Bericht zur Prüfung im Mai 2005 über Schadenversicherungsmathematik (Grundwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Martin Morlock* (Giessen)

Am 7. Mai 2005 fand die DAV-Prüfung zur Schadenversicherungsmathematik (Grundwissen) statt. Von den 214 Teilnehmern und Teilnehmerinnen haben 156 bestanden.
Zu jedem der Gebiete Grundlagen, Prämienkalkulation, Solvabilität, Risikoteilung und Spätschadenreservierung war jeweils eine Aufgabe gestellt worden. Die Zusatzaufgabe wurde nur gewertet, wenn eine der anderen Aufgaben nicht bearbeitet war. Als Hilfsmittel war die klassische Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen. Die Zahlen in der Aufgabenstellung geben jeweils die maximal erreichbare Punktzahl an. Die Klausur wurde als bestanden gewertet, wenn 36 der 90 möglichen Punkte erreicht wurden.

1. Aufgabe (15 Punkte) Grundlagen

Gegeben sei ein versichertes Risiko mit poissonverteilter Schadenzahl $N \sim \pi(3)$ und für jeden Schadenfall identisch verteilter Einzelschadenhöhe X mit

x (in T€)	10	20	30	40	50	60	70
$P(X = x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Die Schadenhöhen seien untereinander sowie von der Schadenzahl stochastisch unabhängig.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Gesamtschaden S einen Betrag von 20 T€ nicht überschreiten?

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$\min(S, 30).$$

c) Bestimmen Sie mittels b) den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$\max(S - 30, 0).$$

Lösung: (alle Angaben in T€)

Zu a)

$$\begin{aligned}
P(S = 0) &= P(N = 0) = \exp(-3) = 0,04979 \\
P(S = 10) &= P(N = 1)\, P(X = 10) = 3 \cdot \exp(-3) \cdot 0,3 = 0,04481 \\
P(S = 20) &= P(N = 1)\, P(X = 20) + P(N = 2)\, P(X_1 + X_2 = 20) \\
&= (3 \cdot \exp(-3)) \cdot 0,2 + (4,5 \cdot \exp(-3)) \cdot 0,3^2 = 0,05004
\end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit eines Gesamtschadens, der 20 T€ nicht überschreitet

$$P(S \leq 20) = 0,04979 + 0,04481 + 0,05004 = 0,14464$$

Zu b)
Summation unter Berücksichtigung des Falls, dass kein Schaden auftritt:

$$
\begin{aligned}
E[\min(S,30)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \min(10k,30)P(S=10k) \\
&= \sum_{k=0}^{7} \min(10k,30)P(S=10k) \\
&= 0 + 10 \cdot 0,04481 + 20 \cdot 0,05004 + 30 \cdot P(S>20) \\
&= 10 \cdot 0,04481 + 20 \cdot 0,05004 \\
&\quad + 30 \cdot (1 - P(S=0) - P(S=10) - P(S=20)) \\
&= 10 \cdot 0,04481 + 20 \cdot 0,05004 + 30 \cdot (1 - P(S \leq 20)) \\
&= 27,1097
\end{aligned}
$$

Zu c)
Berücksichtigt man die Beziehung $S = \min(S,30) + \max(S-30,0)$, so erhält man mit b)

$$
\begin{aligned}
E[\max(S-30,0)] &= E[S - \min(S,30)] = E(N) \cdot E(X) - E(\min(S,30)) \\
&= 3 \cdot 32 - 27,1097 \\
&= 68,8903
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe (20 Punkte) Solvabilität

Ein Versicherungsunternehmen hat 1.000 stochastisch unabhängige identische Risiken gezeichnet. Die mit dem Parameter $\lambda = 0,1$ poissonverteilte Schadenzahl N und die exponentialverteilte Schadenhöhe X mit Erwartungswert $E(X) = 2.000$ € eines einzelnen Risikos sind ebenfalls stochastisch unabhängig. Die Bruttorisikoprämie (Schadenerwartungswert plus Sicherheitszuschlag) beträgt 240 € für jedes dieser Risiken.

a) Berechnen Sie die Mindesthöhe des anfänglichen Eigenkapitals EK, wenn die Ruinwahrscheinlichkeit höchstens 0,01 betragen darf.

