Klausur zum
Grundwissen Schadenversicherungsmathematik

Ch. Hipp, M. Morlock, H. Schmidli, K. D. Schmidt

Mai 2017 in Köln

Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben. Bei jeder Aufgabe sind maximal 15 Punkte zu erreichen. Insgesamt sind damit maximal 120 Punkte möglich.

Zum Bestehen sind 48 Punkte ausreichend.

Zugelassen sind die klassische Formelsammlung, die verteilt wird, sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner.

Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Das Portfolio X einer Sparte wird als gemischte Lognormalverteilung mit der Verteilungsfunktion F mit

$$F(x) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \dfrac{2}{3}\,\Phi\Big(\ln(x) - 1\Big) + \dfrac{1}{3}\,\Phi\left(\dfrac{\ln(x) - 3}{2}\right) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

modelliert, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Das Aktuariat soll das nötige Solvenz–Eigenkapital zum Value–at–Risk zum Niveau 99.5% berechnen, das heißt

$$\min\Big\{ x \;\Big|\; P[x - X \geq 0] \geq 0.995 \Big\}$$

Bestimmen Sie das Solvenz–Eigenkapital näherungsweise mit Hilfe der Normal–Power–Approximation.
(15 Punkte)
Hinweis: Die relative Schiefe der Verteilung ist 698.4.

Lösung: Für eine Zufallsvariable Z mit der Lognormalverteilung $\mathbf{LN}(\nu; \tau^2)$ gilt

$$E[Z] \;=\; e^{\nu+\tau^2/2}$$

und

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= \mathrm{var}[Z] + (E[Z])^2 \\ &= e^{2\nu+\tau^2}(e^{\tau^2}-1) + \left(e^{\nu+\tau^2/2}\right)^2 \\ &= e^{2\nu+2\tau^2} \end{aligned}$$

Die Verteilung von X ist eine Mischung der Lognormalverteilungen $\mathbf{LN}(1; 1)$ und $\mathbf{LN}(3; 4)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{2}{3}\, e^{1+1/2} + \frac{1}{3}\, e^{3+4/2} \\ &= \frac{2}{3}\, e^{3/2} + \frac{1}{3}\, e^{5} \\ &= 52.46 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{2}{3}\, e^{2\cdot1+2\cdot1} + \frac{1}{3}\, e^{2\cdot3+2\cdot4} \\ &= \frac{2}{3}\, e^{4} + \frac{1}{3}\, e^{14} \\ &= 400'904.49 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= 400'904.49 - 52.46^2 \\ &= 398'152.44 \end{aligned}$$

und damit

$$\sqrt{\mathrm{var}[X]} \;=\; 631$$

Aus der Gleichung

$$\Phi(2.58) \;=\; 0.995 \;=\; P[X \le x] \;\approx\; \Phi\!\left(\frac{1}{\gamma}\left(\sqrt{\gamma^2 + 6\gamma\,\frac{x-\mu}{\sigma} + 9} - 3\right)\right)$$

erhält man mit

$$2.58 \;=\; \frac{1}{\gamma}\left(\sqrt{\gamma^2 + 6\gamma\,\frac{x-\mu}{\sigma} + 9} - 3\right)$$

die Bestimmungsgleichung für x und mit

$$\begin{aligned} \mu &= 52.46 \\ \sigma &= 631 \\ \gamma &= 698.4 \end{aligned}$$

ergibt sich nun $x \approx 417'134$.

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Ein kollektiver Versicherungsvertrag erzeugt pro Jahr N Schäden mit Schadenhöhen $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, wobei alle Variablen stochastisch unabhängig sind. Die Verteilung von N ist gegeben durch

n	0	1	2	3
$P[N = n]$	0.4	0.3	0.2	0.1

Es gilt $E[N] = \text{var}[N] = 1$. Die Schadenhöhen haben die Verteilung

x	10	20	30	50
$P[X = x]$	0.1	0.4	0.3	0.2

Es wird überlegt, einen Selbstbehalt von 30 auf den Gesamtschaden einzuführen.

