Bericht zu den Prüfungen im November 1997 und im November 1998 über Mathematik der Schadenversicherung (Grundwissen)

Christian Hipp, Martin Morlock (Karlsruhe)

Zu jedem der Gebiete Grundlagen, Prämienkalkulation, Solvabilität, Risikoteilung und Reservierung wurde jeweils eine Aufgabe gestellt. Dazu gab es eine Zusatzaufgabe, welche nur gewertet wurde, wenn eine der anderen Aufgaben nicht bearbeitet worden war. Als Hilfsmittel war die klassische Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen. Die Zahl am Ende der Aufgabenstellung gibt jeweils die maximal erreichbare Punktzahl an. Die Klausur wurde als bestanden gewertet, wenn 1997 mindestens 36 der 90 möglichen Punkte und 1998 mindestens 36 von 85 der möglichen Punkte erreicht wurden.
In der Klausur 1997 waren folgende Aufgaben gestellt worden:

Aufgabe 1.

Was versteht man unter dem Ausgleich im Kollektiv? Wie entsteht er, und wie kann man ihn quantifizieren?

(15)

Lösung:

Ausgleich im Kollektiv bedeutet, daß die Schwankungen des Schadenverlaufs in einem wachsenden Bestand von Versicherungsverträgen nicht proportional zur Zahl der Verträge, sondern nur (grob) proportional zur Wurzel der Zahl der Verträge wächst. Die Gesamtschwankungen, auf den einzelnen Vertrag verteilt, werden kleiner.
Der Ausgleich im Kollektiv entsteht durch die (angenommene) Unabhängigkeit des Schadenverhaltens in den einzelnen Verträgen: dadurch ergibt sich die Varianz des Gesamtschadens als Summe der Varianzen der Schäden in den einzelnen Verträgen.
Messung des Risikos mit dem Variationskoeffizienten: dieser wird klein bei wachsendem Bestand gleichartiger, unabhängiger Risiken.
Messung mit Ruinwahrscheinlichkeiten: Das (für die Einhaltung einer gegebenen Ruinwahrscheinlichkeit bei einem unendlichen Planungshorizont) notwendige Risikokapital am Anfang wächst nicht mit der Größe des Bestandes.

Aufgabe 2.

a) Welche Schadenhöhenverteilungen kann man zur Modellierung von Großschäden benutzen? Geben Sie zwei Beispiele an.

b) Geben Sie eine Verteilung an, die zwar einen endlichen Erwartungswert, aber keine endliche Varianz besitzt.

(15)

Lösung:

a) Schadenhöhenverteilungen mit Heavy Tails, also etwa solche, deren Tails nicht exponentiell gegen Null konvergieren wie z. B. der Lognormalverteilungen oder der Loggammaverteilungen.

b) Eine Pareto-Verteilung mit einem Parameter a zwischen 1 und 2.

Aufgabe 3.

a) Erläutern Sie die Begriffe „Volumenmaß", „Tarifierungsmerkmal" und „Schadenbedarf". Geben Sie zu jedem Begriff ein Anwendungsbeispiel an.

b) Welche statistischen Methoden setzt man bei der Tarifierung ein?
c) Welche speziellen Probleme treten bei Prämienrabatten (z. B. Nichtraucher- oder Wenigfahrer-Rabatten) auf?

(15)

Lösung:

a) 1. Volumenmaße benutzt man, um unterschiedliche Varianzen bei Beobachtungen zu berücksichtigen. Benutzt werden: Zahl der Schäden oder Prämiensumme.

2. Tarifierungsmerkmale sind Größen, die Einfluß auf die Höhe der Versicherungsprämie haben. Bei der Kraftfahrtversicherung z. B. die Typklasse des versicherten Fahrzeuges.

3. Schadenbedarf ist der Erwartungswert (theoretisch oder empirisch) der Summe aller Schäden pro Periode in einem Vertrag. In der Kraftfahrtversicherung ergibt sich z. B. bei einer Schadenfrequenz von 0,1 und einer durchschnittlichen Schadenhöhe von 5.000 DM ein Schadenbedarf von 500 DM.

b) Multivariate Verfahren, also z. B. Lineare Modelle, verallgemeinerte Lineare Modelle.

c) Daten-Probleme (es liegen keine Verbands-Informationen über das Todesfallrisiko der Nichtraucher vor; der Zusammenhang von Schadenbedarf und Wenigfahren ist statistisch nicht gesichert); Abhängigkeit (Wie wirken zwei rabattauslösende Merkmale gemeinsam auf den Schadenbedarf? Ist die Akkumulation der Rabatte gerechtfertigt?); Finanzierung (Ist der Rabatt durch Erhöhung der Basisprämie finanziert?).

Aufgabe 4.

