Prüfung Finanzmathematik und Investmentmanagement 2018

Aufgabe 1: (24 Minuten)

(a) Gegeben seien zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen R_1 und R_2. Für den Korrelationskoeffizienten gelte $-1 < \rho(R_1, R_2) < 1$.

i) Bestimmen Sie zunächst die Größe x_{MVP}, wobei $(x_{MVP}, 1 - x_{MVP})$ die Investmentgewichte des global varianzminimalen Portfolios bezeichnen!

ii) Begründen Sie, warum der erhaltene Ausdruck für x_{MVP} wohldefiniert ist!

iii) Welchen Wert muss $\rho(R_1, R_2)$ annehmen, damit x_{MVP} einen vorgegebenen Wert x_0 annimmt, d.h. $x_{MVP} = x_0$ gilt?

iv) Für welchen Wert von x_0 besitzt die Aufgabenstellung iii) keine wohldefinierte Lösung? (8 min)

(b) Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die Koordinaten des effizienten Rands:

$$\mu = 0.05 + \sqrt{0.6\ (\sigma^2 - 0.001)}\ .$$

Als Shortfallrestriktion sei die Bedingung

$$P(R_P < 0) = 0.1$$

gefordert, wobei R_P die einperiodige Portfoliorendite bezeichne. R_P folge einer Normalverteilung.

Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen die (μ, σ)-Position des optimalen Portfolios mit maximaler erwarteter Rendite! (6 min)

<u>Hinweis:</u> $N_{0.90} = 1.282$

(c) Gehen Sie nun davon aus, dass in der Situation der Teilaufgabe 1(b) zusätzlich ein risikoloses Investment existiert. Wie hoch muss der zugehörige risikolose Zins sein, damit das in Aufgabenteil (b) ermittelte Portfolio unverändert das optimale Portfolio ist?

(10 min)

<u>Hinweis:</u> Sollten Sie Teilaufgabe (b) nicht gelöst haben, so gehen Sie davon aus, dass die Shortfallgerade die Kurve der Minimum-Varianz-Portfolios in den Punkten $\sigma_1 = 0.03$ und $\sigma_2 = 0.09$ schneidet.

Lösungshinweis Aufgabe 1a:

Es bezeichne $R = xR_1 + (1 - x)R_2$ die Rendite eines beliebigen Portfolios aus den beiden Aktien. Es bezeichnen ferner $\sigma^2 = \mathrm{Var}(R)$, $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(R_1)$, $\sigma_2^2 = \mathrm{Var}(R_2)$, $\rho = \rho(R_1, R_2)$.
Es gilt damit:

$$\sigma^2 = \sigma^2(x) = x^2\sigma_1^2 + (1 - x)^2\,\sigma_2^2 + 2\rho x(1 - x)\sigma_1\sigma_2.$$

i) Bestimmung der varianzminimalen Position:

$$0 = \frac{d\sigma^2}{dx} = 2x\,\sigma_1^2 - 2(1 - x)\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 4x\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Es folgt:

$$2x\,\sigma_1^2 + 2x\,\sigma_2^2 - 4x\rho\sigma_1\sigma_2 = 2\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

und damit

$$x_{MVP} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

ii) Es gilt $\mathrm{Var}(R_1 - R_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$. Es gilt $\mathrm{Var}(R_1 - R_2) > 0$, wenn $R_1 - R_2$ eine nicht-degenerierte Zufallsgröße ist, d.h. es gilt nicht $R_1 - R_2 = c$ bzw. $R_1 = R_2 + c$. Der letzte Ausdruck impliziert, dass R_1 und R_2 linear abhängig sind. Dies ist ausgeschlossen, da nach Voraussetzung $|\rho| < 1$ gilt.

iii) Aus $x_{MVP} = x_0$ folgt

$$\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = x_0(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)$$

bzw.

$$2\rho x_0\sigma_1\sigma_2 - \rho\sigma_1\sigma_2 = x_0\sigma_1^2 + x_0\sigma_2^2 - \sigma_2^2.$$

Damit gilt insgesamt

$$\rho = \frac{x_0\sigma_1^2 - (1 - x_0)\sigma_2^2}{(2x_0 - 1)\sigma_1\sigma_2}$$

iv) Offenbar für $x_0 = 1/2$.