(a) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten des Gesamtschadens für den Fall ohne Selbstbehalt.
(8 Punkte)

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Gesamtschadens für den Fall mit Selbstbehalt.
(5 Punkte)

(c) Der Variationskoeffizient im Fall mit Selbstbehalt ist 2.01. Kommentieren Sie die Variationskoeffizienten.
(2 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= 0.1 \cdot 10 + 0.4 \cdot 20 + 0.3 \cdot 30 + 0.2 \cdot 50 \\ &= 28 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[X] &= 0.1 \cdot (10-28)^2 + 0.4 \cdot (20-28)^2 + 0.3 \cdot (30-28)^2 + 0.2 \cdot (50-28)^2 \\ &= 156 \end{aligned}$$

Aus den Wald'schen Formeln erhalten wir für den Gesamtschaden $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N]\,E[S] \\ &= 1 \cdot 28 \\ &= 28 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[S] &= E[N]\,\mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[N]\,(E[X])^2 \\ &= 1 \cdot 156 + 1 \cdot 28^2 \\ &= 940 \end{aligned}$$

Für den Variationskoeffizienten erhalten wir daher

$$\mathrm{Vko}[S] = \frac{\sqrt{\mathrm{var}[S]}}{E[S]} = \frac{\sqrt{940}}{28} = 1.0950$$

(b) Bei einem Selbstbehalt in Höhe von 30 verringert sich der Gesamtschaden um

$$\begin{aligned} \min\{S, 30\} &= \chi_{\{N=1\}} \Big(10\, \chi_{\{X_1=10\}} + 20\, \chi_{\{X_1=20\}} + 30\, \chi_{\{X_1 \geq 30\}} \Big) \\ &\quad + \chi_{\{N=2\}} \Big(20\, \chi_{\{X_1=10\}}\, \chi_{\{X_2=10\}} + 30(1 - \chi_{\{X_1=10\}}\, \chi_{\{X_2=10\}}) \Big) \\ &\quad + \chi_{\{N=3\}}\, 30 \end{aligned}$$

Aus den Unabhängigkeitsannahmen erhält man für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[\min\{S, 30\}] &= 0.3 \cdot \big(10 \cdot 0.1 + 20 \cdot 0.4 + 30 \cdot 0.5 \big) \\ &\quad + 0.2 \cdot \big(20 \cdot 0.1^2 + 30(1-0.1^2) \big) \\ &\quad + 0.1 \cdot 30 \\ &= 16.18 \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert des Gesamtschadens $(S-30)^+$ mit Selbstbehalt gilt daher

$$\begin{aligned} E[(S-30)^+] &= E[S] - E[\min\{S, 30\}] \\ &= 28 - 16.18 \\ &= 11.82 \end{aligned}$$

(c) Der Variationskoeffizient hat sich (trotz kleinerem Risiko) um über die Hälfte erhöht. Das liegt daran, dass die großen Schäden mehr Gewicht erhalten und wegen ihrer Quadrierung in der Varianz der Erwartungswert stärker fällt als die Varianz.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Das Risiko S eines Versicherungsnehmers mit den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen N (Schadenzahl) und X (Schadenhöhe) einer Versicherungsperiode mit

N	0	1	2
$P[N=n]$	0.2	0.3	0.5

und

x	6	40	60
$P[X_k=x]$	0.2	0.4	0.4

soll tarifiert werden.

(a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie (Erwartungswert der Zahlungen des Versicherungsunternehmens).
(2 Punkte)

(b) Das Versicherungsunternehmen plant, eine Beitragsrückerstattung der Höhe 10 zu gewähren, wenn der Versicherungsnehmer in der Versicherungsperiode keinen Schaden meldet. Die Meldung von gegebenenfalls einem oder zwei Schäden erfolgt am Ende der Versicherungsperiode. Es wird angenommen, dass sich der Versicherungsnehmer rational verhält. Berechnen Sie die Zähldichte der Anzahl $\widehat{N}$ der gemeldeten Schäden.
(4 Punkte)

(c) Warum ist die 1. Waldsche Formel zur Berechnung des Erwartungswert der Versicherungsleistung $\widehat{S}$ mit Beitragsrückerstattung hier nicht anwendbar?
(2 Punkte)

