Musterlösungen zum Grundwissen Schadenversicherungsmathematik, Klausur vom 11. November 1995 und vom 16. November 1996

Christian Hipp, Martin Morlock (Karlsruhe) und *Thomas Witting* (München)

Im November 1995 wurde die erste Klausur in Grundwissen I, Schadenversicherungsmathematik, im Ausbildungsgang der DAV/DGVM zum Aktuar geschrieben. Die zweite derartige Klausur fand dann wieder im November 1996 statt. Für die Bearbeitung der Klausuren standen jeweils 90 Minuten zur Verfügung. Als Arbeitsmaterial war eine Formelsammlung zugelassen, die folgenden Inhalt hatte:

1. Definitionen: Verteilungsfunktion, Verteilungsdichte/Frequenzfunktion, Momente, Erwartungswert, Varianz, Variationskoeffizient, Schiefe, Kovarianz, bedingte Wahrscheinlichkeit.
2. Formeln für Erwartungswert und Varianz bei zufälligen Summen und bedingten Zufallsvariablen.
3. Definition, Erwartungswert und Varianz folgender Verteilungen: Binomialverteilung, Poissonverteilung, Negative Binomialverteilung, Exponentialverteilung, Gammaverteilung, Normalverteilung, Lognormalverteilung, Pareto-Verteilung, Betaverteilung.
4. Tabellen zur Normal-, t- und χ^2-Verteilung.
5. Formeln zum Anpassungskoeffizient und zur Ruinwahrscheinlichkeit sowie zu gestutzten Momenten.
6. Schätzer für die Varianzkomponenten im einfachen Credibility-Modell und
7. Formeln der Normal-Power-Approximation.

Zu jedem der Gebiete Stochastische Grundlagen, Prämienkalkulation, Risikoteilung, Reservierung und Solvabilität waren Aufgaben zu lösen. Die Zusatzaufgabe wurde nur gewertet, wenn eine der anderen Aufgaben nicht bearbeitet wurde. Die Zahl am Ende der Aufgabenstellung gibt die maximal erreichbare Punktzahl an.

Klausuraufgaben des Jahres 1995

Die Klausur war bestanden, wenn 36 der 90 möglichen Punkte erreicht wurden.

Aufgabe 1.

Durch die Einführung einer Selbstbeteiligung (Abzugsfranchise) wird zwar die Nettoprämie kleiner, das Risiko des Versicherungsunternehmens – gemessen an der Größe des Variationskoeffizienten – wird hingegen größer. Zeigen Sie dies am Beispiel

a) eines exponentialverteilten Schadenbedarfs und
b) eines paretoverteilten Schadenbedarfs. (20)

Lösung:

Sei X der Schadenbedarf. Nach der Einführung einer Selbstbeteiligung in Höhe von M ist die Entschädigung durch den Versicherer gegeben durch $Y := (X-M)^+$. Wir zeigen, daß in den genannten Fällen $M \to \mathrm{Var}(X-M)^+/E^2(X-M)^+$ wachsend in M ist.

a) Für exponentialverteiltes X mit Mittelwert $1/\theta$ gilt:

$$\beta_k := E[(X-M)^+]^k = \int_M^\infty (x-M)^k\, \theta \exp(-\theta x)\, dx$$
$$= \exp(-\theta M) \int_0^\infty y^k\, \theta \exp(-\theta y)\, dy = \exp(-\theta M)\, \theta^{-k}\, \Gamma(k+1).$$

Die Nettorisikoprämie

$$\beta_1 = \exp(-\theta M)\,\theta^{-1}$$

fällt in M. Für den Variationskoeffizienten V K(Y) von Y ergibt sich

$$VK(Y)^2 = \beta_2/\beta_1^2 - 1 = 2\exp(\theta M) - 1,$$

und dies wächst mit M.

b) Die Pareto-Verteilung mit den Parametern a, x_0 hat die Dichte

$$x \to \frac{a}{x_0}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-(a+1)}, \quad x > x_0.$$

Wir betrachten nur Selbstbehalte größer als x_0 und $a > 2$. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\alpha_k(M) &:= \int_M^\infty x^k \frac{a}{x_0}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-(a+1)} dx \\ &= a\,x_0^a \int_M^\infty x^{k-a-1}\,dx = \frac{a\,x_0^a}{a-k} M^{k-a}, \; k < a.\end{aligned}$$

Die Nettorisikoprämie

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \int_M^\infty (x-M)\frac{a}{x_0}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-(a+1)} dx \\ &= \alpha_1(M) - M\,\alpha_0(M) = \frac{a\,x_0^a}{a-1} M^{1-a} - M\frac{a\,x_0^a}{a} M^{-a} \\ &= M^{1-a} x_0^a\left(\frac{a}{a-1} - 1\right) = \frac{M^{1-a}\,x_0^a}{a-1}\end{aligned}$$

ist fallend in M. Da der Variationskoeffizient nicht vom Skalenparameter x_0 abhängt, genügt es, den Fall $x_0 = 1$ zu betrachten. Dann berechnet sich β_2 so:

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \int_M^\infty (x^2 - 2Mx + M^2)\,a\,x^{-(a+1)}\,dx \\ &= \alpha_2(M) - 2M\,\alpha_1(M) + M^2\,\alpha_0(M) = \frac{a}{a-2}M^{2-a} - 2M\frac{a}{a-1}M^{1-a} + M^2 M^{-a} \\ &= M^{2-a}\left(\frac{a}{a-2} - 2\frac{a}{a-1} + 1\right).\end{aligned}$$

Damit wird

$$\beta_2/\beta_1^2 = \frac{M^{2-a}}{M^{2-2a}}(a-1)^2\left(\frac{a}{a-2} - 2\frac{a}{a-1} + 1\right),$$

und dies ist wachsend in M.

