Bericht zur Prüfung im Mai 2006 über Schadenversicherungsmathematik (Grundwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Martin Morlock* (Giessen)

Am 6. Mai 2006 fand in Köln die DAV-Prüfung zur Schadenversicherungsmathematik (Grundwissen) statt. Von den 204 Teilnehmern und Teilnehmerinnen haben 150 bestanden.
Zu jedem der Gebiete Grundlagen, Prämienkalkulation, Solvabilität, Risikoteilung und Spätschadenreservierung war jeweils eine Aufgabe gestellt worden. Die Zusatzaufgabe wurde nur gewertet, wenn eine der anderen Aufgaben nicht bearbeitet war. Als Hilfsmittel war die klassische Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen. Die Zahlen in der Aufgabenstellung geben jeweils die maximal erreichbare Punktzahl an. Die Klausur wurde als bestanden gewertet, wenn 36 der 90 möglichen Punkte erreicht wurden.

1. Aufgabe Grundlagen (20 Punkte)

Die Summe aller Schäden S aus einem Versicherungsvertrag wird modelliert durch $S = X_1 + ... + X_N$, wobei N Poissonverteilt ist mit $E[N] = 0,1$. Die unabhängigen Schadenhöhen X_i sind gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1.000]$. Im Vertrag ist eine Selbstbeteiligung des Versicherungsnehmers in Höhe von 200 vereinbart. Die Prämie beträgt 60, und eine Beitragserstattung von 30 ist vereinbart für den Fall, dass kein Schaden reguliert wird.

a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Vertrag ohne Berücksichtigung der Beitragserstattung für den Fall mit und ohne Selbstbeteiligung.

b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie mit Berücksichtigung von Selbstbeteiligung und Beitragserstattung, wenn der Versicherungsnehmer den ersten Schaden nur meldet, wenn er größer ist als 230, und den zweiten und jeden nächsten Schaden immer meldet, also auch dann, wenn die Summe dieser Schäden kleiner ist als 230.

c) Kann der Versicherungsnehmer durch geschicktes Verhalten erreichen, dass die Nettorisikoprämie über 60 steigt, indem er beispielsweise beim Eintreten von genau zwei Schäden X_1, X_2 beide selbst zahlt, solange $X_1 + X_2 \leq 230$ ist, um die Beitragserstattung nicht zu verlieren?

Lösung:

Zu a)

$E[N] = 0,1\,, E[X] = 1.000/2 = 500\,, E[S] = E[N]E[X] = 50$ ohne Beitragserstattung und ohne Selbstbeteiligung;
$E[N] = 0,1 \cdot 0,8 = 0,08, E[X] = 800/2 = 400, E[S] = E[N]E[X] = 32$ ohne Beitragserstattung und mit Selbstbeteiligung.

Zu b)

Reguliert werden nur Schäden über 200, und die Anzahl dieser Zählschäden ist Poissonverteilt mit Parameter $0,8 \cdot 0,1 = 0,08$.
Wenn jeder Zählschaden reguliert wird, dann ist die Nettorisikoprämie mit Selbstbeteiligung und Beitragsrückerstattung

$$30 \cdot \exp(-0,08) + 0,08 \cdot 400 = 59,69.$$

Wenn der Versicherungsnehmer den ersten Zählschaden nur meldet, wenn er größer als 230 ist, dann erhöht sich die Nettorisikoprämie um

$$\begin{aligned}&(1-\exp(-0,08)) \cdot \tfrac{1}{1.000} \textstyle\int_{200}^{230} (30-(x-200))dx \\ &= (1-\exp(-0,08)) \cdot \tfrac{1}{1.000} \textstyle\int_{0}^{30} x dx = 0,035\end{aligned}$$

auf 59,73. Hierbei ist $1 - \exp(-0,08)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Zählschaden auftritt.