Ein Kollektiv eines Versicherungsunternehmens (VU) bestehe aus folgenden unterschiedlichen Risiken, bei denen Schäden stochastisch unabhängig eintreten:

Risikoart	Anzahl	Versicherungssumme VS
A	1	9
B	2	18
C	7	50

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Schadens S eines Risikos sei:

Risikoart	A	B	C
S = 0	0,7	0,7	0,9
S = 1/3 VS	0,1	0,1	0
S = 2/3 VS	0,1	0,1	0
S = VS	0,1	0,1	0,1

a) Berechnen Sie jeweils die Nettorisikoprämie für ein Risiko der Art A, B und C.

b) Beurteilen Sie die Risikoarten A, B und C anhand des Variationskoeffizienten des Schadens.

c) Wie groß ist der Variationskoeffizient des (Gesamt-)Schadenaufkommens des Kollektivs?

d) Das VU schließt (als Erstversicherer (EV)) einen Summenexzedenten-Rückversicherungsvertrag ab. Der Selbstbehalt des EV beträgt 6. Bestimmen Sie die (faire) Aufteilung der Nettorisikoprämien zwischen dem VU und dem Rückversicherer (RV). Wie verändert sich der Variationskoeffizient des (Gesamt-)Schadenaufkommens des VU durch die Rückversicherung (Berechnung)?
Geben Sie *ohne Rechnung* eine (gute) untere Schranke für den Variationskoeffizienten des vom RV zu regulierenden (Gesamt-)Schadenaufkommens an.

e) Das Risiko des Rückversicherers ändert sich in Abhängigkeit des Selbstbehalts SB des Erstversicherers. Wie groß ist das Maximum des Variationskoeffizienten des vom RV übernommenen (Gesamt-)Schadenaufkommens im vorliegenden Fall?

(30)

Lösung:

a) Nettorisikoprämie für Risiko der Art A: $0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}9 = 1{,}8$
B: $1{,}8 \cdot 2 = 3{,}6$
C: $0{,}1 \cdot 50 = 5{,}0$

b) Variationskoeffizient V

$$\text{Risikoart A}: \sqrt{\sigma^2}/\mu = \sqrt{(3^2+6^2+9^2)\cdot 0{,}1 - 1{,}8^2}/\mu = \sqrt{9{,}36}/1{,}8 = 1{,}700$$

$$\text{Risikoart B}: \sqrt{\sigma^2}/\mu = \sqrt{4\cdot 9{,}36}/(2\cdot 1{,}8) = 1{,}700$$

$$\text{Risikoart C}: \sqrt{\sigma^2}/\mu = \sqrt{50^2\cdot 0{,}1 - 5^2}/5 = \sqrt{225}/5 = 3$$

Folgerung: A und B sind gleich gefährlich;
C ist ein gefährlicheres Risiko.

c) V des (Gesamt-)Schadenaufkommens:
Aus der Unabhängigkeit der Schadenereignisse folgt:
Gesamtvarianz = Summe der Einzelvarianzen

$$V = \frac{\sqrt{9{,}36 + 2\cdot(4\cdot 9{,}36) + 7\cdot 225}}{1{,}8 + 2\cdot 3{,}6 + 7\cdot 5} = 0{,}926$$

d) Nettorisikoprämie bei einem SB des EV von 6:

bei Risikoart A:	beim EV $2/3 \cdot 1{,}8 = 1{,}2$,	beim RV	$1/3 \cdot 1{,}8 = 0{,}6$
B:	beim EV $1/3 \cdot 3{,}6 = 1{,}2$		$2/3 \cdot 3{,}6 = 2{,}4$
C:	beim EV $6/50 \cdot 5 = 0{,}6$		$44/50 \cdot 5 = 4{,}4$

V des (Gesamt-)Schadenaufkommens des EV:

Varianz des beim EV verbliebenen Einzelrisikos der Risikoart

A: $(2/3)^2 \cdot 9{,}36 = 4{,}16$
B: $(1/3)^2 \cdot 4 \cdot 9{,}36 = 4{,}16$
C: $(6/50)^2 \cdot 225 = 3{,}24$

Damit ergibt sich

$$V = \frac{\sqrt{4{,}16 + 2\cdot 4{,}16 + 7\cdot 3{,}24}}{1{,}2 + 2\cdot 1{,}2 + 7\cdot 0{,}6} = 0{,}76$$

Das Risiko wird also geringer.