Aufgabe 2.

Welche Bedeutung hat der Anpassungskoeffizient? Von welchen Größen hängt er ab? Wie hängt er konkret von der Bestandsgröße ab? (10)

Lösung:

Der Anpassungskoeffizient R hat eine Bedeutung in der Ruintheorie, insbesondere bei der Cramer-Lundberg-Abschätzung für die Ruinwahrscheinlichkeit.

(i) Bei *diskreter Zeit* betrachtet man stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen X_i (X_i ist der Gesamtschaden für das Jahr i) und eine konstante Jahresprämie c. Der Anpassungskoeffizient ist die positive Lösung der Gleichung

$$E \exp(R(X_1 - c)) = 1.$$

Damit gilt nach Cramer und Lundberg für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s)$ bei Startkapital s:

$$\psi(s) = P\{\text{es gibt ein n mit } \sum_{i=1}^{n} X_i > n c + s\} \leq \exp(-R s).$$

Er hängt ab von der Verteilung von X_1 und von c.

(ii) Bei *stetiger Zeit* betrachtet man den klassischen Lundberg-Schadenprozeß $S(t)$, $t \geq 0$,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (N(t)\text{: Anzahl der Schäden bis t})$$

mit Parametern λ (Intensität), Q (Schadenhöhenverteilung) und c (Prämienintensität), und hier ist der Anpassungskoeffizient die positive Lösung der Gleichung

$$\lambda + R c = \lambda \int \exp(R x)\, Q(dx).$$

Er hängt ab von λ, Q und c. Hier ist die Abschätzung analog:

$$\psi(s) = P\{\text{es gibt ein t mit } S(t) > c t + s\} \leq \exp(-R s).$$

R ist unabhängig von der Bestandsgröße. Das ist im stetigen Fall so zu begründen: Vergrößert man den Bestand um den Faktor k, dann wird λ zu λk und c wird zu $c k$, während Q unverändert bleibt. Die Definitionsgleichung für den Anpassungskoeffizienten des neuen Bestandes lautet dann

$$\lambda k + R c k = \lambda k \int \exp(R x)\, Q(dx),$$

und diese ist äquivalent zur Definitionsgleichung im ursprünglichen Bestand.
Im diskreten Fall argumentiert man so: Ein großer Bestand entsteht durch Zusammenlegen zweier äquivalenter Bestände, die Jahresgesamtschäden dieser beiden Teilbestände sind Y_i und Z_i, die Prämien sind c_Y und c_Z, die Anpassungskoeffizienten sind in beiden Teilbeständen gleich R. Die Teilbestände werden als stochastisch unabhängig angenommen. Dann ist R auch Lösung der Gleichung für den Anpassungskoeffizienten des großen Bestandes:

$$E \exp(R(Y_1 + Z_1 - c_Y - c_Z)) = E \exp(R(Y_1 + c_Y))\, E \exp(R(Z_1 - c_Z)) = 1.$$

Aufgabe 3.

In der Tabelle

	A	B	C	D	E	F	G
1	3	3	2	3	4	3	0,4
2	1	4	1	2	2	2	1,2
3	2	3	3	4	1	2,6	1,04
4	4	2	2	1	0,5	1,9	1,44
5	6	1	4	1	2	2,8	3,76
6	3,2	2,6	2,4	2,2	1,9	2,46	1,568
7	2,96	1,04	1,04	1,36	1,44	1,568	7,81

sind in den Feldern A 1 bis E 5 der jeweilige Schadenbedarf verschiedener Risiken angegeben, und zwar aufgeschlüsselt nach Merkmal I mit Ausprägungen A bis E und nach Merkmal II mit den Ausprägungen 1 bis 5. Welche Größe stellt eine Entscheidungshilfe dar für die Frage, ob die Nettorisikoprämie nach Merkmal I oder nach Merkmal II differenziert werden soll? Wie lautet Ihre Empfehlung?
Die Zeile 6, A bis E, enthält den jeweiligen mittleren Schadenbedarf aller Risiken mit Merkmal I, Ausprägung A bis E. Die Spalte F, 1 bis 5, enthält den jeweiligen mittleren Schadenbedarf aller Risiken mit Merkmal II, Ausprägung 1 bis 5. Zeile 7 und Spalte G enthalten die zugehörigen

mittleren quadratischen Fehler. F 7 und G 6 sind die Mittel dieser mittleren quadratischen Fehler, also z. B.