Lösungshinweis 1b:

Die Shortfallrestriktion $\mu = z + N_{1-\varepsilon}\sigma$ lautet in diesem Falle

$$\mu = 1.282\ \sigma.$$

Gleichsetzen mit Funktion des effizienten Rands laut Aufgabenstellung resultiert in

$$\sqrt{0.6\,(\sigma^2 - 0.001)} = 1.282\ \sigma - 0.05\ .$$

Quadratur dieses Ausdrucks führt auf quadratische Gleichung

$$1.0435\ \sigma^2 - 0.1282\ \sigma + 0.0031 = 0\ .$$

Lösung der quadratischen Gleichung führt auf:

$$\sigma_1 = 0.0329, \qquad \sigma_2 = 0.0899.$$

Das optimale Portfolio ist gegeben durch die höhere σ-Position, d.h. σ = 0.0899. Die zugehörige μ-Position lautet:

$$\mu = 1.282 \cdot 0.0899 = 0.1153\ .$$

Lösungshinweis 1c:

Die neue Effizienzgerade ist gegeben durch die Tangente von (0, r_0) an den bisherigen effizienten Rand. Die entsprechende Steigung lautet

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \left[0.6\,(\sigma^2 - 0.001)\ \right]^{-1/2}\ (0.6\,\sigma)$$

Auswertung in σ = 0.0899 ergibt:

$$\frac{d\mu}{d\sigma}\,(0.0899) = 0.8275$$

Dies entspricht zugleich der Steigung a der Effizienzgeraden $\mu = r_0 + a\,\sigma$. Damit das Portfolio aus a) optimal bleibt, d.h. dem Tangentialportfolio entspricht, folgt hieraus die Bedingung

$$0.1153 = r_0 + (0.8275)(0.0899)$$

Insgesamt resultiert damit

$$r_0 = 0.1153 - 0.0744 = 0.0409\ \ (4.09\,\%).$$

Aufgabe 2: (26 Minuten)

(a) Betrachten Sie den stochastischen Prozess $(t \geq 0, n \in N)$

$$V_t = S_t^n,$$

wobei S_t einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt.

Wie lautet die stochastische Differentialgleichung dieses Prozesses in kanonischer Form (Darstellung von Drift und Diffusion als Funktionen von V_t)? (8 min)

(b) Gegeben sei die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t.$$

Wie lautet die stochastische Differentialgleichung des Prozesses

$$Y_t := e^{\alpha t} X_t \ ?$$

Verwenden Sie zur Bestimmung der gesuchten stochastischen Differentialgleichung das **Lemma von Itô** ! (8 min)

(c) Betrachten Sie den stochastischen Prozess $(t \geq 0)$

$$V_t := e^{-rt} S_t,$$

wobei S_t einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Der Prozess V_t ist der entsprechende diskontierte Kursprozess.
Wie lautet die stochastische Differentialgleichung dieses Prozesses in kanonischer Form (Darstellung von Drift und Diffusion als Funktionen von V_t)? Verwenden Sie zur Bestimmung der gesuchten stochastischen Differentialgleichung die **Produktregel**!
Unter welcher Bedingung an die Drift μ des Prozesses S_t ist der Prozess V_t ein Martingal?
(10 min)

Lösungshinweis Aufgabe 2 a:

Transformationsfunktion: $F(x) = x^n$

$$F_t = 0, \quad F_x = nx^{n-1}, \quad F_{xx} = n(n-1)x^{n-2}$$

Ito:

$$\mu_V = F_t + F_x \mu_S + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma_S^2$$

$$\sigma_V = F_x \sigma_S ,$$

wobei für die Geometrische Brownsche Bewegung

$\mu_S = \mu x$ und $\sigma_S = \sigma x$ gilt.

Hieraus resultiert

$$\mu_V = n\, x^{n-1} \mu\, x + \frac{1}{2} n(n-1) x^{n-2} \sigma^2 x^2$$

$$= n\left[\mu + \frac{1}{2}(n-1)\,\sigma^2\right] x^n$$

$$\sigma_V = n\, x^{n-1} \sigma\, x = n\, \sigma\, x^n$$

Korrespondierende stochastische Differentialgleichung in kanonischer Form:

$$dV_t = n\left[\mu + \frac{1}{2}(n-1)\sigma^2\right] V_t\, dt + n\,\sigma\, V_t\, dW_t$$

Lösungshinweis Aufgabe 2b:

Definiere $F(t,x) = e^{\alpha t}x$. Damit gilt $Y_t = F(t,X_t)$.