Der Variationskoeffizient des vom RV übernommenen Schadens steigt monoton mit dem SB des EV. Er ist am kleinsten bei SB = 0, d.h., in diesem Fall übernimmt der RV den gesamten Schaden und sein V ist gleich dem V des (Gesamt-)Schadenaufkommens von Aufgabenteil c). Damit ist 0,926 die größte untere Schranke für den Variationskoeffizienten des vom RV übernommenen Schadens.

e) Der Variationskoeffizient des vom RV übernommenen Schadens wächst mit dem SB des EV. Übersteigt der SB den Wert 18, ist nur noch die Risikoart C von der Rückversicherung betroffen. Bei der Summenexzedenten-Rückversicherung haben wir es jeweils mit einer proportionalen Risikoaufteilung innerhalb der einzelnen Risikoarten zu tun. Bei einer proportionalen Risikoteilung ändert sich aber der Variationskoeffizient bekanntlich nicht.

Formal erhält man für 50 > SB > 18:

Erwartungswert des vom RV übernommenen Schadens eines Einzelrisikos:

$$(50 - \mathrm{SB}) \cdot 0.1$$

Varianz des vom RV übernommenen Schadens eines Einzelrisikos:

$$(50 - \mathrm{SB})^2 \cdot 0{,}1 - [(50 - \mathrm{SB}) \cdot 0{,}1]^2$$

Variationskoeffizient des vom RV übernommenen (Gesamt-)Schadenaufkommens:

$$V = \frac{\sqrt{7 \cdot ((50 - \mathrm{SB})^2 \cdot 0{,}1 - [(50 - \mathrm{SB}) \cdot 0{,}1]^2)}}{7 \cdot (50 - \mathrm{SB}) \cdot 0{,}1} = \frac{\sqrt{7 \cdot (0{,}1 - 0{,}1^2)}}{7 \cdot 0{,}1} = 1{,}134$$

unabhängig von 50 > SB > 18.

Aufgabe 5.

Die kumulierten Schadenaufwendungen C_{ik} der Anfalljahre 1991 bis 1996 und der Abwicklungsjahre 1991–1996 sind in dem folgenden Abwicklungsdreieck eingetragen:

Anfalljahr i		Abwicklungsjahr (Prämie)	k = 1	2	3	4	5	6
1991	1	(500)	242	352	402	442	472	482
1992	2	(600)	253	369	424	470	504	
1993	3	(730)	255	383	447	500		
1994	4	(900)	315	476	551			
1995	5	(1100)	370	510				
1996	6	(1300)	450					

a) Berechnen Sie die IBNR-Reserve für die Anfalljahre 1992 und 1993 mit dem Chain-Ladder-Verfahren.

b) Berechnen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren eine Schätzung für die (nicht kumulierten) Schadenaufwendungen des Anfalljahres 1993 in den Jahren 1997 und 1998.

c) Lösen Sie a) mit dem Verfahren der (anfalljahrunabhängigen) Schadenquotenzuwächse (AUSQZ).

(15)

Lösung:

Aus dem Abwicklungsdreieck der C_{ik}

Anfalljahr i		Abwicklungsjahr (Prämie)	k = 1	2	3	4	5	6
1991	1	(500)	242	352	402	442	472	482
1992	2	(600)	253	369	424	470	504	
1993	3	(730)	255	383	447	500		
1994	4	(900)	315	476	551			
1995	5	(1100)	370	510				
1996	6	(1300)	450					

erhalten wir: $\hat{f}_5 = \dfrac{482}{472} = 1{,}021$

$$\hat{f}_4 = \frac{472+504}{442+470} = 1{,}070$$

und als IBNR-Reserve für das Anfalljahr 1992

$$\hat{R}_2 = (\hat{f}_5 - 1) \cdot C_{25} = (1{,}021 - 1) \cdot 504 = 10{,}584$$

und für das Anfalljahr 1993

$$\hat{R}_3 = (\hat{f}_4 \cdot \hat{f}_5 - 1) \cdot C_{34} = (1{,}070 \cdot 1{,}021 - 1) \cdot 500 = 46{,}235.$$

b) Als Schätzung der Schadenaufwendungen $\hat{S}_{35}$ bzw. $\hat{S}_{36}$ des Anfalljahres 1993 für die Abwicklungsjahre 1997 bzw. 1998 erhält man:

$$\hat{S}_{35} = \hat{C}_{35} - C_{34} = \hat{f}_4 \cdot C_{34} - C_{34} \qquad = 1{,}070 \cdot 500 - 500 \qquad = 35$$

$$\hat{S}_{36} = \hat{C}_{36} - \hat{C}_{35} = \hat{f}_4 \cdot \hat{f}_5 \cdot C_{34} - \hat{f}_4\, C_{34} = 1{,}070 \cdot 1{,}021 \cdot 500 - 1{,}070 \cdot 500 = 11{,}235$$

c) Mit den Schadenquotenzuwächsen

$$\hat{s}_5 = \frac{30+34}{500+600} = 0{,}058 \quad \text{und} \quad \hat{s}_6 = \frac{10}{500} = 0{,}020$$

für k = 5 und k = 6 erhält man als Schätzung für die Schadenreserve des Anfalljahres 1992 bzw. 1993

$$\hat{R}_2 = \hat{s}_6 \cdot 600 = 12 \quad \text{und} \quad \hat{R}_3 = (\hat{s}_5 + \hat{s}_6) \cdot 730 = 56{,}94.$$

Zusatzaufgabe.

a) Beschreiben Sie das kollektive Modell. Wo kann man es einsetzen?

b) Welche Funktion hat die Schwankungsrückstellung in der Schadenversicherung?

c) Welche Nachteile hat die heute gültige Bestimmung über die Solvabilitätsspanne in der Schadenversicherung?