$$G6 = (G1 + \ldots + G5)/5.$$

Schließlich ist G 7 das arithmetische Mittel aller quadrierten Schadenbedarfe, und F 6 ist das arithmetische Mittel aller Schadenbedarfe. (20)

Lösung:

Als Entscheidungshilfe wird die Summe der entsprechenden Fehlerquadrate und die Anzahl der Parameter benutzt. Sind X_{ij} die 25 Beobachtungen und $\hat{\mu}_{ij}$ die geschätzten Erwartungswerte im Modell, so ist diese Summe

$$S := \sum_{i,j} (X_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2/25.$$

Im einfachsten Modell $\mu_{ij} = \mu$ ist $\hat{\mu}_{ij} = 2{,}46$, und $S_0 := S = 7{,}81 - 2{,}46^2 = 1{,}7584$. Die Zahl der Parameter ist hier 1.
Im Modell I, in dem nur nach Merkmal I differenziert wird, also $\mu_{ij} = \mu_i$, wird

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{1}{5} \sum_j X_{ij},$$

und damit ist $S_I := S = 1{,}568$. Derselbe Wert ergibt sich für Merkmal II: $S_{II} = 1{,}568$. Die Zahl der Parameter ist hier 5.
Im vollen Modell mit 25 Parametern ist $S_V := S = 0$. Der Genauigkeitsgewinn pro zusätzlichem Parameter ist demnach

$$(1{,}7584 - 1{,}568)/4 = 0{,}0476$$

beim Übergang vom einfachsten Modell zum Modell I (oder II), und

$$1{,}568/20 = 0{,}0784$$

beim Übergang vom Modell I (oder II) zum vollen Modell. Man kann daher empfehlen, die Differenzierung nach beiden Merkmalen durchzuführen.

Aufgabe 4.

Ein Erstversicherungsunternehmen erhält für die Versicherung eines Haftpflichtrisikos mit Dekkungssumme DM 2.000.000 eine bedarfsgerechte Nettorisikoprämie von DM 10.000. Ein Rückversicherer übernimmt von diesem Risiko pro Schaden den DM 500.000 übersteigenden Betrag. Welcher Betrag steht dem Rückversicherer als Nettorisikoprämie unter den Voraussetzungen zu, daß

(i) die Schäden des Risikos einer Exponentialverteilung folgen und
(ii) die mittlere Entschädigung des Versicherungsnehmers DM 500.000 beträgt? (20)

Hinweis: $\theta = 0{,}00196$ ist Lösung von $500\,\theta = 1 - \exp(-2.000\,\theta)$.

Lösung:

Zur Vereinfachung der Schreibweise verwenden wir die Geldeinheit 1.000 DM. Dann wird die Schadenhöhe des Risikos beschrieben durch eine Zufallsvariable X, die exponentialverteilt ist derart, daß die geleistete Entschädigung des Erstversicherers $Y = \min(X, 2000)$ den Erwartungswert 500 hat, also

$$EY = \int_0^{2.000} x\,\theta \exp(-\theta x)\,dx + 2.000 \int_{2.000}^{\infty} \theta \exp(-\theta x)\,dx = 500$$

erfüllt. Die Formelsammlung ergibt wegen

$$\begin{aligned} EY &= EX - P\{X > 2.000\}\, E(X \mid X > 2.000) + 2.000\, P\{X > 2.000\} \\ &= \frac{1}{\theta} - \exp(-2.000\,\theta)\left(\frac{1}{\theta}(1 + 2.000\,\theta) - 2.000\right) \end{aligned}$$

den Wert

$$E\,Y = \frac{1}{\theta}(1-\exp(-2.000\,\theta)),$$

und dies hat nach dem Hinweis den Wert 500 für $\theta = 0{,}00196$. Die Nettorisikoprämie des Erstversicherers ist 10, also ist die mittlere Schadenanzahl 0,02.
Gefragt ist nach der Nettorisikoprämie des Rückversicherers $0{,}02\,E(Y-500)^+$.

$$\begin{aligned}
E(Y-500)^+ &= \int_{500}^{2.000} (x-500)\,\theta\exp(-\theta\,x)\,dx + 1.500\int_{2.000}^{\infty}\theta\exp(-\theta\,x)\,dx\\
&= \left(\int_{0}^{1.500} x\,\theta\exp(-\theta\,x)\,dx + 1.500\int_{1.500}^{\infty}\theta\exp(-\theta\,x)\,dx\right)\exp(-500\,\theta)\\
&= \frac{1}{\theta}(1-\exp(-1.500\,\theta))\exp(-500\,\theta)\\
&= \frac{1}{\theta}(1-\exp(-2.000\,\theta))\left(1-\frac{1-\exp(-500\,\theta)}{1-\exp(-2.000\,\theta)}\right)\\
&= 500\cdot(1-0{,}6374) = 181{,}3.
\end{aligned}$$

Die Nettorisikoprämie für den Rückversicherungsvertrag beträgt somit $0{,}02 \times 181{,}3 \times 1000 =$ 3.626 DM. Die letzte Zeile der obigen Formeln hat gerade die Form Prämie mal Entlastungskoeffizient.