Es gilt:

$$F_t = \alpha e^{\alpha t} x$$

$$F_x = e^{\alpha t}$$

$$F_{xx} = 0$$

Mit $\mu(t,x) = \alpha(\mu - x)$ und $\sigma(t,x) = \sigma$ folgt somit aus dem Lemma von Ito:

$$\mu_Y = \alpha e^{\alpha t} x + \alpha(\mu - x) e^{\alpha t} = \alpha\mu e^{\alpha t}, \quad \sigma_Y = \sigma e^{\alpha t}$$

Hieraus resultiert die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = \alpha\mu e^{\alpha t} dt + \sigma e^{\alpha t} dW_t.$$

Lösungshinweis Aufgabe 2c:

Definiere

$h_t = h(t) = e^{-rt}$.

Es gilt

$$\frac{dh(t)}{dt} = -r\,h(t)$$

bzw.

$dh(t) = -r\,h(t)\,dt$.

Insbesondere besitzt diese Differentialgleichung keinen Diffusionsterm, d.h. es gilt $\sigma_h = 0$.

Produktregel:

$dV_t = d(h_t S_t) = h_t dS_t + S_t dh_t + \sigma_S \sigma_h dt$.

Für die geometrische Brownsche Bewegung gilt $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t \, dW_t$.

Insgesamt gilt damit:

$$\begin{aligned} dV_t &= h_t(\mu S_t dt + \sigma S_t \, dW_t) - S_t r\, h_t \, dt \\ &= (\mu - r)\, h_t \, S_t \, dt + h_t \, \sigma S_t \, dW_t \\ &= (\mu - r)\, V_t \, dt + \sigma V_t \, dW_t \ . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für V_t eine Drift von null (und es liegt somit ein Martingal vor), wenn die Bedingung $\mu = r$ erfüllt ist.

Aufgabe 3: (17 Minuten)

Der Wert eines Basisobjekts (Aktie) betrage per 01.01.2018 EUR 100.- Ein Investor kann das Basisobjekt per 01.01.2018 auf der Basis eines Kreditkaufs zu einem marktkonformen Kreditzins von 5% erwerben.

(a) Wie hoch ist der Gewinn bzw. Verlust des Investors am Ende des Folgejahres (31.12.2019), wenn er das Basisobjekt per Kredit erwirbt und den Kredit per 31.12.2019 inklusive akkumulierter Zinszahlung tilgt? Unterscheiden Sie dabei den Fall, dass das Basisobjekt im betrachteten Zeitraum keine Dividende abwirft und den Fall, dass das Basisobjekt per 31.12.2018 eine Dividende in Höhe von EUR 20.- abwirft, die zur teilweisen Tilgung des aufgenommenen Kredits verwendet werden kann. (5 min)

(b) Betrachtet werde nun ein Future auf eine Einheit des Basisobjekts mit zweijähriger Restlaufzeit. Wie hoch ist in beiden vorstehenden Fällen (einkommensfreies Basisobjekt bzw. Basisobjekt mit Einkommen) der Preis F(0,2) des Futures per 01.01.2018? Unterstellen Sie dabei arbitragefreie Märkte und vernachlässigen Sie die Margin-Problematik. (2 min)

(c) Bestimmen Sie den (zufallsabhängigen) Preis F(1,2) des Futures per 01.01.2019 in Termen des Kurses des Basisobjekts in t = 1!
(1 min)

(d) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen F(1,2) und dem (zufallsabhängigen) Kurs K_1 des Basisobjekts per 01.01.2019! (3 min)

(e) Berechnen Sie für den Fall des einkommensfreien Basisobjekts die Anzahl der zu verkaufenden Futures-Kontrakte, die in t = 0 (01.01.2018) benötigt werden, damit in t = 1 (01.01.2019) eine varianzminimale Hedge-Position entsteht (explizite Überlegung!).
(6 min)

<u>Lösungshinweis Aufgabe 3:</u>

$K_0 = 100$, $r = 0.05$, $D = 20$

(a) Gewinn/Verlust G_2 der Position zum 31.12.2019?