(d) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Fall der Beitragsrückerstattung der Höhe 10 unter der Voraussetzung des rationalen Verhaltens des Versicherungsnehmers.
(7 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt $E[N] = 1.3$ und $E[X] = 41.2$ und damit

$$E[S] \;=\; E[N]\,E[X] \;=\; 1.3 \cdot 41.2 \;=\; 53.56$$

(b) Für die Anzahl der gemeldeten Schäden gilt

$$\begin{aligned}
\{\widehat{N} = 0\} &= \{N = 0\} + \{N = 1\} \cap \{X_1 = 6\} \\
\{\widehat{N} = 1\} &= \{N = 1\} \cap \{X_1 \geq 40\} \\
\{\widehat{N} = 2\} &= \{N = 2\}
\end{aligned}$$

und aus den Unabhängigkeitsannahmen folgt nun

$$\begin{aligned}
P[\widehat{N} = 0] &= P[N = 0] + P[N = 1]\,P[X_1 = 6] \;=\; 0.2 + 0.3 \cdot 0.2 \;=\; 0.26 \\
P[\widehat{N} = 1] &= P[N = 1]\,P[X_1 \geq 40] \;=\; 0.3 \cdot 0.8 \;=\; 0.24 \\
P[\widehat{N} = 2] &= P[N = 2] \;=\; 0.5
\end{aligned}$$

(c) Aufgrund der Beitragsrückerstattung im Fall $\widehat{N} = 0$ ist die Versicherungsleistung $\widehat{S}$ nicht als Gesamtschaden in einem kollektiven Modell mit der Schadenzahl $\widehat{N}$ darstellbar.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{S} \;=\; & 10\Big(\chi_{\{N=0\}} + \chi_{\{N=1\}}\chi_{\{X_1=6\}}\Big) \\
& + 40\,\chi_{\{N=1\}}\chi_{\{X_1=40\}} + 60\,\chi_{\{N=1\}}\chi_{\{X_1=60\}} \\
& + (X_1 + X_2)\,\chi_{\{N=2\}}
\end{aligned}$$

und aus den Unabhängigkeitsannahmen folgt nun

$$\begin{aligned}
E[\widehat{S}] &= 10\Big(P[N = 0] + P[N = 1]\,P[X_1 = 6]\Big) \\
&\quad + 40\,P[N = 1]\,P[X_1 = 40] + 60\,P[N = 1]\,P[X_1 = 60] \\
&\quad + 2\,E[X]\,P[N = 2] \\
&= 10 \cdot (0.2 + 0.3 \cdot 0.2) + 40 \cdot 0.3 \cdot 0.4 + 60 \cdot 0.3 \cdot 0.4 + 2 \cdot 41.2 \cdot 0.5 \\
&= 55.8
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Ein Versicherer mit einem heterogenen Bestand, bestehend aus Versicherungsnehmern der Typen A und B, beabsichtigt, ein einfaches Bonus–Malus–System mit den vier Klassen 1, 2, 3 und 4 einzuführen. Dabei geht der Versicherer von folgender Situation aus:

- $P[A] = 0.4$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsnehmer zum Typ A gehört).
- $P[B] = 0.6$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsnehmer zum Typ B gehört).
- $P[N_A = 0] = 0.9$ und $P[N_A = 1] = 0.1$ (Verteilung der Schadenzahl N_A eines Versicherungsnehmers vom Typ A).
- $P[N_B = 0] = 0.7$ und $P[N_B = 1] = 0.3$ (Verteilung der Schadenzahl N_B eines Versicherungsnehmers vom Typ B).
- Höhe jedes Schadens: $X = 1000$.
- Einstiegsklasse: Klasse 1.
- Höherstufung und Rückstufung im nächsten Kalenderjahr:
  - Bei schadenfreiem Verlauf Höherstufung um eine Klasse oder Verbleib in Klasse 4.
  - Bei einem Schaden Rückstufung um eine Klasse oder Verbleib in Klasse 1.