   Hinweis: Es gilt $\ln(0,01) = -4,605$ bzw. $\ln(0,012) = -4,4228$

b) Wie hoch muss die Bruttorisikoprämie angesetzt werden, wenn ein anfängliches Eigenkapital von 100.000 € für die Sicherstellung einer Ruinwahrscheinlichkeit von 0,01 ausreichen soll?

c) Wie verändert sich das anfängliche Eigenkapital gemäß a), wenn – etwa durch eine Fusion – die Zahl der unabhängigen Risiken auf 2.000 ansteigt? Anstelle einer Rechnung kann die Aussage auch verbal begründet werden.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende des ersten Jahres ein Jahresergebnis (Bruttorisikoprämien abzüglich Schadensumme) festgestellt wird, das kleiner oder gleich 10.000 ist; d.h., dass der in die Prämie eingerechnete Sicherheitszuschlag mindestens zu 75% aufgezehrt wurde?

   Nehmen Sie hierfür (in guter Näherung) vereinfachend an, dass das Jahresergebnis normalverteilt ist.

Lösung:

Zu a)

Jedes Risiko mit der poissonverteilten Schadenzahl $N_i \sim \pi(0,1)$ $(i = 1, 2, \ldots, 1000)$ und stochastisch unabhängigen, exponentialverteilten Einzelschadenhöhen $X_{ij} \sim Q = EXP(1/2000)$ $(j = 1, ..., N_i)$ hat die Gesamtschadenhöhe $Y_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}$. Die Y_i sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit der Poissonschen Summenverteilung $PSV(0,1; Q)$.

Damit besitzt der Gesamtschaden S des Kollektivs der 1.000 Risiken die Poissonsche Summenverteilung $PSV(0,1 \cdot 1.000; Q)$.

$$S = \sum_{i=1}^{1000} Y_i \text{ mit } S \sim PSV(0.1 \cdot 1000,\ \mathrm{Q}).$$

Lösung durch Verwendung des Anpassungskoeffizienten: dieser ist die positive Lösung R der Gleichung

$$\lambda + rB = \lambda \int \exp(rx) dF(x) \ = \ \lambda E\left[\exp(rX)\right].$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung wird die momenterzeugende Funktion der Exponentialverteilung $a/(a-r) = 0,0005/(0,0005 - r)$ eingesetzt und auf der linken Seite die Beitragseinnahmen

$$B = 1000 \cdot 240 = 100 \cdot 2.400 = \lambda(E(X) \cdot 1,2) = \lambda 2.400.$$

Die gesuchte Lösung R kann also als Lösung der folgenden Gleichung ermittelt werden:

$$\begin{aligned} 1 + 2.400 \cdot r &= 0,0005/(0,0005 - r) &\quad (1)\\ 0,0005 - r + 0,0005 \cdot 2.400 \cdot r - 2.400 \cdot r^2 &= 0,0005 \\ 0,2 \cdot r - 2.400 \cdot r^2 &= r \cdot (2.400 \cdot r - 0,2) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann:

$$R = 0,2/2.400 = 1/12.000$$

Mit

$$\psi\left(EK\right) \leq e^{-R \cdot EK} = 0,01 \qquad (2)$$

folgt:

$$EK = -\ln(0,01) \cdot 12.000 = 55.262,26$$

Bei Verwendung der Cramerschen Ungleichung wird die infinite Ruinwahrscheinlichkeit nach oben abgeschätzt. Dabei ergibt sich ein größeres EK als bei Verwendung einer exakten Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit (die für den hier betrachteten Spezialfall einer exponentialverteilten Schadenhöhe gemäß der Formel auf Seite 11 der Formelsammlung möglich ist).

Zu b)

Mit einem $EK = 100.000$ folgt aus der obigen Gleichung (2):

$$R = -\ln(0,01)/100.000 = 4,6051/100.000$$

und – mit der Bruttorisikoprämie BRP – aus Gleichung (1):

$$1 + BRP \cdot 10 \cdot R = 0,0005/(0,0005 - R)$$

und damit die Bruttorisikoprämie

$$BRP = (0,0005/(0,0005 - R) - 1)/R/10 = 220,29$$

Zu c)
Gemäß a) gilt:

$$1 + 2.400 \cdot r = 0,0005/(0,0005 - r) \qquad \text{(vergl. (1))}$$

(Die verdoppelte Anzahl der Risiken wirkt sich nicht aus, da sich durch die Verdoppelung nur (der gekürzte) Parameter λ verdoppelt hat.)
d.h. wir haben den gleichen Ansatz wie bei a) und folglich dasselbe Ergebnis für 1.000 Risiken wie für 2.000 Risiken:
„Das Eigenkapital $EK = -\ln(0,01) \cdot 12.000 = 55.262,04$ reicht aus, um eine Ruinwahrscheinlichkeit von kleiner oder gleich 1% sicherzustellen.“