Zu c)

Ist nur ein Schaden möglich, dann ist es optimal, diesen nur dann regulieren zu lassen, wenn er 230 übersteigt; wenn er unter 230 bleibt, dann erhält man die Beitragserstattung. Somit kann man pro Schaden im Mittel nicht mehr als

$$\frac{230}{1.000} \cdot 30 + \frac{1}{1.000} \int_{230}^{1.000} (x-200)dx = 6,9 + \frac{1}{1.000} \int_{30}^{800} x dx = 326,45$$

erhalten. Also ist der Erwartungswert des Gesamtschadens – gleichgültig wie sich der Versicherungsnehmer verhält – höchstens

$$30 \exp(-0,1) + 0,1 \cdot 326,45 = 59,79.$$

2. Aufgabe Solvabilität (15 Punkte)

In einem kleinen Versicherungsbestand seien drei Verträge, die jeweils in einem Jahr keinen Schaden oder mit Wahrscheinlichkeit 0,1 genau einen Schaden der Höhe 1.000 haben. Die Prämie pro Vertrag beträgt 200 pro Jahr. Das Versicherungsunternehmen hat für den Bestand ein Risikokapital in Höhe von 1.000 gestellt. Die Reserve für den Versicherungsbestand ist demnach am Ende des Jahres $k, k = 1, 2, 3$ gegeben durch

$$R(k) = 1.000 + 600k - S_1 - ... - S_k,$$

wobei S_1, S_2, S_3 die Summen aller Schäden der Jahre 1 bis 3 sind. Es wird angenommen, dass die einzelnen Schäden pro Vertrag und Jahr stochastisch unabhängig sind.

a) Berechnen Sie die Ruinwahrscheinlichkeit für die ersten drei Jahre, also die Wahrscheinlichkeit für $\{R(k) < 0 \text{ für ein } 1 \leq k \leq 3\}$.

b) Wie verändert sich die Ruinwahrscheinlichkeit in a), wenn eine Selbstbeteiligung der Versicherungsnehmer in Höhe von 300 vereinbart wird und dafür die Prämie auf 145 pro Vertrag und Jahr reduziert wird?

Hinweis: Betrachten Sie die Anzahl aller Schäden in den drei Jahren. Betrachten Sie danach auch die Anzahl aller Schäden im ersten Jahr und in den ersten beiden Jahren.

Lösung:

Zu a)

(i) Tritt in den drei Jahren höchstens ein Schaden auf, dann ist Ruin ausgeschlossen.

(ii) Treten in den drei Jahren drei oder mehr Schäden auf, dann ist Ruin sicher; denn am Ende des dritten Jahres steht der Schadensumme $S \geq 3.000$ nur ein Kapital von 2.800 gegenüber.

(iii) Treten genau zwei Schäden auf, dann führt dies nur dann zum Ruin, wenn sie im ersten Jahr auftreten; denn nach der zweiten Prämienzahlung sind 2.200 als Kapital vorhanden.

Der Gesamtschaden im Portefeuille nach k Jahren ist die Summe von maximal $3k$ Einzelschäden mit der Schadenzahlverteilung $Bin(3k,\, 0,1)$. Somit ist die Ruinwahrscheinlichkeit gegeben durch

$$\begin{aligned}\psi_3(1.000) &= Bin(9,\, 0,1)[3,\infty) + Bin(3,\, 0,1)\{2\}Bin(6,\, 0,1)\{0\} \\ &= 1 - 0,9^9 - 9 \cdot 0,9^8 \cdot 0,1 - 36 \cdot 0,9^7 \cdot 0,1^2 \\ &+ 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 \cdot 0,9^6 = 0,067.\end{aligned}$$

Zu b)

Die Jahresprämie beträgt $3 \cdot 145 = 435$. Eine Fallunterscheidung wie in a) liefert, dass Ruin genau dann eintritt, wenn in den ersten beiden Jahren genau drei Schäden oder in den drei Jahren mindestens vier Schäden auftreten. Damit ergibt sich

$$\psi_3(1.000) = Bin(9,\, 0,1)[4,\infty) + Bin(6,\, 0,1)\{3\}Bin(3,\, 0,1)\{0\} = 0,01896.$$

Bei dieser Aufgabe gab es eine Fülle von verschiedenen Lösungsansätzen, mit Markov-Bäumen und anderen kombinatorischen Werkzeugen. Die Anleitung wurde nur selten genutzt.

3. Aufgabe Prämienkalkulation (20 Punkte)

Ein Bonus System hat vier Klassen: die Einstiegsklasse 0, die Malusklasse M und die Schadenfreiheitsklassen SF1 und SF2. In der betrachteten Risikosituation kann höchstens ein Schaden pro Periode und Versicherungsvertrag eintreten, und zwar in der Höhe 1.000. Die Schäden treten stochastisch unabhängig ein.