Es sei K_2 der Wert des Basisobjekts zum 31.12.2019.

i) Einkommensfreies Basisobjekt

$G_2 = K_2 - K_0\,(1.05)^2 \quad = K_2 - 110.25$

ii) Basisobjekt mit Einkommen

Kreditverlauf:

t = 0	100
t = 1	100(1.05) – 20 = 85
t = 2	85(1.05) = 89.25

$G_2 = K_2 - 89.25$

(b) Gewinn/Verlust-Position in t = 2 bei Erwerb Basis-Objekt über Future:

$G_2 = K_2 - F(0,2)$,

wobei F(0,2) der Preis des Futures mit Restlaufzeit 2 Jahre in t = 0 sei.
Folgerung: (Identität der Positionen bei arbitragefreien Märkten)

i) $F(0,2) = 110.25$

ii) $F(0,2) = \;\; 89.25$

(c) $F(1.2) = 1.05\,K_1$

(d) $\rho\,[F(1,2), K_1]$

$$= \frac{\text{Cov}[F(1,2), K_1]}{\sigma[F(1,2)]\sigma(K_1)}$$

$$= \frac{Cov[1.05K_1, K_1]}{\sigma(1.05K_1)\sigma(K_1)} \qquad = \frac{1.05Cov(K_1, K_1)}{1.05\sigma(K_1)\sigma(K_1)}$$

$$= \frac{Var(K_1)}{Var(K_1)} \qquad = 1$$

(e) Hedge-Position in t = 1:

$G = (K_1 - K_0) – x [F(1,2) – F(0,2)]$,

wobei x die Anzahl der zu verkaufenden Futures-Kontrakte sei.

$G = (K_1-100) – x [F(1,2) – 110.25]$,

$= K_1 – x F(1,2) + 110.25 x - 100$,

da $F(1,2) = 1.05K_1$ gilt weiter:

$G = K_1(1–1.05x) + 110.25x - 100$

$$Var(G) = (1–1.05x)^2 Var(K_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{1.05} = 0.9524$$

<u>Aufgabe 4:</u> (23 Minuten)

a) Gegeben sei eine einfache DAX-Bullanleihe (ohne Kuponzahlungen) mit einer Laufzeit von 2 Jahren und einem Nennwert von 100 000. Die Partizipationsrate an der nicht-annualisierten positiven DAX-Rendite betrage 20%. Der DAX stehe bei Emission der Anleihe bei 5000.

i) Welches Rückzahlungsprofil weist diese Bullanleihe in t = 2 auf?

ii) Zerlegen Sie dieses Rückzahlungsprofil so, dass ein Bestandteil dieser Zerlegung eine **Putoption** ist. Wie lässt sich der zweite Bestandteil dieser Zerlegung repräsentieren?

(8 min)

(b) Ein Investor habe ein Budget von EUR 500.-. Der Investor möchte ein Portfolio aus in t = 1 fälligen Einheits-Zerobonds sowie Long Calls auf die XY-Aktie bilden, das in t = 1 ein identisches Rückzahlungsprofil wie ein (voll investiertes) 1:1 Put Hedge besitzt.

Die zur Verfügung stehenden Optionen weisen dabei folgende Ausstattungsmerkmale auf. Die Puts laufen 1 Jahr, haben einen Ausübungspreis von EUR 130.- und einen Marktwert von EUR 38.81. Der Call auf die XY-Aktie laufe ebenfalls 1 Jahr, habe einen Ausübungspreis von EUR 130.- und einen Marktwert von EUR 15.-.

Unterstellen Sie, dass sämtliche eingegangenen Optionspositionen auf Kredit finanziert werden. Der einheitliche Marktzins für eine Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage 5%. Die XY-Aktie besitzt in t = 0 einen Marktpreis von EUR 100. Wie lauten die Positionsanteile, die für eine Duplikation notwendig sind? (10 min)

(c) Ein Investor besitzt ein anfängliches Vermögen W_0, das er benutzt, um einerseits Zerobonds der Laufzeit T = 5 zu erwerben und andererseits Puts auf die Dorint-Aktie. Welches Mindest-Endvermögen W_{min} kann der Investor auf diese Weise erreichen? Unterstellen Sie dabei, dass die fünfjährige Spot Rate r_5 beträgt.