Variante für a)-c):

a')Berechnung des Anpassungskoeffizienten gemäß Formelsammlung S. 11:

$$R = \frac{1}{\mu}\frac{\theta}{1+\theta} \quad \text{mit} \quad \mu = E(X) = 2.000, \lambda = 0,1 \cdot 1.000 = 100$$

$$\text{und} \quad \theta = \frac{(c - \lambda\mu)}{\lambda\mu} = \frac{(240.000 - 100 \cdot 2.000)}{100 \cdot 2.000} = 0,2$$

Damit gilt:

$$R = \frac{1}{2.000}\frac{0,2}{1+0,2} = \frac{1}{12.000}$$

Das anfänglich erforderliche EK erhält man mit der vorgegebenen Ruinwahrscheinlichkeit 0,01 gemäß Formelsammlung (mit $\ln(0,012) = -4,4228$):

$$\begin{aligned} \psi(EK) &= \frac{1}{1+\theta}e^{-R \cdot EK} = \frac{1}{1,2}e^{-R \cdot EK} = 0,01 \\ EK &= -\,ln(0,012) \cdot 12.000 = 53.073,60 \end{aligned} \tag{3}$$

Es ist also mindestens ein Eigenkapital von 53.073,60 € erforderlich, wenn die Ruinwahrscheinlichkeit höchstens 0,01 betragen darf.

b')
Für ein $EK = 100.000$ ergibt sich gemäß (3) eine nichtlineare Gleichung

$$\psi(EK) = \frac{1}{1+\theta}e^{-R \cdot EK} = \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{EK}{2000}} = 0,01$$

mit der Lösung $\theta = 0,09916$.
Mit

$$\theta = \frac{(c - \lambda\mu)}{\lambda\mu} = \frac{(c - 200.000)}{200.000} = 0,09916$$

erhält man

$$c = 0,09916 \cdot 200.000 + 200.000 = 219.831,32$$

und damit für ein einzelnes Risiko $c/1.000$, d.h. die

$$\text{Nettorisikoprämie: } 219,83 \text{ €}.$$

Gegenüber a') ist also ein geringerer Risikozuschlag erforderlich, da ein höheres Eigenkapital als Sicherheit zur Verfügung steht.
Ohne die nichtlineare Gleichung zu lösen, erhält man eine gute Näherungslösung, indem man gemäß der Cramerschen Ungleichung den Faktor $1/(1+\theta)$ durch 1 ersetzt.
Damit ergibt sich $R = \frac{1}{\mu}\frac{\theta}{1+\theta} = -\ln(0,01)/100.000 = 4,605/100.000$, hieraus $\theta = 0,10144$ und für ein einzelnes Risiko die Näherungslösung: 220,29.

c')

Durch die Vergrößerung der Zahl der Risiken ist der Ausgleich im Kollektiv besser und damit verkleinert sich – relativ gesehen – das erforderliche anfängliche Eigenkapital.
Eine Berechnung gemäß a') ergibt:
Berechnung des Anpassungskoeffizienten gemäß Formelsammlung S. 11:

$$\mu = E(X) = 2.000, \quad \lambda = 200 \quad \text{und} \quad \theta = \frac{(c-\lambda\mu)}{\lambda\mu} = \frac{(480.000 - 200 \cdot 2.000)}{200 \cdot 2.000} = 0,2$$

und damit das gleiche Ergebnis wie bei a'); d.h. auch bei einem größeren Bestand ist kein größeres anfängliches EK erforderlich. Dieses Ergebnis lässt sich auch durch Einbeziehung des Aspekts eines Ausgleichs in der Zeit und der Berücksichtigung des hier betrachteten unendlichen Planungshorizonts erklären.