(a) Bestimmen Sie die Nettorisikoprämie für einen Versicherungsnehmer, von dem nicht bekannt ist, ob er vom Typ A oder B ist und von dem keine Schadenerfahrung vorliegt.
(2 Punkte)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich ein Versicherungsnehmer vom Typ A bzw. B in der 3. Versicherungsperiode in den Klassen 1, 2 und 3?
(4 Punkte)

(c) Die stationären Verteilungen π_A bzw. π_B der Versicherungsnehmer vom Typ A bzw. B auf die vier Klassen sind (gerundet) durch die folgende Tabelle gegeben:

Klasse	1	2	3	4
A	0.001	0.011	0.099	0.889
B	0.047	0.109	0.253	0.591

Berechnen Sie die risikogerechte Nettorisikoprämie für die Klasse 4 auf der Basis der stationären Verteilungen.
(4 Punkte)

(d) Berechnen Sie den Anteil der Versicherungsnehmer in der Klasse 4 auf der Basis der stationären Verteilungen.
(2 Punkte)

(e) Wie beurteilen Sie die sekundäre Prämiendifferenzierung dieses Bonus–Malus–Systems hinsichtlich der Ergebnisse aus (a), (c) und (d)?
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Der Gesamtschaden S_A eines Versicherungsnehmers vom Typ A ist durch

$$S_A \;:=\; 1000\, N_A$$

gegeben und für seine Nettorisikoprämie erhält man

$$E[S_A] \;:=\; 1000\, E[N_A] \;=\; 1000 \cdot 0.1 \;=\; 100$$

Analog erhält man

$$E[S_B] \;:=\; 1000\, E[N_B] \;=\; 1000 \cdot 0.3 \;=\; 300$$

Die Nettorisikoprämie für einen Versicherungsnehmer von unbekanntem Typ ist daher das gewichtete Mittel

$$E[S_A]\, P[A] + E[S_B]\, P[B] \;=\; 100 \cdot 0.4 + 300 \cdot 0.6 \;=\; 220$$

(b) Für die Übergangsmatrizen M_A bzw. M_B für Versicherungsnehmer vom Typ A bzw. B gilt

$$M_A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad M_B = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Für die Verteilung der Risiken auf die vier Klassen in der dritten Periode gilt daher

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.09 \\ 0.81 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.21 \\ 0.49 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsnehmer aus Klasse K zum Typ A gehört, gilt

$$P[A|K] \;=\; \frac{P[K|A]\, P[A]}{P[K|A]\, P[A] + P[K|B]\, P[B]}$$

und für die Wahrscheinlichkeit, dass er zum Typ B gehört, gilt

$$P[B|K] \;=\; 1 - P[A|K]$$

Für die Nettorisikoprämie in Klasse K gilt daher

$$\mathrm{NRP}_K \quad = \quad E[S_A]\, P[A|K] + E[S_B]\, P[B|K]$$

Es gilt

$$\begin{aligned} P[A|4] &= \frac{0.889 \cdot 0.4}{0.889 \cdot 0.4 + 0.591 \cdot 0.6} \;=\; 0.501 \\ P[B|4] &= 1 - 0.501 \;=\; 0.499 \\ \mathrm{NRP}_4 &= 100 \cdot 0.501 + 300 \cdot 0.499 \;=\; 199.80 \end{aligned}$$

(d) Der Anteil aller Versicherungsnehmer in der Klasse K ist das gewichtete Mittel der entsprechenden Anteile der Versicherungsnehmer von Typ A bzw. B. Für die Klasse 4 ergibt sich der Anteil

$$0.889 \cdot 0.4 + 0.591 \cdot 0.6 \quad = \quad 0.7102$$

(e) In den unteren Klassen werden die beiden Risikotypen recht gut getrennt; allerdings sind diese Klassen nur schwach besetzt, so dass die Prämiendifferenzierung kaum Wirkung zeigt.
In der höchsten (besten) Klasse 4 befinden sich mehr als 2/3 aller Versicherungsnehmer; allerdings beträgt die Prämienreduktion in dieser Klasse gegenüber der kollektiven Nettorisikoprämie nur 9.2%.
Das Bonus–Malus–System müsste um zusätzliche Klassen erweitert und ausdifferenziert werden.

Aufgabe 5 (Reservierung)

Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2013 bis 2016 die beobachteten Schadenstände sowie externe Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten:

Anfall–	**Abwicklungsjahr** k			
jahr i	0	1	2	3
2013	240	380	499	499
2014	300	460	551	
2015	260	440		
2016	280			
γ_k^{EX}	0.50	0.88	0.95	1

(a) Schätzen Sie die Reserven für 2015 und 2016 mit dem Chain–Ladder Verfahren.
(6 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Chain–Ladder Quoten.
(2 Punkte)

(c) Schätzen Sie die Reserven für 2015 und 2016 mit dem Loss–Development Verfahren unter Verwendung der externen Schätzer der Quoten.
(4 Punkte)