Es gibt zwei Typen von Versicherungsnehmern, den Typ A und den Typ B. Die Wahrscheinlichkeit p_A bzw. p_B des Schadeneintritts im Verlauf eines Jahres bei einem Versicherungsnehmer vom Typ A bzw. B ist bekannt, ebenso die Wahrscheinlichkeit π_A bzw. $\pi_B =$ (1-π_A) mit welcher er zum Typ A bzw. B gehört.

Typ	p	π
A	0,2	0,6
B	0,3	0,4

Bleibt ein Versicherungsnehmer schadenfrei, dann wird er von der Einstiegsklasse 0 und von der Malusklasse M im Folgejahr in SF1 bzw. von SF1 in SF2 eingestuft. Falls er in SF2 war, verbleibt er in SF2.

Im Schadenfall wird der Versicherungsnehmer im Folgejahr in die Malusklasse M eingestuft.

a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für die Einstiegsklasse 0, d.h. für einen Versicherungsnehmer, für den nur bekannt ist, dass er mit der Wahrscheinlichkeit π_A bzw. π_B zum Typ A bzw. zum Typ B gehört.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Versicherungsnehmer vom Typ A nach drei Jahren in SF1?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Versicherungsnehmer vom Typ B nach drei Jahren in SF1?

d) Berechnen Sie nach dem Äquivalenzprinzip die Nettorisikoprämie, die ein Versicherungsnehmer in der Schadenfreiheitsklasse SF1 für das vierte Jahr zu bezahlen hat.

e) Berechnen Sie mit dem Bayesschen Ansatz die Nettorisikoprämie für einen Versicherungsnehmer

(i) der in den ersten beiden Jahren jeweils einen Schaden hatte und im dritten Jahr schadenfrei war;

(ii) der im ersten und dritten Jahr schadenfrei war und nur im zweiten Jahr einen Schaden hatte.

Beide Versicherungsnehmer sind nach drei Jahren in der Klasse SF1.

f) Diskutieren Sie die unterschiedlichen Ergebnisse von d), e) (i) und e) (ii).

Lösung:

Zu a)

Typ A: $E[S_A] = 0,2 \cdot 1.000 = 200$. Typ B: $E[S_B] = 0,3 \cdot 1.000 = 300$.
Mischung ergibt: $E[S] = 0,6 \cdot 200 + 0,4 \cdot 300 = 240$.

Zu b) und c)

Ein Versicherungsnehmer, der am Ende des dritten Jahres in SF1 ist, muss am Ende des zweiten Jahres in M sein und im dritten Jahr schadenfrei bleiben. In M ist der Versicherungsnehmer am Ende des zweiten Jahres mit Wahrscheinlichkeit $p^2 + (1-p)p$, wobei p die Schadenwahrscheinlichkeit ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p_3(SF1)$ ergibt sich demnach zu

$$p_3(SF1) = (p^2 + (1-p)p)(1-p) = p(1-p).$$

Für Typ A also $p_3(SF1, A) = 0,16$, für Typ B $p_3(SF1, B) = 0,21$.

Zu d)

Die Nettorisikoprämie $\pi(SF1)$ ergibt sich durch Mischung der Nettorisikoprämien aus a) mit den Gewichten aus b)+c):

$$\begin{aligned} \pi(SF1) &= \frac{\pi_A p_3(SF1) E[S_A] + \pi_B p_3(SF1, B) E[S_B]}{\pi_A p_3(SF1) + \pi_B p_3(SF1, B)} \\ &= \frac{1}{0,18}(0,6 \cdot 0,16 \cdot 200 + 0,4 \cdot 0,21 \cdot 300) = 246,67. \end{aligned}$$

Zu e)

