}
$$

Kendall's tau

Wir benutzen die Copula-Dichte $\frac{\partial^2 C_\theta(u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2}=1+\theta-2\theta u_1-2\theta u_2+4\theta u_1u_2$ sowie das Ergebnis der Integralberechnung für Spearman's rho.

$$
\begin{aligned}
\tau_{(X_1,X_2)} &= 4\int_0^1\int_0^1 C_\theta(u_1,u_2)\cdot\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_2}C_\theta(u_1,u_2)\,du_1\,du_2-1\\
&= 4\cdot\Bigg[(1+\theta)\int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)\,du_1\,du_2\\
&\quad -2\theta\int_0^1\int_0^1\left((1+\theta)u_1^2u_2-\theta u_1^3u_2-\theta u_1^2u_2^2+\theta u_1^3u_2^2\right)du_1\,du_2\\
&\quad -2\theta\int_0^1\int_0^1\left((1+\theta)u_1u_2^2-\theta u_1^2u_2^2-\theta u_1u_2^3+\theta u_1^2u_2^3\right)du_1\,du_2\\
&\quad +4\theta\int_0^1\int_0^1\left((1+\theta)u_1^2u_2^2-\theta u_1^3u_2^2-\theta u_1^2u_2^3+\theta u_1^3u_2^3\right)du_1\,du_2\Bigg]-1\\
&= 4\cdot\Bigg[(1+\theta)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{\theta}{36}\right)-2\cdot 2\theta\cdot\left((1+\theta)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\theta\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\theta\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\theta\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)\\
&\quad +4\theta\cdot\left((1+\theta)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\theta\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}-\theta\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\theta\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\Bigg]-1\\
&= \frac{10}{9}\theta+\frac{\theta^2}{9}+4\cdot 4\theta\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{6}\right)+4\cdot 4\theta^2\cdot\left(-\frac{12-9-8+6}{72}+\frac{16-24+9}{144}\right)\\
&= \frac{2\theta}{9}
\end{aligned}
$$