(d) Vergleichen Sie die Schätzer der Reserven.
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Für die Chain–Ladder Faktoren gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_3^{\mathrm{CL}} &= \frac{499}{499} = 1.00\\
\varphi_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{499+551}{380+460} = 1.25\\
\varphi_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{380+460+440}{240+300+260} = 1.60
\end{aligned}$$

Für die Chain–Ladder Endschadenstände gilt daher

$$S_{2015,3}^{\mathrm{CL}} = S_{2015,1}\,\varphi_2^{\mathrm{CL}}\,\varphi_3^{\mathrm{CL}} = 440 \times 1.25 \times 1.00 = 550$$

und

$$S_{2016,3}^{\mathrm{CL}} = S_{2016,0}\,\varphi_1^{\mathrm{CL}}\,\varphi_2^{\mathrm{CL}}\,\varphi_3^{\mathrm{CL}} = 280 \times 1.60 \times 1.25 \times 1.00 = 560$$

Für die Chain–Ladder Reserven ergibt sich daraus

$$R_{2015}^{\mathrm{CL}} := S_{2015,3}^{\mathrm{CL}} - S_{2015,1} = 550 - 440 = 110$$

und

$$R_{2016}^{\mathrm{CL}} := S_{2016,3}^{\mathrm{CL}} - S_{2016,0} = 560 - 280 = 280$$

(b) Für die Chain–Ladder Quoten gilt

$$\gamma_3^{\mathrm{CL}} = 1$$

und für $k \in \{0,1,2\}$ erhält man wegen $\gamma_k^{\mathrm{CL}} = \gamma_{k+1}^{\mathrm{CL}}/\varphi_{k+1}^{\mathrm{CL}}$

$$\begin{aligned}
\gamma_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{1}{1.00} = 1.00\\
\gamma_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{1.00}{1.25} = 0.80\\
\gamma_0^{\mathrm{CL}} &= \frac{0.80}{1.60} = 0.50
\end{aligned}$$

(c) Für die Loss–Development Endschadenstände gilt

$$S_{2015,3}^{\mathrm{LD}} = \frac{S_{2015,1}}{\gamma_1^{\mathrm{EX}}} = \frac{440}{0.88} = 500$$

und

$$S_{2016,3}^{\mathrm{CL}} = \frac{S_{2016,0}}{\gamma_0^{\mathrm{EX}}} = \frac{280}{0.50} = 560$$

Für die Loss–Development Reserven ergibt sich daraus

$$R_{2015}^{\mathrm{LD}} := S_{2015,3}^{\mathrm{LD}} - S_{2015,1} = 500 - 440 = 60$$

und

$$R_{2016}^{\mathrm{LD}} := S_{2016,3}^{\mathrm{LD}} - S_{2016,0} = 560 - 280 = 280$$

(d) Das Chain–Ladder Verfahren ist gerade das Loss–Development Verfahren mit Chain–Ladder Quoten. Daher ergibt sich der Vergleich der Endschadenstände und damit der Reserven aus dem Vergleich der Chain–Ladder Quoten mit den externen Quoten für das jeweils letzte beobachtbare Abwicklungsjahr. Für 2015 ist der Endschadenstand und damit auch die Reserve beim Loss–Development Verfahren kleiner als bei Chain–Ladder Verfahren, weil die externe Quote γ_1^{EX} größer ist als die Chain–Ladder Quote γ_1^{CL}. Für 2016 sind die Endschadenstände und damit auch die Reserven bei beiden Verfahren identisch, weil die externe Quote γ_0^{EX} mit der Chain–Ladder Quote γ_0^{CL} übereinstimmt.