Durch die Schadenerfahrung kann man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Versicherungsnehmer vom Typ A oder B ist, nach dem Bayesschen Ansatz modifizieren. Ohne Schadenerfahrung waren das die Wahrscheinlichkeiten π_A und π_B. Für den Fall (i) erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_A(i) &= \frac{\pi_A p_A^2 (1-p_A)}{\pi_A p_A^2 (1-p_A) + \pi_B p_B^2 (1-p_B)} = 0,4324, \\ \hat{\pi}_B(i) &= 1 - \hat{\pi}_A(i) = 0,5676 \end{aligned}$$

mit einer Nettorisikoprämie von

$$E[S(i)] = \hat{\pi}_A(i)p_A \cdot 1.000 + \hat{\pi}_B(i)p_B \cdot 1.000 = 256,76;$$

und im Falle (ii)

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_A(ii) &= \frac{\pi_A p_A(1-p_A)^2}{\pi_A p_A(1-p_A)^2 + \pi_B p_B(1-p_B)^2} = 0,5664, \\ \hat{\pi}_B(ii) &= 1 - \hat{\pi}_A(ii) = 0,4336\end{aligned}$$

mit einer Nettorisikoprämie von

$$E[S(ii)] = \hat{\pi}_A(ii)p_A \cdot 1.000 + \hat{\pi}_B(ii)p_B \cdot 1.000 = 243,37.$$

Zu f)

Der Bayessche Ansatz ermöglicht es, gute und schlechte Risiken zu trennen: in (ii) liegt eine günstigere Schadenerfahrung als bei (i) vor, und dies führt zu einer geringeren Nettorisikoprämie. Die Einheitsprämie liegt – als Mittel – zwischen den Werten aus (i) und (ii); bei ihr fließt die Schadenerfahrung nur über die Bonusklasse ein.

4. Aufgabe Risikoteilung (15 Punkte)

Ein Kollektiv eines Versicherungsunternehmens besteht aus 50.000 Risiken. Die Schäden treten jeweils unabhängig voneinander auf.
Bei 10.000 Risiken (des Typs A) sind die Schäden folgendermaßen verteilt:

Schadenhöhen X	0	1.000	3.000
Wahrscheinlichkeit	0,7	0,2	0,1

Die übrigen 40.000 Risiken (des Typs B) haben die Schadenverteilung:

Schadenhöhen X	0	500	1.500
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,4	0,2

a) Wie groß ist das Risiko des Gesamtschadens im Kollektiv, gemessen mit dem Variationskoeffizienten?

b) Wie wirken sich folgende Alternativen der Risikoteilung auf den Variationskoeffizienten aus?

 ba) Eine proportionale Selbstbeteiligung der Versicherungsnehmer in Höhe von 25% der Schadenhöhen.

 bb) Eine Selbstbeteiligung des Versicherungsnehmers in Form einer Abzugsfranchise in Höhe von 1.000.

 bc) Eine Summenexzedenten-Rückversicherung mit dem Selbstbehalt 1.000 des Versicherungsunternehmens.

Lösung:

Zu a)

Zunächst sind die Erwartungswerte der Risiken des Typs A und des Typs B zu berechnen.

Typ A: Erwartungswert des Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$1.000 \cdot 0,2 + 3.000 \cdot 0,1 = 500$$

Varianz des Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$1.000.000 \cdot 0,2 + 9.000.000 \cdot 0,1 - 500^2 = 850.000$$

Typ B: Erwartungswert des Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$500 \cdot 0,4 + 1.500 \cdot 0,2 = 500$$

Varianz des Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$250.000 \cdot 0,4 + 2.250.000 \cdot 0,2 - 500^2 = 300.000$$

Hieraus ergibt sich der Variationskoeffizient des Gesamtbestands des Versicherungsunternehmens:

$$\frac{(10.000 \cdot 850.000 + 40.000 \cdot 300.000)^{0,5}}{(10.000 \cdot 500 + 40.000 \cdot 500)} = 0,00573$$

Zu ba)

Bei einer prozentualen Selbstbeteiligung des Versicherungsnehmers in Höhe von 25% und damit einer Beteiligung des Versicherungsunternehmens in Höhe von 75% an jedem Schaden werden die Erwartungswerte der beim Versicherungsunternehmen verbleibenden Schäden mit dem Faktor 0,75 und die Varianzen werden mit dem Faktor $0{,}75^2$multipliziert.
Der Variationskoeffizient des Gesamtschadens (des Risikos) des Versicherungsunternehmens ändert sich also nicht:

$$\frac{(10.000 \cdot 850.000 \cdot 0,75^2 + 40.000 \cdot 300.000 \cdot 0,75^2)^{0,5}}{(10.000 \cdot 500 \cdot 0,75 + 40.000 \cdot 500 \cdot 0,75)} = 0,00573$$