Zu d)

Die Summe S der Schäden ist näherungsweise normalverteilt mit Erwartungswert

$$E(S) = 1.000 \cdot 0,1 \cdot 2.000 = 200.000.$$

Die Varianz eines einzelnen Risikos mit der Schadenzahl N und der Höhe X eines Einzelschadens beträgt:

$$E(N) \cdot Var(X) + Var(N) \cdot E(X)^2 = 0,1 \cdot 2.000^2 + 0,1 \cdot 2.000^2 = 0,2 \cdot 2.000^2$$

und folglich hat die Varianz von S den Wert

$$Var(S) = 1.000 \cdot 0,2 \cdot 2.000^2$$

und die Standardabweichung σ den Wert

$$\sigma = 28.284,27.$$

Das Jahresergebnis $J = B - S$ als Saldo aus deterministischen Einnahmen der Höhe 240.000 und stochastischen Schäden ist damit normalverteilt mit Erwartungswert 40.000 und Standardabweichung $\sigma = 28.284,27$.

$$\begin{aligned} P(J \leq 10.000) &= P\left(\frac{J - 40.000}{28.284,27} \leq \frac{-30.000}{28.284,27} = -1,06\right) \\ &= \Phi(-1,06) = 1 - \Phi(+1,06) \\ &= 1 - 0,855428 = 0,144572 \approx 14,5\% \end{aligned}$$

3. Aufgabe (20 Punkte) Prämienkalkulation

Das Kollektiv eines Versicherungsunternehmens besteht aus zwei unterschiedlichen Risikotypen A und B mit folgenden Charakteristika:
Bei beiden Typen tritt in jedem Jahr maximal ein Schaden auf und die Schadenhöhe ist deterministisch; sie unterscheiden sich aber sowohl in der Schadeneintrittswahrscheinlichkeit als auch in der Schadenhöhe, wobei die Unabhängigkeit der Schadenereignisse gegeben ist:

	Risikotyp A	Risikotyp B
Schadeneintrittswahrscheinlichkeit	0,2	0,4
Schadenhöhe (in €)	1.000	2.000

Von einem Versicherungsnehmer ist a priori nicht bekannt, welcher Typ er ist. Auf Grund einer fundierten Verbandsstatistik ist jedoch davon auszugehen, dass sich der Bestand des Versicherungsunternehmens zu je 50% aus Risiken des Typs A und B zusammensetzt. Das Unternehmen will in den nächsten drei Jahren in Abhängigkeit von der Dauer der Schadenfreiheit folgende Rabatte auf eine noch zu bestimmende Basisprämie BP einräumen.

Jahre ununterbrochener Schadenfreiheit	1	2	3
Rabatt auf die Basisprämie BP	10%	20%	30%

a) Berechnen Sie jeweils die Nettorisikoprämie eines Risikos vom Typ A und vom Typ B.

b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie NRK eines Versicherungsnehmers, von dem das Versicherungsunternehmen nicht weiß, welcher Typ er ist.

c) Berechnen Sie die Höhe der Basisprämie BP nach dem Äquivalenzprinzip, wenn Sie als Berechnungszeitraum die nächsten drei Jahre 2006, 2007 und 2008 zugrundelegen und für einen möglichen Rabatt in diesen Jahren die Schadenfreiheit der Jahre 2005 bis 2007 berücksichtigen.

Lösung:

Zu a)

$$\begin{array}{ll} \text{Risikoprämie des Typs A:} & 0,2 \cdot 1.000 = 200 \\ \text{Risikoprämie des Typs B:} & 0,4 \cdot 2.000 = 800 \end{array}$$

Zu b)

$$NRK = 0,5 \cdot 0,2 \cdot 1.000 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 2.000 = 500$$

Zu c)
Übergangsmatrix für Typ A zwischen den unterschiedlichen Beitragsklassen:

	100%	90%	80%	70%
100%	0,2	0,8		
90%	0,2		0,8	
80%	0,2			0,8
70%	0,2			0,8

Übergangsmatrix für Typ B zwischen den unterschiedlichen Beitragsklassen:

	100%	90%	80%	70%
100%	0,4	0,6		
90%	0,4		0,6	
80%	0,4			0,6
70%	0,4			0,6

Zustandsvektor zur Angabe der (bedingten) Wahrscheinlichkeit im i-ten der nächsten drei Jahre in den unterschiedlichen Beitragsklassen zu sein:

$$(pA100; pA90; pA80; pA70)_0 = (1,0; 0,0; 0,0; 0,0):$$

Startvektor, der besagt, dass sich anfangs alle Risiken des Typs A in der Beitragsklasse 100% befinden.