Aufgabe 6 (Reservierung)

Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2014 bis 2016 die Prämien und die Zuwächse der Schadenzahlungen sowie externe Schätzer für das Abwicklungsmuster für Anteile:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	**Prämie** π_i
2014	400	170	88	800
2015	440	182		800
2016	480			800
$\vartheta_k^{\mathrm{EX}}$	0.6	0.3	0.1	

(a) Bestimmen Sie die Prädiktoren der Endschadenstände mit dem additiven Verfahren.
(4 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die additive Endschadenquote.
(2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Cape–Cod Endschadenquote unter Verwendung der externen Schätzer.
(3 Punkte)

(d) Bestimmen Sie die Prädiktoren der Endschadenstände mit dem Cape–Cod Verfahren unter Verwendung der externen Schätzer.
(2 Punkte)

(e) Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn alle Prämien um 40 Einheiten erhöht werden?
(2 Punkte)

(f) Diskutieren Sie anhand der Prädiktoren der Endschadenstände die Annahme, dass eine anfalljahrunabhängige Endschadenquote vorliegt.
(2 Punkte)

Lösung:

(a) Für die additiven Schadenquotenzuwächse gilt

$$\begin{aligned}\zeta_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{400+440+480}{800+800+800} = 0.55\\ \zeta_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{170+182}{800+800} = 0.22\\ \zeta_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{88}{800} = 0.11\end{aligned}$$

Für die additiven Prädiktoren der Endschadenstände erhält man daher

$$\begin{aligned}S_{2014,2}^{\mathrm{AD}} &= 400+170+88 = 658\\ S_{2015,2}^{\mathrm{AD}} &= 440+182+800\times 0.11 = 710\\ S_{2016,2}^{\mathrm{AD}} &= 480+800\times 0.22+800\times 0.11 = 744\end{aligned}$$

(b) Für die additive Endschadenquote gilt

$$\kappa^{\mathrm{AD}} = 0.55+0.22+0.11 = 0.88$$

(c) Zur Bestimmung der Cape–Cod Endschadenquote κ^{CC} benötigt man die aktuellen Schadenstände und verbrauchten Prämien. Durch Summation erhält man die Schadenstände und die externen Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	**Prämie** π_i
2014	400	570	658	800
2015	440	622		800
2016	480			800
γ_k^{EX}	0.6	0.9	1	

Für die verbrauchten Prämien erhält man daher

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	**Prämie** π_i
2014			800	800
2015		720		800
2016	480			800
γ_k^{EX}	0.6	0.9	1	

und für die Cape–Cod Endschadenquote ergibt sich daraus

$$\kappa^{\mathrm{CC}} = \frac{480+622+658}{480+720+800} = \frac{1760}{2000} = 0.88$$

(d) Für die Cape–Cod Prädiktoren erhält man

$$\begin{aligned}S_{2014,2}^{\mathrm{CC}} &= 658\\ S_{2015,2}^{\mathrm{CC}} &= 622+(1-0.9)\times 800\times 0.88 = 692.40\\ S_{2016,2}^{\mathrm{CC}} &= 480+(1-0.6)\times 800\times 0.88 = 761.60\end{aligned}$$

(e) Da die Prämien für alle Anfalljahre gleich sind, entspricht die Erhöhung aller Prämien um 40 Einheiten einer Erhöhung um 5%. Die Produkte $\pi_i \zeta_k^{\mathrm{AD}}$ und $\pi_i \kappa^{\mathrm{CC}}$ ändern sich bei einer prozentualen Erhöhung der Prämien nicht. Daher bleiben auch die additiven Prädiktoren und die Cape–Cod Prädiktoren der Endschadenstände unverändert.

(f) In den ersten beiden Abwicklungsjahren weisen die Zuwächse und die Schadenstände einen Trend auf, und dies gilt auch für die Prädiktoren der Endschadenstände. Andererseits sind die Prämien für alle Anfalljahre gleich. Daher ist zu bezweifeln, dass eine anfalljahrunabhängige Endschadenquote vorliegt.

Aufgabe 7 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Ein Risiko X mit einer verschobenen Pareto–Verteilung mit der Dichtefunktion f mit

$$f(x) \;:=\; 2\,(1+x)^{-3}\,\chi_{(0,\infty)}(x)$$

wird so rückversichert, dass der Rückversicherer 80% des den 1 übersteigenden Betrages übernimmt, höchstens jedoch 8. Der Anteil der Rückversicherers ist damit

$$X_R \;:=\; \min\Big\{\max\{0.8(X-1),0\},8\Big\}$$

(a) Welche Entschädigung zahlt der Erstversicherer, wenn $X > 10$ gilt?
(3 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Rückversicherungsvertrag.
(7 Punkte)

(c) Ist für den Erstversicherer nach Rückversicherung ein Kapital von 3 ausreichend für das Niveau 99% im Sinne, dass $P[X-X_R > 3] \leq 0.01$ gilt?
(5 Punkte)

Lösung:

(a) Im Fall $X > 11$ zahlt der Rückversicherer den Betrag 8 und der Erstversicherer zahlt den Rest $X - 8$.
Im Fall $10 < X \leq 11$ zahlt der Rückversicherer den Betrag $0.8(X-1)$ und der Erstversicherer zahlt den Rest $X - 0.8(X-1) = 0.8 + 0.2X$.