Aufgabe 5.

Berechnen Sie aus den folgenden Schadenzahlungen S_{ik} (gezahlt im Abwicklungsjahr k für Schäden aus dem Jahre i) die voraussichtliche Schadenzahlung des Jahres 1995 für alle Schäden aus den Jahren 1992 bis 1994, und zwar nach der Chain-Ladder-Methode.

Anfalljahr	1	2	3	4
1991	20	30	30	20
1992	30	40	10	
1993	10	60		
1994	30			

(20)

Lösung:

Die Chain-Ladder-Methode wird nicht auf die Schadenzahlungen, sondern auf die kumulierten Schadenzahlungen angewandt. Diese Daten sind

i\k	1	2	3	4
1991	20	50	80	100
1992	30	70	80	
1993	10	70		
1994	30			

Die Multiplikatoren werden geschätzt durch die Quotienten der (verkürzten) Spaltensummen, also

$$\hat{f}_1 = (50+70+70)/(20+30+10) = 190/60 = 3{,}167$$
$$\hat{f}_2 = (80+80)/(50+70) = 160/120 = 1{,}333$$
$$\hat{f}_3 = 100/80 = 1{,}25.$$

Wir erhalten als Schätzer der kumulierten Schadenzahlungen die Werte der folgenden Tabelle:

i\k	2	3	4
1992			100
1993		93,33	
1994	95		

Im Jahr 1995 sind folgende Schadenzahlungen geschätzt: aus 1992 20 DM, aus 1993 23,33, aus 1994 65 DM, also insgesamt 108,33 DM.

Zusatzaufgabe.

a) Welche Eigenschaften hat das Varianzprinzip

$$\text{Risikoprämie}\,(X) = E\,X + b\,\mathrm{Var}\,(X)\,?$$

b) Wie kann man b mit ruintheoretischen Überlegungen bestimmen? (15)

Lösung:

a) Das Varianzprinzip ist additiv, d. h., sind X, Y stochastisch unabhängig, so gilt

$$\text{Risikoprämie}\,(X+Y) = \text{Risikoprämie}\,(X) + \text{Risikoprämie}\,(Y)$$

wegen $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ und $E(X+Y) = E\,X + E\,Y$. Der Faktor b ist positiv, und damit ist stets

$$\text{Risikoprämie}\,(X) \geq E\,X\,.$$

b) Die ruintheoretische Begründung für den Faktor b basiert auf dem Anpassungskoeffizienten R, mit dem man die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s)$ abschätzen kann:

$$\psi(s) \leq \exp(-R\,s)\,.$$

Ist das Startkapital s gegeben und δ die tolerierte Ruinwahrscheinlichkeit, dann erreicht man die Einhaltung der Ruinwahrscheinlichkeit δ, wenn man die Prämie II so wählt, daß der zugehörige Anpassungskoeffizient R der Gleichung

$$R = -\log(\delta)/s =: a$$

genügt. Dies ist der Fall, wenn die Prämie nach dem Exponentialprinzip mit Risikoaversion a gewählt wird, also

$$\Pi = \frac{1}{a} \log E \exp(a\,X)\,.$$

Für kleines a (dies ist der praktisch vorkommende Fall) kann man Π approximieren durch die Prämie nach dem Varianzprinzip mit Faktor $b = a/2$, die entstehende Prämie

$$\Pi_V(X) = E\,X + \frac{a}{2}\,\mathrm{Var}\,(X)$$

erfüllt dann

$$|\Pi - \Pi_V| \leq \frac{a^2}{6}\,E\,[X^3 \exp(a\,X)]\,.$$

Aus ruintheoretischen Überlegungen ergibt sich also die Empfehlung

$$b = -\log(\delta)/(2\,s)\,.$$

In der Klausur des Jahres 1996 waren folgende Aufgaben zu lösen; die erreichbare Punktzahl war 120, und die Klausur wurde als bestanden gewertet, wenn 36 Punkte erreicht wurden.

Aufgabe 1.

Betrachten Sie zwei Risiken mit Verteilungen

$$P\{X_1=0\}=0{,}9; \qquad P\{X_2=0\}=0{,}8$$
$$P\{X_1>t\}=0{,}1\exp(-t);\; P\{X_2>t\}=0{,}2(1+t)^{-3}.$$

Zeigen Sie, daß beide Risiken gleichen Mittelwert und gleiche Varianz besitzen. Vergleichen Sie die beiden Risiken mit Hilfe der Semivarianz

$$E[(X-EX)^+]^2=E(X-EX)^2\,1_{(X>EX)}.$$

Welches der Risiken ist das gefährlichere?

[Benutzen Sie im zweiten Teil der Aufgabe die Relation $\int_{0,1}^{\infty}(x-0{,}1)^2\frac{3}{(1+x)^4}\,dx=\frac{10}{11}$.]