Zu bb)

Für den beim Versicherungsunternehmen verbleibenden Schaden gilt:

Typ A: Erwartungswert des Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$2.000 \cdot 0,1 = 200$$

Varianz des Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$4.000.000 \cdot 0,1 - 200^2 = 360.000$$

Typ B: Erwartungswert des Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$500 \cdot 0,2 = 100$$

Varianz des Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$250.000 \cdot 0,2 - 100^2 = 40.000$$

Hieraus ergibt sich als Variationskoeffizient des verbleibenden Schadens des Gesamtbestands des Versicherungsunternehmens:

$$\frac{(10.000 \cdot 360.000 + 40.000 \cdot 40.000)^{0,5}}{(10.000 \cdot 200 + 40.000 \cdot 100)} = 0,01202$$

Zu bc)

Mit der maximalen Schadenhöhe eines Risikos als Versicherungssumme ergibt sich unter Ausnutzung der Proportionalitätseigenschaft bei der Summenexzedenten-Rückversicherung und der Verwendung der Ergebnisse von a):

Typ A: Proportionalitätsfaktor 1/3 beim (Erst-)Versicherungsunternehmen;

Erwartungswert des beim (Erst-)Versicherungsunternehmen verbleibenden Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$1/3 \cdot (1.000 \cdot 0,2 + 3.000 \cdot 0,1) = 166,67$$

Varianz des beim (Erst-)Versicherungsunternehmen verbleibenden Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$1/9 \cdot (1.000.000 \cdot 0,2 + 9.000.000 \cdot 0,1 - 500^2) = 94.444,44$$

Typ B: Proportionalitätsfaktor 2/3 beim (Erst-)Versicherungsunternehmen;
Erwartungswert des verbleibenden Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$2/3 \cdot (500 \cdot 0,4 + 1.500 \cdot 0,2) = 333,33$$

Varianz des verbleibenden Schadens eines Versicherungsnehmers:

$$4/9 \cdot (250.000 \cdot 0,4 + 2.250.000 \cdot 0,2 - 500^2) = 133.333,33$$

Hieraus ergibt sich als Variationskoeffizient des verbleibenden Schadens des Gesamtbestands des Versicherungsunternehmens:

$$\frac{(10.000 \cdot 94.444,44 + 40.000 \cdot 133.333,33)^{0,5}}{(10.000 \cdot 166,67 + 40.000 \cdot 333,33)} = 0,00528.$$

5. Aufgabe Reservierung (20 Punkte)

Aus den Jahren 2002 – 2005 sind die folgenden Schadenzahlungen S_{ik} (ohne Einzelschadenreserven) eines Abrechnungsverbandes bekannt:

	Abwicklungsjahr	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
Anfalljahr	(Prämie)				
$i = 2002$	(100)	35	30	20	5
$i = 2003$	(600)	200	160	100	
$i = 2004$	(700)	230	170		
$i = 2005$	(1.000)	100			

Es wird angenommen, dass alle Schäden eines Anfalljahres innerhalb von vier Jahren vollständig abgewickelt sind. Die Schadenzahlungen sind inflationsbereinigt, für die Zukunft wird keine Inflation erwartet. Allerdings wurde im Jahr 2004 die Schadenregulierungspraxis geändert, was dazu führt, dass die Schadenregulierung in den Jahren 2004 bis 2008 um 10% teurer wird im Vergleich zu den Jahren 2002 bis 2003.

a) Berechnen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren einen Schätzwert für die Spätschadenreserve für das Anfalljahr 2004.

b) Berechnen Sie einen Schätzwert für die Schadenzahlungen für die Anfalljahre 2004 und 2005, die im Jahr 2006 zu leisten sind.

c) Lösen Sie a) und b) mit dem Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse.

d) Welches Verfahren liefert im vorliegenden Fall die glaubwürdigeren Resultate?

Hinweis

Der Einfachheit halber sind die Schätzungen der zukünftigen Schadenzahlungen und der Reserveschätzungen auf ganze Zahlen zu runden.