(15)

Lösung:

a) Das kollektive Modell leitet die Gesamtschadenverteilung eines Versicherungsbestandes ab aus der Verteilung der Schadenzahl und der Schadenhöhen. Hierbei bleiben Informationen über die Bestandsstruktur unberücksichtigt: Der Bestand wird als black box aufgefaßt, das Schadengeschehen nur mit obigen Größen beschrieben. Es kann demnach überall dort eingesetzt werden, wo eine Inhomogenität des Bestandes durch die Verwendung von Tarifmerkmalen oder anderen Kovariaten berücksichtigt werden kann.

b) Die Schwankungsreserve soll zur Glättung des technischen Ergebnisses eines Versicherungsunternehmens beitragen: durch Entnahme bei hohen und Zuführung bei niedrigen Gesamtschadensummen.

c) Die Solvabilitätsspanne ist volumenbezogen, die Risikostruktur wird nur ungenügend berücksichtigt.

In der Klausur 1998 wurden folgende Aufgaben gestellt:

Aufgabe 1.

Im Rahmen des kollektiven Modells wird in drei Versicherungsbeständen die Anzahl der Schäden a) mit einer Poissonverteilung, b) mit einer Negativen Binomialverteilung und c) mit einer Binomialverteilung modelliert. Für alle drei Bestände haben wir dieselbe Schadenhöhenverteilung und dieselbe Nettorisikoprämie.

Kann man sagen, daß der Versicherungsbestand b) risikoreicher als a) ist und daß der Bestand a) risikoreicher als c) ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

(15)

Lösung:

Der Gesamtschaden S im Versicherungsbestand wird mit der Schadenanzahl N und den Schadenhöhen $X_1, X_2, \ldots$ modelliert, wobei die Schadenhöhen in den Fällen a), b) und c) alle dieselbe Verteilung besitzen und die Schadenanzahl die angegebenen Verteilungen aufweisen. Wegen

$$E[S] = E[N]\,E[X_1]$$

müssen die Erwartungswerte von N in den drei Fällen a), b) und c) übereinstimmen. Zum Vergleich der Risiken betrachten wir die Varianz von S. Für diese gilt

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(X_1)\,E[N] + \mathrm{Var}(N)\,(E[X_1])^2. \tag{1}$$

Um die Fälle a), b) und c) unterscheiden zu können, bezeichnen wir den Gesamtschaden jeweils mit S_a, S_b und S_c sowie die Schadenanzahl jeweils mit N_a, N_b und N_c. Es gilt also

$$E[S_a] = E[S_b] = E[S_c]$$

und damit auch

$$E[N_a] = E[N_b] = E[N_c]\,.$$

Somit ist der erste Term auf der rechten Seite von (1) in allen drei Fällen derselbe. Wegen $E[N_a] = \mathrm{Var}(N_a)$ und $E[N_b] < \mathrm{Var}(N_b)$ gilt $\mathrm{Var}(N_a) < \mathrm{Var}(N_b)$, und damit ist auch die Varianz im Falle b) größer als im Falle a):

$$\mathrm{Var}(S_a) < \mathrm{Var}(S_b).$$

Versicherungsbestand b) ist also risikoreicher als Versicherungsbestand a).
Wir erhalten für den Fall c) ebenso

$$\mathrm{Var}(N_c) < E[N_c] = E[N_a] = \mathrm{Var}(N_a).$$

und damit

$$\mathrm{Var}(S_c) < \mathrm{Var}(S_a).$$

Versicherungsbestand a) ist also risikoreicher als Versicherungsbestand c).

Aufgabe 2.