(30)

Lösung:

Für den ersten Teil genügt es zu zeigen, daß $EX_1=EX_2$ und $EX_1^2=EX_2^2$ gilt. Es ergibt sich

$$EX_1=0{,}1;\; EX_2=0{,}2\frac{1}{3-1}=0{,}1$$
$$EX_1^2=0{,}1\cdot 2=0{,}2;\; EX_2^2=0{,}2\frac{2}{(3-1)(3-2)}=0{,}2.$$

Für die Semivarianz des ersten Risikos erhalten wir

$$\begin{aligned} E((X_1-EX_1)^+)^2&=0{,}1\int_{0,1}^{\infty}(x-0{,}1)^2\exp(-x)\,dx\\ &=0{,}1\exp(-0{,}1)\int_0^{\infty}x^2\exp(-x)\,dx\\ &=0{,}1\cdot 2\cdot\exp(-0{,}1)=0{,}1809675\end{aligned}$$

und für das zweite Risiko ergibt sich nach Anleitung

$$\begin{aligned} E((X_2-EX_2)^+)^2&=0{,}2\int_{0,1}^{\infty}(x-0{,}1)^2\frac{3}{(1+x)^4}\,dx\\ &=0{,}2\cdot\frac{10}{11}=\frac{2}{11}=0{,}1818\ldots\end{aligned}$$

Das zweite Risiko hat die größere Semivarianz, es ist demnach das gefährlichere.

Aufgabe 2.

Ein Versicherungsunternehmen hat einen Bestand von 1.000 unabhängigen, identisch verteilten Risiken, bei denen pro Periode mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 jeweils ein Schaden auftritt. Dieser besitzt eine exponentialverteilte Schadenhöhe mit dem Erwartungswert 500. Mit der komplementären Wahrscheinlichkeit von 0,9 tritt kein Schaden in der Periode auf. Die Risikoprämie beträgt 60 pro Periode. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß der Gesamtschaden des Bestands die Summe aus der Anfangsreserve in der Höhe von 10.000 und der gesamten Prämieneinnahme übersteigt. Die Verteilung des Gesamtschadens wird hierbei (in guter Näherung) nach dem zentralen Grenzwertsatz als normalverteilt angenommen. (30)

Lösung

Die Zufallsvariable X beschreibe ein einzelnes versichertes Risiko. Für die Verteilungsfunktion $F(x)=P(X \leq x)$ von X gilt:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0{,}9 & x=0 \\ 0{,}9+0{,}1 \cdot (1-e^{-x/500}) & x>0 \end{cases}$$

1) Erwartungswert von X:

$$E(X)=\int_0^\infty x\, dF(x)=0+0{,}1 \cdot \int_0^\infty x \frac{1}{500} e^{-x/500}\, dx=0{,}1 \cdot 500=50.$$

2) Varianz von X: Hier benutzen wir $\operatorname{Var}(X)=E(X-a)^2-(a-EX)^2$ und $\operatorname{Var}(Y)=1/\theta^2$ für $Y \sim \operatorname{Exp}(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X)&=0{,}9 \cdot (0-50)^2+0{,}1 \cdot \int_0^\infty (x-50)^2 \frac{1}{500} e^{-x/500}\, dx \\
&=0{,}9 \cdot 50^2+0{,}1 \cdot \left(\int_0^\infty (x-500)^2 \frac{1}{500} e^{-x/500}\, dx+(500-50)^2\right) \\
&=0{,}9 \cdot 50^2+0{,}1 \cdot (500^2+450^2)=50^2(0{,}9+0{,}1 \cdot (10^2+9^2)) \\
&=2.500(0{,}9+18{,}1)=2.500 \cdot 19=47.500.
\end{aligned}$$

3) Die Summe S von 1.000 unabhängigen, identisch wie X verteilten Risiken ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert

$$\mu=1.000 \cdot 50=50.000$$

und der Varianz

$$\sigma^2=\operatorname{Var}(S)=1.000 \cdot 47.500=47.500.000$$

Als Wahrscheinlichkeit, daß die Schadenzahlungen die Summe aus Prämieneinnahmen von 60.000 und der Anfangsreserve von 10.000 übersteigt (Einperiodenruin) beträgt

$$\begin{aligned}
P(S>70.000)&=1-P(S \leq 70.000) \\
&=1-P\left(\frac{S-50.000}{\sqrt{47.500.000}} \leq \frac{70.000-50.000}{\sqrt{47.500.000}}\right) \\
&\simeq 1-P(Y \leq 2{,}902)
\end{aligned}$$

mit der standardnormalverteilten Zufallsvariable

$$Y=\frac{S-50.000}{\sqrt{47.500.000}}$$

(Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1), die durch die bekannte Transformation aus S hervorgegangen ist. Aus der Tabelle der Standardnormalverteilung folgt:

$$P(Y \leq 2{,}902)=0{,}99815$$

und damit beträgt die Einperiodenruinwahrscheinlichkeit 1,85 Promille.

Aufgabe 3.