(b) Unter Verwendung der Layer–Identität erhält man

$$\begin{aligned} \min\Bigl\{\max\{0.8(X-1),0\},8\Bigr\} &= 0.8 \min\Bigl\{\max\{X-1,0\},10\Bigr\} \\ &= 0.8 \Bigl(\max\{X-1,0\} - \max\{X-11,0\}\Bigr) \end{aligned}$$

Für die Nettorisikoprämie Π für den Rückversicherungsvertrag gilt daher

$$\begin{aligned} \Pi &= E\Bigl[\min\Bigl\{\max\{0.8(X-1),0\},8\Bigr\}\Bigr] \\ &= 0.8 \Bigl(E\bigl[\max\{X-1,0\}\bigr] - E\bigl[\max\{X-11,0\}\bigr]\Bigr) \end{aligned}$$

Für die Verteilungsfunktion F von X gilt

$$F(x) = \Bigl(1 - (1+x)^{-2}\Bigr)\chi_{(0,\infty)}(x)$$

Für $c \in (0,\infty)$ gilt daher

$$\begin{aligned} E\bigl[\max\{X-c,0\}\bigr] &= \int_c^\infty (1 - F(x))\,dx \\ &= \int_c^\infty (1+x)^{-2}\,dx \\ &= -\frac{1}{1+x}\Bigg|_c^\infty \\ &= \frac{1}{1+c} \end{aligned}$$

ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \Pi &= 0.8 \Bigl(E\bigl[\max\{X-1,0\}\bigr] - E\bigl[\max\{X-11,0\}\bigr]\Bigr) \\ &= 0.8 \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+11}\right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(c) Im Fall $X > 11$ zahlt der Rückversicherer den Betrag 8 und der Erstversicherer zahlt den Rest $X - 8 > 3$.
Im Fall $1 \leq X \leq 11$ zahlt der Rückversicherer den Betrag $0.8(X-1)$ und der Erstversicherer zahlt den Rest $X - 0.8(X-1) = 0.8 + 0.2X \leq 3$.
Im Fall $X \leq 1$ zahlt der Rückversicherer nichts und der Erstversicherer zahlt $X \leq 1$.

Für die Zahlung $Z := X - X_R$ des Erstversicherers gilt daher $Z > 3$ genau dann, wenn $X > 11$. Wegen

$$\begin{aligned} P[Z > 3] &= P[X > 11] \\ &= 1 - F(11) \\ &= 1 - \Big(1 - (1{+}11)^{-2}\Big) \\ &= \frac{1}{144} \\ &< 0.01 \end{aligned}$$

ist ein Kapital von 3 ausreichend für das Niveau 99%.

Aufgabe 8 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Ein Versicherer hat einen Bestand, dessen Risiko durch ein kollektives Modell mit Schadenanzahl N mit

n	0	1	2
$P[N = n]$	0.80	0.15	0.05

und Schadenhöhen X_k mit

x	100	1000	5000
$P[X_k = x]$	0.70	0.20	0.10

modelliert wird.
Berechnen Sie den Kapitalbedarf K des Erstversicherers für folgende drei Fälle:

(a) Ohne Rückversicherung.
(5 Punkte).

(b) Mit einer Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität 600 und einer Prämie von 500 (für den Gesamtschaden S zahlt der Rückversicherer $\max\{S-600, 0\}$).
(3 Punkte).

(c) Mit einer Schadenexzedenten–Rückversicherung mit Priorität 300 und einer Prämie von 600 (für einen Schaden der Höhe X_k zahlt der Rückversicherer $\max\{X_k - 300, 0\}$).
(7 Punkte).

Hierbei ist der Kapitalbedarf K jeweils definiert durch

$$K \quad := \quad M + \Pi$$

mit Rückversicherungsprämie Π und minimalem M, so dass für den Gesamtschaden S_E des Erstversicherers $P[S_E \leq M] \geq 0.995$ gilt.

