Bericht zur Prüfung im Mai 2004 über Schadenversicherungsmathematik (Grundwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Martin Morlock* (Gießen)

Am 8. Mai 2004 fand die neunte DAV-Prüfung zur Schadenversicherungsmathematik statt. Von den 225 Teilnehmern und Teilnehmerinnen haben 183 bestanden.
Zu jedem der Gebiete Grundlagen, Prämienkalkulation, Solvabilität, Risikoteilung und Reservierung war jeweils eine Aufgabe gestellt worden. Die Zusatzaufgabe wurde nur gewertet, wenn eine der anderen Aufgaben nicht bearbeitet war. Als Hilfsmittel war die klassische Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen. Die Zahlen in der Aufgabenstellung geben jeweils die maximal erreichbare Punktzahl an. Die Klausur wurde als bestanden bewertet, wenn 36 der 90 möglichen Punkte erreicht wurden.

1. Aufgabe (20 Punkte)

Ein Risiko S wird modelliert durch die Anzahl N der Schäden – mit der Verteilung $P\{N = 0\} = 0.5$, $P\{N = 1\} = 0.3$ und $P\{N = 2\} = 0.2$ – und durch die Schadenhöhen $X_i, i = 1, 2$ – mit der Verteilung $P\{X_i = 100\} = 0.5$, $P\{X_i = 500\} = 0.3$ und $P\{X_i = 1000\} = 0.2$. Die Zufallsvariablen N, X_1 und X_2 sind stochastisch unabhängig. Das Versicherungsunternehmen entschädigt den ersten gemeldeten Schaden voll, den zweiten gemeldeten Schaden zu einem Drittel.

a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Fall, dass der Versicherungsnehmer jeden Schaden meldet.

b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Fall, dass der Versicherungsnehmer den ersten Schaden nur meldet, wenn er 500 oder 1000 beträgt. (Wenn der erste Schaden nicht gemeldet wird, dann wird der zweite Schaden – wenn er eintritt – zu 100% bezahlt.)

c) Wie wird sich ein rationaler Versicherungsnehmer verhalten, wenn er seine Schäden am Ende der Versicherungsperiode melden kann?

Lösung:

Berechnung auf 2 Stellen genau.

Zu a)

Wenn kein Schaden eintritt, dann ist auch die Entschädigung Null. Tritt genau ein Schaden auf, dann beträgt die Entschädigung bei einem Schaden der Höhe X_1 gerade X_1. Und bei genau zwei Schäden mit Schadenhöhen X_1 und X_2 beträgt die Entschädigung $X_1 + \frac{1}{3}X_2$. Die Summe aller Entschädigungen S ist demnach

$$S = \begin{cases} 0 & \text{wenn } N = 0 \\ X_1 & \text{wenn } N = 1 \\ X_1 + \frac{1}{3}X_2 & \text{wenn } N = 2 \end{cases}$$

Damit berechnet sich die Nettorisikoprämie mit $E[X_1] = E[X_2] = 0.5 \cdot 100 + 0.3 \cdot 500 + 0.2 \cdot 1000 = 400$ als

$$\begin{aligned} E[S] &= P(N=1)E[X_1] + P(N=2)E\left[X_1 + \frac{1}{3}X_2\right] \\ &= 0.3 \cdot 400 + 0.2 \cdot \left(400 + \frac{1}{3} \cdot 400\right) \\ &= 120 + 80 + \frac{80}{3} = 226.67. \end{aligned}$$

Zu b)
In diesem Fall ist $S = 0$ wenn $N = 0$ und ebenfalls wenn $N = 1$ und $X_1 = 100$. Falls $N = 2$ und $X_1 = 100$, dann gilt $S = X_2$. Und falls schließlich $N = 2$ und $X_1 \neq 100$, dann haben wir $S = X_1 + \frac{1}{3}X_2$.
Wegen $E\left[X_1 \, 1_{(X_1 \neq 100)}\right] = 0.3 \cdot 500 + 0.2 \cdot 1000 = 350$ erhalten wir

$$\begin{aligned} E[S] &= P(N=1) \cdot 350 + P(N=2)\left(E\left[(X_1 + \frac{1}{3}X_2)\, 1_{(X_1 \neq 100)}\right] + E\left[X_2 \, 1_{(X_1 = 100)}\right]\right) \\ &= 105 + 0.2 \cdot \left(350 + \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot 0.5 + 400 \cdot 0.5\right) \\ &= 105 + 70 + \frac{1}{3} \cdot 40 + 40 = 228.33. \end{aligned}$$

Zu c)
Bei $N = 1$ wird er seinen Schaden melden, dieser wird vom Versicherungsunternehmen bezahlt. Bei $N = 2$ wird er X_1 nicht melden, wenn er einen Vorteil erzielt dadurch, dass er diesen Schaden nicht meldet, also immer dann, wenn

$$X_1 + \frac{1}{3}X_2 < X_2$$

oder

$$X_1 < \frac{2}{3}X_2.$$

Bei den hier möglichen Schadenhöhen 100, 500 und 1000 ist diese Bedingung äquivalent zu

$$X_1 < X_2.$$

Ein rationaler Versicherungsnehmer wird bei zwei Schäden den ersten Schaden also nicht melden, wenn er kleiner ist als der zweite Schaden.
Bei diesem Verhalten des Versicherungsnehmers ergibt sich übrigens (dies war in der Aufgabenstellung nicht verlangt) eine Nettorisikoprämie von 247.