Bestimmen Sie die korrespondierende annualisierte Mindestrendite r_{min} bezogen auf das anfängliche Vermögen W_0 und vergleichen Sie diese mit r_5! Welche Konsequenz hat die Konstellation $r_{min} = r_5$? (5 min)

<u>Lösungshinweis Aufgabe 4 a:</u>

i) Das Rückzahlungsprofil ist gegeben durch

$$B_2 = \max\left\{100\,000,\ 100\,000\left[1 + 0.2\left(\frac{DAX(2) - 5\,000}{5\,000}\right)\right]\right\}$$
$$= \max\{100\,000,\ 100\,000 + 4[DAX(2) - 5\,000]\}.$$

ii) Zerlegung des Rückzahlungsprofils unter i) durch Herausziehen der zweiten Komponente.

$$B_2 = 100\,000 + 4[DAX(2) - 5\,000]$$
$$+ \max\{100\,000 - 100\,000 - 4[DAX(2) - 5\,000], 0\}$$
$$= 80\,000 + 4DAX(2) + 4\max\{5\,000 - DAX(2), 0\}.$$

Die zweite Komponente dieser Zerlegung besteht aus 4 zweijährigen Puts auf den DAX mit Ausübungspreis X = 5 000. Die erste Komponente besteht aus einem zweijährigen Zerobond mit Rückzahlung 80 000 sowie dem Wert von 4 DAX-Anteilen (in t = 2).

<u>Lösungshinweis Aufgabe 4b:</u>

Bezeichne S_1 den Wert der XY-Aktie in t = 1. In t = 0 können 5 Aktien erworben werden. Damit ist auch eine Long-Position in 5 Puts zu etablieren.

i) Position V_1 des Put Hedge in t = 1:

$$V_1 = 5[S_1 + \max(130 - S_1, 0)] - 5P_0(1.05)$$
$$= 5\max(S_1, 130) - 194.05(1.05)$$
$$= 5\max(S_1, 130) - 203.75.$$

ii) Der Einheitszerobond kostet in t = 0 $(1.05)^{-1}$ Geldeinheiten. Der Investor kann sein gesamtes Budget zum Erwerb von Einheitszerobonds einsetzen, da die Einnahmen aus der Long Call-Position auf Kredit finanziert werden. In t = 0 gilt somit beim Erwerb von x Einheitszerobonds und einem sicheren Zins von 5%:

$$x(1.05)^{-1} = 500 \text{ , d. h. } x = 500(1.05) = \mathbf{525}.$$

Duplikationsgleichung in t = 1 bei Vorliegen von y Long Calls:

$$x \cdot 1 + y \max(S_1 - 130, 0) - y C_0 (1.05)$$
$$= 5 \max(S_1, 130) - 203.75 .$$

Mit x = 525, C_0 = 15 und bei einer Wahl von S_1 = 130 resultiert hieraus:

$$525 - 15.75y = 650 - 203.75 \text{ bzw. } 15.75y = 78.75$$

und damit $\mathbf{y = 5}$.

Es sind somit insgesamt 525 Einheitszerobonds zu erwerben und 5 Calls zu kaufen, um die voll investierte Put Hedge-Position zu duplizieren.

Lösungshinweis Aufgabe 4c:

Der Investor erwerbe n Puts zum Preis P_0. Damit kann er W_0 - n P_0 in Zerobonds anlegen.

Korrespondierende Wertentwicklung:

$$W_5 = (W_0 - n P_0)(1 + r_5)^5 + n \max(X - S_5, 0),$$

wobei $\{S_t\}$ die Wertentwicklung der M-Aktie und X den Ausübungspreis des Put bezeichne.

Da $\max(X - S_T, 0) \geq 0$ folgt:

$$W_5 \geq (W_0 - n P_0)(1 + r_5)^5 =: W_{min}$$

Bestimmung der Mindestrendite:

$$W_0 (1 + r_{min})^5 = W_{min} = (W_0 - n P_0)(1 + r_5)^5.$$

Hieraus folgt:

$$1 + r_{min} = \sqrt[5]{1 - n(P_0 / W_0)}\ (1 + r_5)$$

Es muss gelten $r_{min} \leq r_5$. Im Falle $r_{min} = r_5$ werden keine Puts erworben (n = 0) und das gesamte anfängliche Vermögen wird in den Zerobond investiert.