Für ein Risiko X, welches eine Poissonsche Summenverteilung mit Intensität $\lambda > 2$ und Schadenhöhenverteilung U (0,1) (die Gleichverteilung auf (0,1)) besitzt, wird eine Grundprämie p verlangt. Am Ende der Versicherungsperiode wird per Beitragsrückgewähr erstattet

(i) p/2 wenn kein Schaden gemeldet wurde,
(ii) (p−x)/2 wenn ein einzelner Schaden der Höhe $x < p$ gemeldet wurde.

Welche Grundprämie ergibt sich als Nettorisikoprämie, so daß die Entschädigung und die Prämie im Mittel übereinstimmen? Wie groß ist die Prämie für $\lambda = 3$? (20)

Lösung:

Für die Entschädigung ergibt sich der Erwartungswert $EX = \lambda/2 > 1$. Für die Grundprämie p gilt damit $p > 1$, da Schadenzahlungen und darüberhinaus Beitragsrückgewähr zu leisten ist. Der Erwartungswert für die Prämienzahlung bei Grundprämie p ist im Falle $p > 1$

$$\frac{p}{2}\exp(-\lambda) + \lambda\exp(-\lambda)\int_0^1 \frac{p+x}{2}\,dx + p(1-\exp(-\lambda)-\lambda\exp(-\lambda))$$

$$= \frac{\lambda}{4}\exp(-\lambda) + p\left(1-\frac{1}{2}\exp(-\lambda)-\frac{1}{2}\lambda\exp(-\lambda)\right).$$

Der Ansatz *Erwartungswert von X = Erwartungswert der Prämienzahlung* liefert als Bestimmungsgleichung für p:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}e^{-\lambda} + p\left(1-\frac{1}{2}e^{-\lambda}-\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}\right)$$

oder

$$p = \frac{\lambda}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2}e^{-\lambda}}{1-\frac{1}{2}e^{-\lambda}-\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}}.$$

Für $\lambda = 3$ ergibt sich $p \approx 1{,}62$.

Aufgabe 4.

Das Portefeuille eines Versicherungsunternehmens setzt sich aus den folgenden Verträgen zusammen:

Anzahl der Verträge	Versicherungssumme (VS)
100	4.000
300	10.000

Die Schäden der Verträge treten (stochastisch unabhängig) jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 ein; mit der komplementären Wahrscheinlichkeit von 0,9 ist ein Vertrag jeweils schadenfrei.
a) Berechnen Sie die Auswirkung der Schadenexzedentenrückversicherung hinsichtlich des Erwartungswerts und der Varianz des beim Erstversicherer verbleibenden Schadens bei einer Selbstbeteiligung (des Erstversicherers) in Höhe von 3.000, wenn im Schadenfall jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 ein Totalschaden bzw. ein Teilschaden in Höhe der halben Versicherungssumme eintritt. Diskutieren Sie die Ergebnisse.
b) Zeigen Sie, daß für den Fall, daß die Schadenhöhen gleichverteilte Zufallsvariable auf dem Intervall von Null bis zur Versicherungssumme sind (U (0, VS)), der Erwartungswert des auftretenden Schadens gegenüber a) gerade 2/3 ausmacht (unabhängig von der Versicherungssumme). (20)

Lösung:

Erwartungswert des Gesamtschadens des Kollektivs beim Erstversicherer ohne Rückversicherung:

$$\begin{aligned}&100\cdot(0+0{,}1\cdot(0{,}5\cdot 2.000+0{,}5\cdot 4.000))\\&+300\cdot(0+0{,}1\cdot(0{,}5\cdot 5.000+0{,}5\cdot 10.000))\\&=100\cdot 300+300\cdot 750=255.000.\end{aligned}$$

Varianz des entsprechenden Gesamtschadens ohne Rückversicherung:

$$\begin{aligned}&100\cdot(0{,}9\cdot 300^2+0{,}1\cdot(0{,}5\cdot 1.700^2+0{,}5\cdot 3.700^2))\\&+300\cdot(0{,}9\cdot 750^2+0{,}1\cdot(0{,}5\cdot 4.250^2+0{,}5\cdot 9.250^2))\\&=100\cdot 910.000+300\cdot 5.687.500=1.797.250.000.\end{aligned}$$

a) Beim Erstversicherer ergibt sich für das Kollektiv bei einer Rückversicherung mit einer Selbstbeteiligung von 3.000 des Erstversicherers als Erwartungswert des Gesamtschadens:

$$\begin{aligned}&100\cdot(0+0{,}1\cdot(0{,}5\cdot 2.000+0{,}5\cdot 3.000))\\&+300\cdot(0+0{,}1\cdot(0{,}5\cdot 3.000+0{,}5\cdot 3.000))\\&=115.000\end{aligned}$$

und als Varianz des Gesamtschadens:

$$\begin{aligned}&100\cdot(0{,}9\cdot 0^2+0{,}1\cdot(0{,}5\cdot 2.000^2+0{,}5\cdot 3.000^2)-250^2)\\&+300\cdot(0{,}9\cdot 0^2+0{,}1\cdot 3.000^2-300^2)\\&=301.750.000.\end{aligned}$$