Bei einem Versicherungsvertrag sei der Gesamtschaden pro Versicherungsperiode gegeben durch eine poissonverteilte Schadenanzahl N mit Mittelwert 0,1 und Schadenhöhen $X_1, X_2, \ldots,$ die eine Exponentialverteilung mit dem Mittelwert 1000 besitzen. Es ist eine Selbstbeteiligung in Höhe von 693 pro Schaden vereinbart. Für diesen Versicherungsvertrag wird eine Basisprämie c entsprechend dem Äquivalenzprinzip verlangt. Wenn der Versicherer während der Periode keine Schadenzahlung zu leisten hat, dann erfolgt eine Beitragsrückgewähr in Höhe der Hälfte der Basisprämie an den Versicherungsnehmer. Berechnen Sie c!
Verwenden Sie hierbei die Approximation $\ln(2) = 0{,}693$ und die Reihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\,.$$

(25)

Lösung:

Die Basisprämie c wird nach dem Äquivalenzprinzip berechnet, so daß die erwartete Leistung des Versicherungsunternehmens der erwarteten Prämienzahlung des Versicherungsnehmers entspricht. Zinsen und Kosten werden hier nicht berücksichtigt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Schadenhöhe $X:=X_1$ die Selbstbeteiligungshöhe nicht überschreitet, ist

$$\begin{aligned} P\{X \le 693\} &= \int_0^{693} \frac{1}{1000} \exp(-x/1000)\,dx \\ &= \int_0^{0,693} \exp(-x)\,dx = -\exp(-x)\Big|_0^{0,693} \\ &= 1-\exp(-0,693) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die erwartete Leistung des Versicherungsunternehmens pro Schaden ist entsprechend

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(X-693)^+] \\ &= \int_{693}^{\infty} (x-693) \frac{1}{1000} \exp(-x/1000)\,dx \\ &= 1000 \int_{0,693}^{\infty} (x-0,693) \exp(-x)\,dx \\ &= 1000 \exp(-0,693) \int_0^{\infty} x \exp(-x)\,dx = 500. \end{aligned}$$

Sind n Schäden eingetreten, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle n Schadenhöhen den Wert 693 nicht überschreiten, 2^{-n}. Die Wahrscheinlichkeit, daß kein Schaden die Selbstbeteiligungshöhe 693 überschreitet, ist dann in unserem Modell

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P\{N=n\}\, 2^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0,1^n}{n!} \exp(-0,1)\, 2^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{0,1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \exp(-0,1) \\ &= \exp(0,05) \exp(-0,1) = \exp(-0,05). \end{aligned}$$

Ist c die Basisprämie, so ist der Erwartungswert der Prämienzahlung

$$c(1-\exp(-0,05)) + \frac{c}{2} \exp(-0,05).$$

Der Erwartungswert der Leistung des Versicherungsunternehmens berechnet sich so:

$$E[S] = E[N] \cdot E[Y] = 0,1 \cdot 500 = 50.$$

Nach dem Äquivalenzprinzip ergibt sich c (als „Nettorisikoprämie") aus der Gleichung

$$c(1-\exp(-0,05)) + \frac{c}{2} \exp(-0,05) = 50.$$

oder

$$c = \frac{50}{1-\frac{1}{2}\exp(-0,05)} = 95,35.$$

(Die Berechnung der Zahl 95,35 war nicht unbedingt erforderlich.)

Aufgabe 3.

1. Welche Schadenhöhenverteilungen eignen sich zur Modellierung von Großschäden? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Geben Sie je ein Beispiel für eine Großschadenverteilung, bei der a) alle Momente und b) nur die ersten beiden Momente existieren.

(10)

Lösung:

1. Als Modelle für Großschäden eignen sich Großschadenverteilungen wie die Lognormalverteilung oder die Paretoverteilung. Diese Verteilungen zeichnen sich dadurch aus, daß relativ viel Masse bei großen Werten liegt, d. h., große Schäden treten relativ häufig auf.

2. a) Die Lognormalverteilung mit beliebigen Parametern μ und σ^2
   b) Eine Paretoverteilung mit einem Parameter α zwischen 2 und 3 der Dichte $f(x) = \alpha \cdot x^{-\alpha-1}$ $(x>1, \alpha>0)$

Aufgabe 4.

Ein Kollektiv eines Erstversicherers bestehe aus den beiden Risiken I und II mit stochastisch unabhängigen Schadenverläufen, wobei gilt:

	Wahrscheinlichkeit für die Schadenzahl		Versicherungs-summe	Wahrscheinlichkeit für	
	0	1	VS	Teilschaden 1/3 VS	Totalschaden VS
Risiko I	0,8	0,2	900	0,6	0,4
Risiko II	0,7	0,3	600	0,2	0,8

a) Berechnen Sie den Schadenerwartungswert und den Variationskoeffizienten des Schadens des Kollektivs.

b) Wie groß ist der Erwartungswert und der Variationskoeffizient des beim Erstversicherers verbleibenden Schadens des Kollektivs bei einer Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit einer Priorität von 500?

c) Wie groß ist der Erwartungswert und der Variationskoeffizient des beim Erstversicherers verbleibenden Schadens des Kollektivs bei einer Summenexzedenten-Rückversicherung mit einem Selbstbehalt von 500?