Lösung:

Zu a)

Zunächst sind die normierten (nicht kumulierten) Schaden- und Prämienzahlungen in den einzelnen Anfall- bzw. Abwicklungsjahren zu berechnen. Der Anstieg der Schadenregulierung in den Jahren 2004 bis 2008 kann interpretiert werden als eine einmalige superimposed

Inflation im Jahr 2004 in Höhe von 10%. Es sind also die Prämien in den Anfalljahren 2002 und 2003 sowie die in den Jahren 2002 und 2003 geleisteten Schadenzahlungen um 10% zu erhöhen. Das Jahr 2005 kann dabei als Basisjahr angesehen werden. (Eine andere – allerdings rechentechnisch ungünstigere – Lösung besteht darin, die in den Jahren 2004 und 2005 geleisteten Prämien- und Schadenzahlungen um 10% zu reduzieren und die damit berechneten Reserven dann um 10% zu erhöhen.)

	Abwicklungsjahr	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
Anfalljahr	(Prämie)				
$i=2002$	(110)	39	33	20	5
$i=2003$	(660)	220	160	100	
$i=2004$	(700)	230	170		
$i=2005$	(1.000)	100			

Die kumulierten, normierten Schadenzahlungen in den einzelnen Abwicklungsjahren betragen damit:

	Abwicklungsjahr	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
Anfalljahr	(Prämie)				
$i=2002$	(110)	39	72	92	97
$i=2003$	(660)	220	380	480	
$i=2004$	(700)	230	400		
$i=2005$	(1.000)	100			

Hieraus ergeben sich folgende Abwicklungskoeffizienten:

$$\begin{aligned}\hat{f}_3 &= \frac{97}{92} = 1{,}054\\ \hat{f}_2 &= \frac{92+480}{72+380} = 1{,}265\\ \hat{f}_1 &= \frac{72+380+400}{39+220+230} = 1{,}742\end{aligned}$$

und der Schätzwert der kumulierten Schadenzahlungen des Anfalljahres 2004:

$$\hat{C}_{2004,4} = 400 \cdot \hat{f}_2 \cdot \hat{f}_3 = 400 \cdot 1{,}265 \cdot 1{,}054 = 533.$$

Damit erhält man als Schätzwert der (seit 2004 erhöhten) Spätschadenreserven des Anfalljahres 2004

$$\hat{C}_{2004,4} - C_{2004,2} = 533 - 400 = 133.$$

Zu b)

Der Schätzwert der kumulierten Schadenzahlungen des Anfalljahres 2004 im Jahr 2006 beträgt

$$\hat{C}_{2004,3} = 400 \cdot \hat{f}_2 = 400 \cdot 1{,}265 = 506$$

und entsprechend für das Anfalljahr 2005

$$\hat{C}_{2005,2} = 100 \cdot \hat{f}_1 = 100 \cdot 1{,}742 = 174.$$

Die Schätzung der im Jahr 2006 zu leistenden Schadenzahlungen für die Anfalljahre 2004 und 2005 erhält man aus dem Zuwachs der kumulierten Schadenzahlungen:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{2004,3} &= 506 - 400 = 106\\ \hat{S}_{2005,2} &= 174 - 100 = 74\end{aligned}$$

Für die Anfalljahre 2004 und 2005 beträgt der Schätzwert der im Jahr 2006 zu leistenden Schadenzahlungen also insgesamt 180.

Zu c)

Aus dem Tableau der nicht kumulierten Schaden- und Prämienzahlungen

	Abwicklungsjahr	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
Anfalljahr	(Prämie)				
$i = 2002$	(110)	39	33	20	5
$i = 2003$	(660)	220	160	100	
$i = 2004$	(700)	230	170		
$i = 2005$	(1.000)	100			

ergeben sich die folgenden Schätzwerte der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse

$$\begin{aligned}
\hat{s}_4 &= \frac{5}{110} = 0,0455 \\
\hat{s}_3 &= \frac{20+100}{110+660} = 0,1558 \\
\hat{s}_2 &= \frac{33+160+170}{110+660+700} = 0,2469
\end{aligned}$$

Zu ca)