$$(pB100; pB90; pB80; pB70)_0 = (1,0; 0,0; 0,0; 0,0):$$

Startvektor, der besagt, dass sich anfangs alle Risiken des Typs B in der Beitragsklasse 100% befinden.
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(pA100; pA90; pA80; pA70)_1 &= (0,2; 0,8; 0,0; 0,0)\\
(pA100; pA90; pA80; pA70)_2 &= (0,2; 0,16; 0,64; 0,0)\\
(pA100; pA90; pA80; pA70)_3 &= (0,2; 0,16; 0,128; 0,512)\\
(pB100; pB90; pB80; pB70)_1 &= (0,4; 0,6; 0,0; 0,0)\\
(pB100; pB90; pB80; pB70)_2 &= (0,4; 0,24; 0,36; 0,0)\\
(pB100; pB90; pB80; pB70)_3 &= (0,4; 0,24; 0,144; 0,216)
\end{aligned}$$

Summe des Erwartungswerts der Prozentsätze der NRK in den Jahren 1, 2 und 3:

$$\begin{aligned}
\text{Risikotyp A:} \quad & (0,2\cdot 100 + 0,8\cdot 90) + (0,2\cdot 100 + 0,16\cdot 90 + 0,64\cdot 80)\\
& + (0,2\cdot 100 + 0,16\cdot 90 + 0,128\cdot 80 + 0,512\cdot 70)\\
= \quad & 258,08\\
\text{Risikotyp B:} \quad & (0,4\cdot 100 + 0,6\cdot 90) + (0,4\cdot 100 + 0,24\cdot 90 + 0,36\cdot 80)\\
& + (0,4\cdot 100 + 0,24\cdot 90 + 0,144\cdot 80 + 0,216\cdot 70)\\
= \quad & 272,64
\end{aligned}$$

Erwartungswert für beide Risikotypen:

$$0.5\cdot 258.08 + 0.5\cdot 272.64 = 265.36$$

Erwartungswert der Schadenzahlungen in diesen drei Jahren:

$$3\cdot(0,5\cdot 200 + 0,5\cdot 800) = 3\cdot NRK = 1.500$$

Die Basisprämie BP wird berechnet aus der Bedingung:

$$\begin{aligned}
265,36/100\cdot BP &= 1.500\\
BP &= 565,27
\end{aligned}$$

4. Aufgabe (20 Punkte) Risikoteilung

Das Portefeuille eines Versicherungsunternehmens setzt sich aus 3 Klassen von Verträgen zusammen, deren Risiken stochastisch unabhängig sind:

Klasse k	**Anzahl** n_k	**Schadeneintritts-wahrscheinlichkeit** q_k	**Versicherungssumme** S_k (in 1000 €)
1	50	0,08	40
2	30	0,04	100
3	20	0,03	200

Jeder Vertrag wird mit einer Wahrscheinlichkeit von q_k mit einem Schaden belastet, dessen Schadenhöhe auf dem Intervall $[0,\ S_k]$ gleichverteilt ist. Mit der komplementären Wahrscheinlichkeit von $1 - q_k$ sind die Verträge jeweils schadenfrei.
Um wieviel wird der Schadenbedarf des Versicherungsunternehmens reduziert, wenn

a) eine Summenexzedenten-Rückversicherung mit Maximum 60.000 € und unbegrenzter Kapazität,

b) eine Schadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität 60.000 € und unbegrenzter Haftung vereinbart wird?

c) Ist das verbleibende Risiko im Fall a) oder b) weniger gefährlich?

Lösung: (alle Angaben in Tausend EURO)

Für den Einzelschaden X_k in der k-ten Klasse $(k = 1,\ 2,\ 3)$ gilt:

$$\begin{aligned} E\,[X_1] &= 0,08 \cdot 20 = 1,6 \\ E\,[X_2] &= 0,04 \cdot 50 = 2 \\ E\,[X_3] &= 0,03 \cdot 100 = 3 \end{aligned}$$

Für den Gesamtschaden $S = \sum\limits_{k=1}^{3} n_k\, X_k$ erhält man

$$E[S] = 50 \cdot 1,6 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 200$$

Zu a)
Bei einem Maximum von 60 gilt für den selbstbehaltenen Einzelschaden $\tilde{X}_k^a\,(k = 1, 2, 3)$ bzw. den Gesamtschaden $\tilde{S}_a$:

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_1^a] &= E[X_1] = 1,6 \\ E[\tilde{X}_2^a] &= 0,04 \cdot 50 \cdot 0,6 = 1,2 \\ E[\tilde{X}_3^a] &= 0,03 \cdot 100 \cdot 0,3 = 0,9 \\ E[\tilde{S}_a] &= 50 \cdot 1,6 + 30 \cdot 1,2 + 20 \cdot 0,9 = 134 \quad \text{(Reduktion um 66)} \end{aligned}$$

Zu b)
Bei einer Priorität von 60 gilt für den selbstbehaltenen Einzelschaden $\tilde{X}_k^b\,(k = 1, 2, 3)$ bzw. den Gesamtschaden $\tilde{S}_b$:

$$E[\tilde{X}_1^b] = E[X_1] = 1,6$$

$$
\begin{aligned}
E[\tilde{X}_2^b] &= 0,04 \cdot (\frac{1}{100} \int\limits_0^{60} x\,dx + 60 \cdot 0,4) = 1,68 \\
E[\tilde{X}_3^b] &= 0,03 \cdot (\frac{1}{200} \int\limits_0^{60} x\,dx + 60 \cdot 0,7) = 1,53 \\
E[\tilde{S}_b] &= 50 \cdot 1,6 + 30 \cdot 1,68 + 20 \cdot 1,53 = 161 \qquad \text{(Reduktion um 39)}
\end{aligned}
$$

Zu c)

$$
\begin{aligned}
Var[\tilde{X}_1^a] &= Var[X_1] = 0,08 \cdot frac140 \int\limits_0^{40} x^2\,dx - 1,6^2 = 40,11 \\
Var[\tilde{X}_2^a] &= 0,04 \cdot (\frac{1}{100} \int\limits_0^{100} x^2\,dx) \cdot 0,6^2 - 1,2^2 = 46,56 \\
Var[\tilde{X}_3^a] &= 0,03 \cdot (\frac{1}{200} \int\limits_0^{200} x^2\,dx) \cdot 0,3^2 - 0,9^2 = 35,19 \\
Var[\tilde{S}_a] &= 50 \cdot 40,11 + 30 \cdot 46,56 + 20 \cdot 35,19 = 4105,95 \\
VarK[\tilde{S}_a] &= \frac{\sqrt{Var[\tilde{S}_a]}}{E[\tilde{S}_a]} = 0,478 \\
Var[\tilde{X}_1^b] &= Var[X_1] = 40,11 \\
Var[\tilde{X}_2^b] &= 0,04 \cdot (\frac{1}{100} \int\limits_0^{60} x^2\,dx + 60^2 \cdot 0,4) - 1,68^2 = 83,58 \\
Var[\tilde{X}_3^b] &= 0,03 \cdot (\frac{1}{200} \int\limits_0^{60} x^2\,dx + 60^2 \cdot 0,7) - 1,53^2 = 84,10 \\
Var[\tilde{S}_b] &= 50 \cdot 40,11 + 30 \cdot 83,58 + 20 \cdot 84,10 = 6194,90 \\
VarK[\tilde{S}_b] &= \frac{\sqrt{Var[\tilde{S}_b]}}{E[\tilde{S}_b]} = 0,489
\end{aligned}
$$

Das verbleibende Risiko im Fall a) ist unwesentlich weniger gefährlich!

5. Aufgabe (15 Punkte) Spätschadenreservierung

Ein schnell wachsendes, junges Versicherungsunternehmen hatte in den letzten 4 Jahren die folgenden kumulierten Schadenzahlungen und Prämieneinnahmen (in T€), die bereits sämtlich inflationsbereinigt sind. Es wird davon ausgegangen, dass in den kommenden Jahren keine Inflation auftritt.

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k=1	k=2	k=3	k=4
2001	1.000	50	150	550	600
2002	6.000	1.600	3.000	3.500	
2003	8.000	2.100	4.000		
2004	10.000	2.600			

Es wird angenommen, dass alle Schäden eines Anfalljahres innerhalb von 4 Jahren vollständig abgewickelt werden.
Hinweis: Der Einfachheit halber sind die Schätzungen der zukünftigen Schadenzahlungen und der Reserveschätzungen auf ganze Zahlen zu runden.

a) Berechnen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren einen Schätzwert für die Summe der Schadenzahlungen im Jahr 2005 für die zurückliegenden Anfalljahre und eine Schätzung der Schadenreserve für das Anfalljahr 2004.

b) Berechnen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren einen Schätzwert für die Schadenquote für das Anfalljahr 2004, nachdem alle Schäden vollständig abgewickelt sind.

c) Berechnen und vergleichen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren, dem Payment-Ratio-Verfahren und dem Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse die Schätzwerte für die Schadenzahlungen für das Anfalljahr 2003 im Jahr 2005.