2. Aufgabe (15 Punkte)

Betrachten Sie folgendes einfaches Modell für den jährlichen Gesamtschaden S_i eines Versicherungsbestandes in den Jahren $i = 1,2,\ldots$:

$$P\{S_i = 0\} = 0.8, \; P\{S_i = 2\} = 0.2.$$

Die Bestandsprämie c sei 1.

a) Berechnen Sie die 5-Jahres-Ruinwahrscheinlichkeit

$$P\{R(t) < 0 \text{ für ein } t \text{ zwischen 1 und 5}\}$$

für das Startkapital $s = 2$ und

$R(t) = s + ct - S_1 - \ldots - S_t, t = 1, 2, 3\ldots$

Hierbei sind die jährlichen Gesamtschäden stochastisch unabhängig.

b) Berechnen Sie mit dem Anpassungskoeffizienten die Lundberg-Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit in a). Warum ist diese Schranke deutlich größer als die Ruinwahrscheinlichkeit in a)?

Anleitung

Zu a): Betrachten Sie die möglichen Werte für $R(3)$, bei denen Ruin bis zum 5. Jahr auftreten kann.

Zu b): Benutzen Sie die Gleichung $\exp(1.3863) - 0.2\exp(2.7726) = 0.8$.

Lösung:

Zu a)

Die Entwicklung von $R(t)$ in der Zeit t ist folgendermaßen zu charakterisieren: $R(t)$ steigt um 1 mit Wahrscheinlichkeit 0.8, und $R(t)$ fällt um 1 mit Wahrscheinlichkeit 0.2:

$$R(t+1) = \begin{cases} R(t) + 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad 0.8 \\ R(t) - 1 & \phantom{\text{mit Wahrscheinlichkeit}} \quad 0.2 \end{cases} .$$

Damit kann $R(3)$ den Wert -1 mit Wahrscheinlichkeit 0.2^3 (dreimal eine Veränderung um -1) und den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit $3 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8$ (zweimal eine Veränderung um -1, einmal um +1) annehmen.

Die Werte $R(1)$ und $R(2)$ können wegen $R(0) = 2$ nicht negativ sein. Damit wird die fünfjährige Ruinwahrscheinlichkeit zu

$$\begin{aligned} \psi_5(2) &= P\{R(3) = -1\} + P\{R(3) = 1 \text{ und } R(5) < 0\} \\ &= 0.2^3 + 3 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8 \cdot 0.2^2 \\ &= 0.008 + 0.00384 = 0.01184. \end{aligned}$$

Zu b)

Der Anpassungskoeffizient ist definiert als positive Lösung der Gleichung

$$E[\exp(rS)] = \exp(rc)$$

oder

$$0.8 + 0.2\mathrm{e}^{2r} = \mathrm{e}^r.$$

Mit der Anleitung erhält man die Lösung $r = 1.3863$.

Lundbergs Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit liefert dann

$$\psi_5(2) \leq \exp(-2.7726) = 0.06229$$

(auf 5 Stellen genau). Dieser Wert ist nun deutlich größer als der oben berechnete Wert. Dies liegt daran, dass bei $\psi_5(2)$ Ruin nur bis zum Zeitpunkt 5 betrachtet wird; die Schranke gilt jedoch auch für $\psi(s)$, die Ruinwahrscheinlichkeit über einen unendlich langen Zeitraum. Außerdem ist die Lundberg-Ungleichung nur für großes Startkapital annähernd scharf.

Angemerkt sei hierzu, dass $\psi(2) = 0.015625$ und dass ferner $\psi(10) = 2.385 \cdot 10^{-7}$ und $\exp(-10 \cdot 1.3863) = 9.54 \cdot 10^{-7}$, aber auch dies liegt außerhalb einer vollständigen Lösung der gestellten Aufgabe.

3. Aufgabe (20 Punkte)

Bei einem Versicherungsnehmer treten Schäden Poissonverteilt mit dem Erwartungswert von 0.1 auf. Die Schadenhöhen sind identisch exponentialverteilt mit dem Erwartungswert 5000. Schadenzahl und Schadenhöhen sind stochastisch unabhängig.

a) Berechnen Sie die Nettoprämie nach dem Varianzprinzip mit dem Risikozuschlagsfaktor 0.00001.

b) Wie groß ist der Variationskoeffizient des Gesamtschadens eines Versicherungsnehmers?

c) Wie ändert sich der Variationskoeffizient des Gesamtschadens eines Versicherungsnehmers, wenn er einen Versicherungsvertrag mit einer Abzugsfranchise von 1000 vereinbart?

   (Begründen Sie Ihre Antwort ohne eine explizite Berechnung des Variationskoeffizienten.)

d) Welche Verteilung hat die Anzahl der Entschädigungen bei einer Abzugsfranchise gemäß c)?