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a), b) und c) hinsichtlich der Größe des Variationskoeffizienten.

e) Lösen Sie a) bis c) für den Fall, daß das Kollektiv des Erstversicherers aus jeweils drei Risiken I und II besteht und die Schäden stochastisch unabhängig auftreten.

(15)

Lösung:

a) Schadenerwartungswert E des Kollektivs:

$$\begin{aligned} E &= 0{,}2 \cdot (0{,}6 \cdot 300 + 0{,}4 \cdot 900) + 0{,}3 \cdot (0{,}2 \cdot 200 + 0{,}8 \cdot 600) \\ &= 108 + 156 = 264 \end{aligned}$$

Varianz Var des Kollektivs:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var} &= (0{,}12 \cdot 300^2 + 0{,}08 \cdot 900^2 - 108^2) + (0{,}06 \cdot 200^2 + 0{,}24 \cdot 600^2 - 156^2) \\ &= 63\,936 + 64\,464 = 128\,400 \end{aligned}$$

Variationskoeffizient V des Kollektivs:

$$V = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}}}{E} = 1{,}3573$$

b) Erwartungswert E des beim Erstversicherer (EV) verbleibenden Schadens:

$$E = 0{,}2 \cdot (0{,}6 \cdot 300 + 0{,}4 \cdot 500) + 0{,}3 \cdot (0{,}2 \cdot 200 + 0{,}8 \cdot 500)$$
$$= 76 + 132 = 208$$

Varianz Var des beim EV verbleibenden Schadens:

$$\text{Var} = (0{,}12 \cdot 300^2 + 0{,}08 \cdot 500^2 - 76^2) + (0{,}06 \cdot 200^2 + 0{,}24 \cdot 500^2 - 132^2)$$
$$= 25\,024 + 44\,976 = 70\,000$$

Variationskoeffizient des beim EV verbleibenden Schadens:

$$V = \frac{\sqrt{\text{Var}}}{E} = 1{,}272$$

c) Erwartungswert des beim EV verbleibenden Schadens:

$$E = 0{,}2 \cdot (0{,}6 \cdot 300 \cdot 5/9 + 0{,}4 \cdot 500) + 0{,}3 \cdot (0{,}2 \cdot 200 \cdot 5/6 + 0{,}8 \cdot 500)$$
$$= 60 + 130 = 190$$

Varianz Var des beim EV verbleibenden Schadens:

$$\text{Var} = (0{,}12 \cdot (300 \cdot 5/9)^2 + 0{,}08 \cdot 500^2 - 60^2) + (0{,}06 \cdot (200 \cdot 5/6)^2 + 0{,}24 \cdot 500^2 - 130^2)$$
$$= 19\,733{,}33 + 44\,766{,}67 = 64\,500$$

Variationskoeffizient V des beim EV verbleibenden Schadens:

$$V = \frac{\sqrt{\text{Var}}}{E} = 1{,}3367$$

d) Beide Variationskoeffizienten des EV und damit das vom EV getragene Risiko werden nach Einführung einer Rückversicherung kleiner.

Die stärkere Verringerung erfolgt bei der Schadenexzedentenrückversicherung, da durch die Kupierung der größeren Schäden eine stärkere Homogenisierung des Bestands vorgenommen wird.

e) Für a) gilt

Erwartungswert: 3 E
Varianz: 3 Var
Variationskoeffizient: $1{,}3573/\sqrt{3} = 0{,}7836$;
entsprechendes gilt für b) und c).

Aufgabe 5.

Ein Versicherungsunternehmen (VU) besitzt zwei Teilbestände, bei denen Spätschäden auftreten können. Die maximale Abwicklungsdauer beträgt jeweils 5 Jahre. Die kumulierten bezahlten Schäden sind in den folgenden Abwicklungsdreiecken angegeben:

Teilbestand I

	Abwicklungsjahr	k = 1	2	3	4	5
Anfalljahr	(Prämie)					
i = 1	(50)	10	30	38	43	48
2	(60)	15	40	50	58	
3	(57)	12	32	44		
4	(60)	16	36			
5	(70)	20				

Teilbestand II

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k = 1	2	3	4	5
i=1	(51)	20	30	35	36	37
2	(53)	25	35	39	42	
3	(57)	25	30	33		
4	(61)	30	40			
5	(70)	30				

a) Schätzen Sie die Spätschadenreserve für das 3. Anfalljahr beim Teilbestand I mit dem Chain-Ladder-Verfahren

b) Für die Berechnung der Spätschadenreserven mit dem Chain-Ladder-Verfahren sind zwei Varianten vorstellbar:

(A) Für beide Teilbestände wird das Chain-Ladder-Verfahren getrennt durchgeführt und die Spätschadenreserven anschließend addiert.