Lösung: In allen drei Fällen ist das kleinste K mit

$$P[S_E + \Pi \leq K] \;\; \geq \;\; 0.995$$

zu bestimmen.

(a) Ohne Rückversicherung ist der Gesamtschaden des Erstversicherers durch

$$S_E \;\; := \;\; S$$

gegeben und es gilt $\Pi = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} P[S \leq 10000] &= 1 \\ &\geq 0.995 \end{aligned}$$

Aufgrund der Unabhängigkeitsannahmen gilt

$$\begin{aligned} P[S = 10000] &= P[\{N = 2\} \cap \{X_1 = 5000\} \cap \{X_2 = 5000\}] \\ &= P[N = 2]\, P[X_1 = 5000]\, P[X_2 = 5000] \\ &= 0.05 \cdot 0.10 \cdot 0.10 \\ &= 0.0005 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} P[S \leq 6000] &= P[S \leq 10000] - P[S = 10000] \\ &= 1 - 0.0005 \\ &= 0.9995 \\ &\geq 0.995 \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} P[S = 6000] &= 0.05 \cdot 2 \cdot 0.10 \cdot 0.20 \\ &= 0.0020 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} P[S \leq 5100] &= 0.9995 - 0.0020 \\ &= 0.9975 \\ &\geq 0.995 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} P[S = 5100] &= 0.05 \cdot 2 \cdot 0.10 \cdot 0.70 \\ &= 0.0070 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} P[S \leq 5000] &= 0.9975 - 0.0070 \\ &= 0.9905 \\ &< 0.995 \end{aligned}$$

Der Kapitalbedarf beträgt daher 5100.

(b) Bei der Stop–Loss Rückversicherung ist der Gesamtschaden des Erstversicherers durch

$$S_E \quad := \quad \min\{S, 600\}$$

gegeben und es gilt $\Pi = 500$. Es gilt

$$\begin{aligned} P\Big[\min\{S,600\} + 500 \leq 1100\Big] &= 1 \\ &\geq 0.995 \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} P\Big[\min\{S,600\} + 500 < 1100\Big] &= P[S < 600] \\ &= P[S \leq 200] \\ &= P[N = 0] \\ &\quad + P[\{N=1\} \cap \{X_1 = 100\}] \\ &\quad + P[\{N=2\} \cap \{X_1 = 100\} \cap \{X_2 = 100\}] \\ &= 0.80 + 0.15 \cdot 0.70 + 0.05 \cdot 0.70 \cdot 0.70 \\ &= 0.9295 \\ &< 0.995 \end{aligned}$$

Der Kapitalbedarf beträgt daher 1100.

(c) Bei der Schadenexzedenten–Rückversicherung ist der Gesamtschaden des Erstversicherers durch

$$S_E \quad := \quad \sum_{k=1}^{N} \min\{X_k, 300\}$$

gegeben und es gilt $\Pi = 600$. Es gilt

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{k=1}^{N} \min\{X_k, 300\} + 600 \leq 1200\right] &= 1 \\ &\geq 0.995 \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} &P\left[\sum_{k=1}^{N} \min\{X_k, 300\} + 600 = 1200\right] \\ &= P\left[\sum_{k=1}^{N} \min\{X_k, 300\} = 600\right] \\ &= P[\{N=2\} \cap \{X_1 \geq 1000\} \cap \{X_2 \geq 1000\}] \\ &= 0.05 \cdot 0.30 \cdot 0.30 \\ &= 0.0045 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{k=1}^{N} \min\{X_k, 300\} + 600 \leq 1000\right] &= 1 - 0.0045 \\ &= 0.9955 \\ &\geq 0.995 \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} & P\left[\sum_{k=1}^{N} \min\{X_k, 300\} + 600 < 1000\right] \\ &= P\left[\sum_{k=1}^{N} \min\{X_k, 300\} < 400\right] \\ &= P[N=0] + P[N=1] + P[\{N=2\} \cap \{X_1 = 100\} \cap \{X_2 = 100\}] \\ &= 0.80 + 0.15 + 0.05 \cdot 0.70 \cdot 0.70 \\ &= 0.9745 \\ &< 0.995 \end{aligned}$$

Der Kapitalbedarf beträgt daher 1000.