Variationskoeffizient ohne Rückversicherung:

$$\frac{\sqrt{1.797.250.000}}{255.000}=0{,}1663$$

Variationskoeffizient mit Rückversicherung:

$$\frac{\sqrt{301.750.000}}{115.000}=0{,}1511.$$

Der Variationskoeffizient nimmt durch die Rückversicherung also ab, d. h. das Risiko des Erstversicherers wird kleiner.

b) Erwartungswert des Schadens im Fall a) allgemein für eine Versicherungssumme VS

$$\alpha=0{,}1\cdot\left(0{,}5\cdot\left(\frac{1}{2}\mathrm{VS}+\mathrm{VS}\right)\right)=0{,}1\cdot\frac{3}{4}\mathrm{VS}.$$

Erwartungswert des Schadens bei der Versicherungssumme VS im Fall, daß die Schäden auf dem Intervall (0, VS) gleichverteilt sind

$$\beta=0{,}1\int_0^{\mathrm{VS}} x\,\frac{1}{\mathrm{VS}}\,dx=0{,}1\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{VS}$$

Damit gilt $\beta/\alpha=2/3$.

Aufgabe 5.

Die kumulierten Kosten (in Geldeinheiten) C_{ik} für Schäden der Anfalljahre 1990–1995 einschließlich der entsprechenden Prämienzahlungen P_i (für einen gleichbleibenden Bestand) sind in dem folgenden Abwicklungsdreieck wiedergegeben (Anfalljahr i, Abwicklungsjahr k):

Anfalljahr	i	Prämie	C_{ik} k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
1990	1	100	28	62	86	96	104	107
1991	2	105	34	66	91	104	107	
1992	3	115	34	67	91	105		
1993	4	120	32	72	95			
1994	5	125	41	80				
1995	6	130	41					

a) Wie groß waren die Schadenzahlungen der Anfalljahre 1992 bzw. 1993 im Jahr 1995?
b) Schätzen Sie die IBNR-Rückstellungen für die Anfalljahre 1991 und 1992 mit dem Chain-Ladder-Verfahren (auf 2 Nachkommastellen genau).
c) Berechnen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren einen Schätzwert der Schadenzahlungen im laufenden Jahr 1996 für Schäden des Anfalljahres 1992 (auf 2 Nachkommastellen genau).
d) Schätzen Sie die Schadenquote des Jahres 1990 (mit stichwortartiger Begründung).
e) Zeigen Sie, daß $(1-1/(\hat{f}_{n+1-i}\cdot\hat{f}_{n+2-i}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-1}))\,P_i$ als Schätzwert für R_i verwendet werden kann, wenn $\hat{C}_{in}\approx C_{in}\approx P_i$ gilt. (20)

Lösung:

a) Die Schadenzahlungen des Anfalljahrs 1992 betrugen im Jahr 1995

$$C_{34}-C_{33}=105-91=14.$$

Die Schadenzahlungen des Anfalljahrs 1993 betrugen im Jahr 1995

$$C_{43}-C_{42}=95-72=23.$$

b) Die Entwicklungsfaktoren $\hat{f}_5$und $\hat{f}_4$ betragen:

$$\hat{f}_5=\frac{107}{104}=1{,}03$$

$$\hat{f}_4=\frac{104+107}{96+104}=1{,}06.$$

Als Schätzung für die IBNR-Rückstellungen für das Anfalljahr 1991 erhält man damit:

$$\hat{R}_2=(\hat{f}_5-1)\cdot C_{25}=3{,}21$$

und als Schätzung für die IBNR-Rückstellungen für das Anfalljahr 1992:

$$\hat{R}_3=(\hat{f}_4\cdot\hat{f}_5-1)\cdot C_{34}=9{,}64.$$

c) Als Schätzung $\hat{C}_{35}$ von C_{35} erhält man

$$\hat{C}_{35}=\hat{f}_4\cdot C_{34}=111{,}3$$

und daraus als Schätzung $\hat{S}_{35}$ der Zahlungen S_{35} im Jahr 1996:

$$\hat{S}_{35}=\hat{C}_{35}-C_{34}=111{,}3-105=6{,}3.$$

d) Die Berücksichtigung einer Diskontierung von z. B. 5% für die im Laufe von 6 Jahren geleisteten Zahlungen jeweils in der Jahresmitte, ergibt in erster Näherung einen Barwert der Schadenzahlungen von

$$\frac{28}{1{,}05^{0,5}}+\frac{34}{1{,}05^{1,5}}+\frac{24}{1{,}05^{2,5}}+\frac{10}{1{,}05^{3,5}}+\frac{8}{1{,}05^{4,5}}+\frac{3}{1{,}05^{5,5}}=97{,}32.$$

Die Schadenquote beträgt also

$$\frac{\text{Barwert der Schadenzahlungen}}{\text{Prämieneinnahmen}}=\frac{97{,}32}{100}=97{,}32\%.$$

e) Es gilt

$$\left(1-\frac{1}{\hat{f}_{n+1-i}\cdot\hat{f}_{n+2-i}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-1}}\right)P_i=\frac{\hat{f}_{n+1-i}\cdot\hat{f}_{n+2-i}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-1}-1}{\hat{f}_{n+1-i}\cdot\hat{f}_{n+2-i}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-1}}\frac{C_{i,n+1-i}}{C_{i,n+1-i}}P_i$$

$$=(\hat{f}_{n+1-i}\cdot\hat{f}_{n+2-i}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-1}-1)\,C_{i,n+1-i}\frac{P_i}{\hat{f}_{n+1-i}\cdot\hat{f}_{n+2-i}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-1}\cdot C_{i,n+1-i}}$$

$$=\hat{R}_i\frac{P_i}{\hat{C}_{in}}\approx\hat{R}_i.$$

Zusatzaufgabe.