(B) Zunächst werden die bezahlten Schäden der entsprechenden Jahre von Teilbestand I und II addiert und anschließend wird das Chain-Ladder-Verfahren auf die so zusammengefaßten Werte angewendet.

Führen die beiden Varianten auf das gleiche Ergebnis? (Begründen Sie Ihre Antwort)
Geben Sie ferner an, welcher dieser beiden Vorgehensweisen der Vorzug zu geben ist.

c) Berechnen Sie einen Schätzwert für die Spätschadenreserve des dritten Anfalljahres in Teilbestand I mit dem Verfahren der (anfalljahrunabhängigen) Schadenquotenzuwächse (AUSQZ).

(20)

Lösung:

a) Für die Abwirkungskoeffizienten gilt

$$\hat{f}_4 = \frac{48}{43} = 1{,}116$$

$$\hat{f}_3 = \frac{101}{88} = 1{,}148$$

Damit erhält man als Spätschadenreserve $\hat{R}_3^I$ für das 3. Anfalljahr

$$\hat{R}_3^I = C_{33}(\hat{f}_3 \cdot \hat{f}_4 - 1) = 44 \cdot (1{,}148 \cdot 1{,}116 - 1) = 12{,}371$$

b) Nein, die Schätzungen sind nicht additiv.

Gegenbeispiel:
Für Teilbestand I erhält man für $\hat{R}_2^I$

$$\hat{R}_2^I = 58 \cdot \left(\frac{48}{43} - 1\right) = 6{,}744,$$

und für Teilbestand II erhält man für $\hat{R}_2^{II}$

$$\hat{R}_2^{II} = 42 \cdot \left(\frac{37}{36} - 1\right) = 1{,}167$$

Für den zusammengefaßten Gesamtbestand $\hat{R}_2^{\Sigma}$ erhält man

$$\hat{R}_2^{\Sigma} = (58 + 42) \cdot \left(\frac{48 + 37}{43 + 36} - 1\right) = 7{,}595 \neq 6{,}744 + 1{,}167 = \hat{R}_2^I + \hat{R}_2^{II}.$$

Sofern die Bestände nicht signifikant unterschiedliche Entwicklungen aufweisen – was hier nicht der Fall ist – sollten die beiden Bestände im „Einklang mit der Aggregationsphilosophie" des Chain-Ladder-Verfahrens vor der Anwendung dieses Verfahrens zusammengefaßt werden (Ausgleich von Zufallsschwankungen).

c) Für die Schätzung der Schadenquotenzuwächse erhält man

$$\hat{s}_5 = \frac{5}{50} = 0{,}1$$

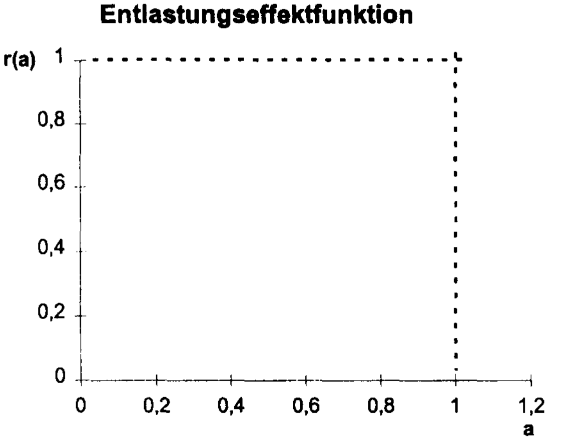
$$\hat{s}_4 = \left(\frac{5+8}{50+60}\right) = 0{,}118$$

und damit ergibt sich für die Schätzung der Spätschadenreserve $\hat{R}_3^I$ mit dem AUSQZ-Verfahren

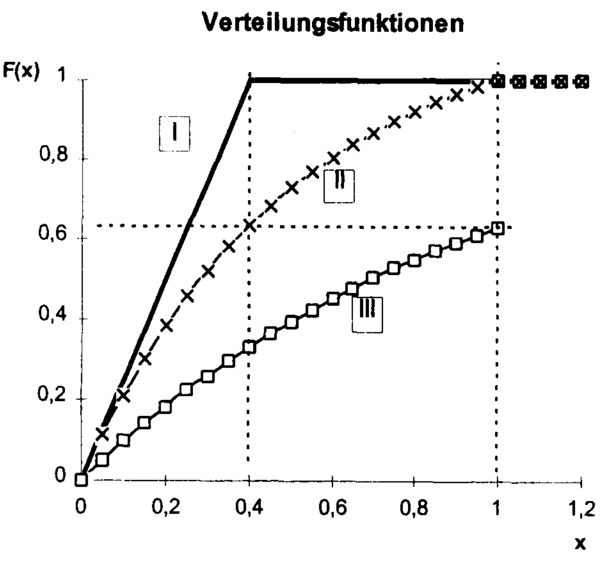
$$\hat{R}_3^I = (\hat{s}_4 + \hat{s}_5) \cdot P_3 = (0{,}1 + 0{,}118) \cdot 57 = 12{,}426.$$