   Welche dieser Schätzwerte sind glaubwürdiger? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Schätzwerte (kursiv), die im folgenden benötigt werden:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k=1	k=2	k=3	k=4
2001	1.000	50	150	550	600
2002	6.000	1.600	3.000	3.500	*3.818*
2003	8.000	2.100	4.000	*5.143*	
2004	10.000	2.600	*4.957*		*6.953*
$CL : \hat{f}_k$		*1,907*	*1,286*	*1,091*	
$PR : \hat{f}_k$				*2,417*	
$\hat{s}_k$				*0,129*	

Zu a)
Summe der Schätzwerte der Schadenzahlungen im Jahr 2005 für die zurückliegenden Anfalljahre mit dem Chain-Ladder-Verfahren:

$$(4.957 - 2.600) + (5.143 - 4.000) + (3.818 - 3.500) = 3.818$$

Schätzung der Schadenreserve für das Anfalljahr 2004 mit dem Chain-Ladder-Verfahren:

$$6.953 - 2.600 = 4.353$$

Zu b)
Schätzwert für die Schadenquote für das Anfalljahr 2004 nach vollständiger Abwicklung aller Schäden:

$$6.953/10.000 = 0,6953$$

Zu c)
Schätzwerte für die Schadenzahlungen für das Anfalljahr 2003 im Jahr 2005

mit dem Chain-Ladder-Verfahren: $5.143 - 4.000 = 1.143$
mit dem Payment-Ratio-Verfahren: $4.000 \cdot 2,417 - 4.000 = 5.667$
mit dem Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse: $8.000 \cdot 0,129 = 1.029$

Der Schätzwert nach dem Payment-Ratio-Verfahren weicht deutlich von den anderen ab. Der Grund liegt in dem untypischen Abwicklungsverlauf des Anfalljahres 2001, bei dem der Bestand offensichtlich noch sehr klein war. Demzufolge ist diese Datenbasis noch nicht sehr aussagekräftig. Das Datenvolumen bei der Schätzung der Abwicklungskoeffizienten ist beim Anfalljahr 2002 bereits sehr viel größer. Dies wird sowohl beim Chain-Ladder-Verfahren als auch beim Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse (implizit) berücksichtigt; nicht jedoch beim Payment-Ratio-Verfahren mit sehr unterschiedlichen Steigerungsraten der Schadenzahlungen (der Schadenzahlungen für die Anfalljahre 2001 und 2002) im dritten Abwicklungsjahr. Neben dem größeren statistischen Gewicht des Anfalljahres 2002 (gegenüber dem Anfalljahr 2001) ist auch zu beobachten, dass die Abwicklungsmuster der Schadenzahlungen der Anfalljahre 2002, 2003 und 2004 (soweit vorliegend) sehr gut übereinstimmen.
Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das Payment-Ratio-Verfahren im vorliegenden Fall aller Voraussicht nach verfälschte Werte liefert.

6. Aufgabe (15 Punkte) Zusatzaufgabe Prämienberechnung

Gegeben sei die Nutzenfunktion

$$u(x) = \frac{1}{2}x\,(1 + 1_{(-\infty,0]}(x)) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie für ein exponentialverteiltes Risiko $X \sim Exp(1)$ eine Bruttorisikoprämie Π nach dem Nullnutzenprinzip

$$E[u(\Pi - X)] = u(0).$$

Hinweis: Die Gleichung $t - 1 = \exp(-t)$ hat genau eine Lösung $t = 1,2785$.

Lösung:

$$E[u(\Pi - x)] = E[\frac{1}{2}(\Pi - X) + \frac{1}{2}(\Pi - X) \cdot 1_{(-\infty,0]}(\Pi - X)]$$

Wie bei einem XL-Rückversicherungsvertrag gilt hier

$$E[(\Pi - X)1_{(-\infty,0]}(X)] = -E[\max(X - \Pi, 0)] = -\int_{\Pi}^{\infty} \exp(-t)dt = -\exp(-\Pi).$$

Damit erhalten wir als Gleichung für die Bruttorisikoprämie

$$\Pi - 1 = \exp(-\Pi),$$

und mit der Anleitung den Wert $\Pi = 1,2785$.