Die mit einem versicherten Risiko verbundene Gesamtschadenhöhe einer Periode sei eine auf dem Intervall (0, 1.000) gleichverteilte Zufallsvariable (U (0, 1.000)).
a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Schadens, der vom Versicherungsunternehmen bei einer Abzugsfranchise von 200 zu tragen ist.
b) Wie hoch ist eine Integralfranchise anzusetzen, damit das Versicherungsunternehmen den gleichen Schadenerwartungswert wie in a) zu tragen hat.
c) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten von a) und b) und diskutieren Sie die Ergebnisse.
d) Für ein Risiko sind die folgenden Werte einer Schadenentlastungskurve bekannt (Diese bezieht sich nicht auf das oben angegebene Risiko):

$$r(0{,}5)=0{,}8,\ r(0{,}6)=0{,}8+(1-0{,}8)\cdot\frac{0{,}1}{1-0{,}5}=0{,}84$$

Was bedeuten diese Werte, und was kann aus diesen Angaben abgeleitet werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (15)

Lösung:

Die Zufallsvariable X bezeichne die Schadenhöhe des versicherten Risikos. Die Zufallsvariable Y bezeichne den vom Versicherungsunternehmen zu tragenden Schaden nach Berücksichtigung einer Abzugsfranchise der Höhe 200.

a)

$$E(Y)=\int_{200}^{1.000}\frac{x-200}{1.000}\,dx=\int_{0}^{800}\frac{x}{1.000}\,dx=\frac{1}{1.000}\,\frac{1}{2}\,x^2\Big|_0^{800}=\frac{1}{2}\,\frac{800^2}{1.000}=320.$$

b) Die Integralfranchise sei a; sei ferner Y_a der vom Versicherungsunternehmen zu tragende Schaden nach Berücksichtigung einer Abzugsfranchise der Höhe a. Dann lautet die Bestimmungsgleichung für a:

$$320=E(Y_a)=\int_{a}^{1.000}y\,\frac{1}{1.000}\,dy=\frac{1}{1.000}\,\frac{1}{2}\,y^2\Big|_a^{1.000}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1.000}\,(1.000^2-a^2)$$

oder

$$a=\sqrt{1.000^2-320\cdot 2\cdot 1.000}=600.$$

c)

$$\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\int_{200}^{1.000}(y-200)^2\,\frac{1}{1.000}\,dy-320^2$$

$$=\int_{2}^{800}y^2\,\frac{1}{1.000}\,dy-320^2=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1.000}\,y^3\Big|_0^{800}-320^2=68.266{,}67.$$

$$Var(Y_a)=E(Y_a^2)-(E(Y_a))^2=\int_a^{1.000} y^2\frac{1}{1.000}\,dy-320^2=\frac{1}{3}\frac{1}{1.000}y^3\Big|_{600}^{1.000}$$

$$=\frac{1}{3}(100^3-60^3)-320^2=\frac{476.800}{3}=158.933{,}33.$$

Die Variationskoeffizienten sind somit

$$V(Y)=\frac{\sqrt{68.266{,}68}}{320}=0{,}816,$$

$$V(Y_a)=\frac{\sqrt{158.933{,}33}}{320}=1{,}246.$$

Der Variationskoeffizient bei der Integralfranchise ist deutlich größer (unabhängig von den risikovergrößernden Auswirkungen des moralischen Risikos und des Betrugsrisikos bei der Integralfranchise). Das Risiko bei der Integralfranchise ist größer, da gegenüber dem Fall der Abzugsfranchise bei gleichem Schadenerwartungswert tendenziell höhere Schäden mit kleineren Wahrscheinlichkeiten auftreten.

d) $r(0{,}5)=0{,}8$ bedeutet, daß bei einer Abzugsfranchise in Höhe der halben Versicherungssumme (VS) dem Versicherungsnehmer ein Erwartungswert in Höhe von 80% des Schadenerwartungswerts verbleibt.

Aufgrund der Konkavität von $r(.)$ stimmt $r(a)$ für mit der Verbindungsgeraden von $(0{,}5,\ r(0{,}5))$ nach $(1{,}1)$ überein, wenn ein weiterer Punkt auf dieser Verbindungsgeraden liegt, wie dies mit $(0{,}6,\ r(0{,}6))$ der Fall ist. Dieser unmittelbar einsichtige Sachverhalt kann z. B. mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises leicht gezeigt werden.