Zusatzaufgabe

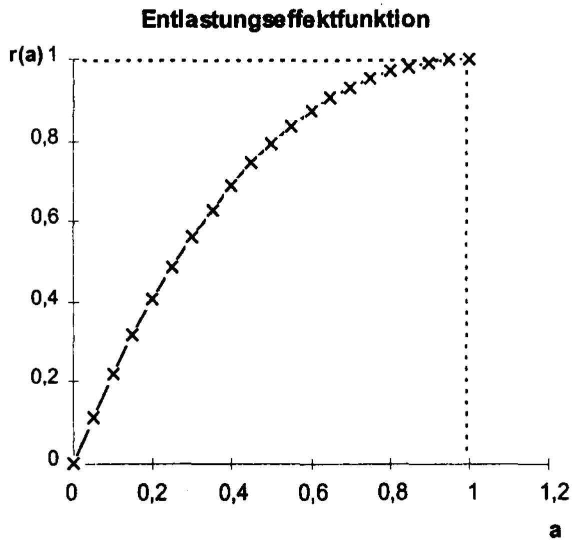
a) Berechnen und zeichnen Sie die Entlastungseffektfunktion für eine auf dem Interval [0,1] gleichverteilte Schadenhöhe bei Verwendung einer Abzugsfranchise a.



b) Die Verteilungsfunktionen der Schadenhöhen von drei Risiken I, II und III haben die folgende Gestalt:



Die Entlastungseffektfunktion von Risiko II ist in der folgenden Abbildung wiedergegeben.



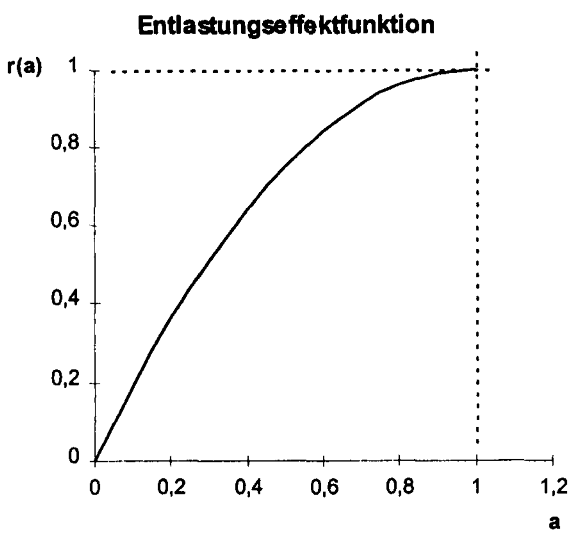
Skizzieren Sie in dieser Abbildung den Verlauf der Entlastungseffektfunktion von Risiko I und von Risiko III.

(15)

Lösung:

a) Die Entlastungseffektfunktion hat hier die Gestalt:

$$r(a) = \frac{\int_0^a x\,dx + a(1-a)}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{\frac{1}{2}a^2 + a - a^2}{\frac{1}{2}\cdot 1^2} = 2a - a^2$$



b) Der Entlastungseffekt von Risiko I nimmt für a≥0,4 den Wert 1 an, da keine größeren Schäden als 0,4 auftreten; sie verbleiben bei einer Abzugsfranchise ab 0,4 alle beim VN.

Der Verlauf der Funktion berechnet sich (eine Berechnung war nicht verlangt) gemäß

$$r(a) = \frac{\int_0^a x \frac{1}{0,4} dx + a\left(1 - \frac{1}{0,4} a\right)}{\int_0^{0,4} x \frac{1}{0,4} dx}$$

$$= \frac{2,5 \frac{1}{2} a^2 + a - 2,5 a^2}{2,5 \frac{1}{2} 0,4^2}$$

$$= \frac{0,8 a - a^2}{0,16} \qquad \text{für } 0 \le a \le 0,4.$$

Die Verteilungsfunktion der Schadenhöhe von Risiko II verläuft proportional zu der Verteilungsfunktion von Risiko III. Risiko II hat aber eine positive Wahrscheinlichkeitsmasse von 0,39 in a = 1 (gestutzte Verteilung). Die Schadenhöhe 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0.39 führt dazu, daß r(a) eine gewichtete Summe der Entlastungseffektfunktion von Risiko II und der Hauptdiagonalen ist, da die Hauptdiagonale die Entlastungseffektfunktion eines in 1 konzentrierten Schadens ist.