Der Schätzwert für die Spätschadenreserve für das Anfalljahr 2004 beträgt damit:

$$700 \cdot (0,1558 + 0,0455) = 141$$

Zu cb)

Der Schätzwert für die Summe der Schadenzahlung für das Anfalljahr 2004 und 2005, die im Jahr 2006 zu leisten sind, ergibt sich analog b) gemäß:

$$700 \cdot 0,1558 + 1.000 \cdot 0,2469 = 109 + 247 = 356.$$

Zu d)

Die höhere Schätzung beim Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse sind glaubwürdiger. $S_{2005,1}$ stellt offensichtlich einen Ausreißer nach unten dar, denn im ersten Abwicklungsjahr der Anfalljahre 2002 bis 2004 betragen die Schadenzahlungen im ersten Abwicklungsjahr jeweils rund ein Drittel der Prämie – beim Anfalljahr 2005 aber nur ein Zehntel der Prämie. Aufgrund des multiplikativen Ansatzes beim Chain-Ladder-Verfahren wirkt sich dieser Ausreißer sehr stark auf die Schätzung der Reserve aus. Das Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse orientiert sich dagegen an der Prämienzahlung des Anfalljahrs 2005, d.h. dem Volumen des Risikos, und den Schätzungen der zukünftigen Schadenzahlungen. Die bisherigen Schadenzahlungen des Anfalljahres spielen dagegen keine Rolle.

6. Aufgabe (15 Punkte) Zusatzaufgabe

Der Gesamtschaden S aus einem Versicherungsbestand wird modelliert über die Anzahl N der Schäden und die unabhängigen Schadenhöhen X_i, $i = 1, 2, ...$, wobei X_i eine Poissonsche Summenverteilung $PSV(\lambda, Q)$ besitzt mit $\lambda = 1$ und $Q = Exp(1/2)$. Die Verteilung Q ist die Exponentialverteilung mit dem Erwartungswert 2. Für die Schadenzahl N sind die ersten zwei Momente bekannt: $E[N] = 100$ und $E[N^2] = 10.200$. Berechnen Sie mit der Approximation der Verteilung von S durch die Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit

$$P(S > 300).$$

Lösung:

Die Schadenhöhe X_i, $i = 1, 2, ...$, setzt sich additiv zusammen aus der Poissonverteilten Zahl Z_i der stochastisch unabhängigen Einzelschäden mit den exponentialverteilten Schadenhöhen Y_{ij}:

$$X_i = Y_{i1} + ... + Y_{iZ_i} \qquad \text{mit} \qquad X_i = 0 \quad \text{für} \quad Z_i = 0.$$

Aus $E[Z_i] = 1$ und $E[Y_{ij}] = 2$ für $i, j = 1, 2, ...$ erhält man

$$E[X_i] = E[Z_i] \cdot E[Y_{ij}] = 1 \cdot 2 = 2.$$

Der Gesamtschaden $S = X_1 + ... + X_N$ (mit $S = 0$ für $N = 0$) hat damit den Erwartungswert

$$E[S] = E[N] \cdot E[X_i] = 100 \cdot 2 = 200 \quad (i = 1, 2, ...).$$

Die Varianz des Gesamtschadens S berechnet sich mit

$$Var[X_i] = E[Z_i] \cdot Var[Y_{ij}] + Var[Z_i] \cdot E[Y_{ij}]^2 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 8 \quad (i, j = 1, 2, ...)$$

gemäß

$$Var[S] = E[N] \cdot Var[X_i] + Var[N] \cdot E[X_i]^2 = 100 \cdot 8 + (10.200 - 100^2) \cdot 4 = 1.600.$$

Die approximierende Normalverteilung besitzt damit die Parameter $\mu = 200$ und $\sigma = 40$. Die Zufallsvariable $\dfrac{S - 200}{40}$ ist näherungsweise standardnormalverteilt mit der Verteilungsfunktion Φ und es gilt:

$$\begin{aligned} P(S > 300) &= 1 - P(S \leq 300) \\ &= 1 - P\left(\frac{S - 200}{40} \leq \frac{300 - 200}{40}\right) = 1 - P\left(\frac{S - 200}{40} \leq 2,5\right) \\ &= 1 - \Phi(2,5) = 1 - 0,99379 \\ &= 0,00621. \end{aligned}$$