(Hinweis zu d): Verwenden Sie die Fundamentalformeln)

Lösung:

Der Gesamtschaden S des Versicherungsnehmers pro Periode wird nach Aufgabenstellung modelliert mit einer Poissonschen Summenverteilung mit $\lambda = 0.1$ und der Schadenhöhenverteilung Exp(1/5000).

Zu a)

Wegen $E[S] = E[N]\, E[X] = 0.1 \cdot 5000 = 500$ und $Var(S) = \lambda E\left[X^2\right] = 0.1 \cdot 5000^2 \cdot 2 = 5 \cdot 10^6$ erhält man als Nettoprämie (auch als Brutoorisikoprmie bezeichnet)

$$E[S] + 0.00001\, Var(S) = 500 + 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^6 = 550.$$

Zu b)

$$VarK^2(S) = Var(S)/E[S]^2 = 5 \cdot 10^6/500^2 = 20$$

und daher ist

$$VarK(S) = \sqrt{20} = 4.4721$$

(auf vier Stellen genau).

Wenn alle Schäden vom Versicherungsunternehmen übernommen werden, dann ist der Variationskoeffizient des Gesamtschadens, aus Sicht des Versicherungsnehmers, natürlich Null.

Zu c)

Aus Sicht des Versicherungsnehmers: Mit Abzugsfranchise hat der beim Versicherungsnehmer verbleibende Schaden einen positiven Variationskoeffizienten, er steigt also durch die Einführung der Abzugsfranchise.
Aus Sicht des Versicherungsunternehmens (dies war in der Aufgabenstellung nicht verlangt): Der Variationskoeffizient des vom Versicherungsunternehmen übernommenen Schadens steigt mit der Abzugsfranchise. Wenn also die ursprüngliche Abzugsfranchise Null durch 1000 ersetzt wird, dann muss der Variationskoeffizient steigen.

Zu d)

Die ursprüngliche Schadenzahl N hat eine Poisson(0.1) Verteilung. Die Anzahl $\bar{N}$ der Schäden über 1000 lässt sich dann darstellen als

$$\bar{N} = \sum_{i=1}^{N} 1_{(X_i > 1000)},$$

wobei $X_1, X_2, ...$ die exponentialverteilten Schadenhöhen sind.
Sei $p = P(X_i > 1000)$. Die Fundamentalformeln liefern für die momenterzeugende Funktion von $\bar{N}$

$$\mathrm{MEF}_{\bar{N}}(z) = \exp(\lambda(p\,z + 1 - p - 1)) = \exp(\lambda\,p(z-1)),$$

und somit hat $\bar{N}$ eine Poissonverteilung mit Parameter $\lambda\,p$. Schließlich ist

$$P(X_i > 1000) = \mathrm{e}^{-1/5} = 0.8187,$$

also hat $\bar{N}$ eine Poissonverteilung mit Parameter 0.08187.

4. Aufgabe (20 Punkte)

Das Kollektiv eines Erstversicherungsunternehmens besteht aus 2 stochastisch unabhängigen Risiken A und B mit Versicherungssumme, Einzelschadenhöhenverteilung und Schadeneintrittswahrscheinlichkeit gemäß der folgenden Tabelle.

	Versicherungssumme	*Schadenhöhe*		
	VS	0	$1/2\,VS$	3/4VS
Risiko A	4	0.7	0.1	0.2
Risiko B	8	0.6	0.3	0.1

Das Erstversicherungsunternehmen schließt alternativ

a) einen Summenexzedentenrückversicherungsvertrag mit einem Maximum von 4,

b) einen Schadenexzedentenrückversicherungsvertrag mit einer Priorität von 4 ab.

Bestimmen Sie jeweils den Variationskoeffizienten für das beim Erstversicherer verbleibende Risiko und prüfen Sie, wie sich der Variationskoeffizient ändert, wenn alle Schäden inflationsbedingt um *10%* steigen, aber die Versicherungssumme *VS*, das Maximum und die Priorität <u>nicht</u> angehoben werden?

Lösung:

Zu a)

Nach der Summenexzedentenrückversicherung gilt für den beim Erstversicherer verbleibenden Einzelschaden $\tilde{X}_A$ bzw. $\tilde{X}_B$:

$$E[\tilde{X}_A] = 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 = 0.8; \quad E[\tilde{X}_B] = 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 = 0.9$$

$$Var[\tilde{X}_A] = 4 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.2 - 0.8^2 = 1.56; \quad Var[\tilde{X}_B] = 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.1 - 0,9^2 = 1.29.$$

Damit folgt

$$VarK[\tilde{X}_A + \tilde{X}_B] = \sqrt{1.56 + 1.29}/(0.8 + 0.9) = 0.9931.$$

Da die um 10% erhöhten Schäden die jeweilige Versicherungssumme (Deckungssumme) nicht überschreiten und für jeden Versicherungsnehmer eine proportionale Risikoteilung zwischen Erst- und Rückversicherungsunternehmen vorliegt, verändert sich der Variationskoeffizient aufgrund der Inflation nicht.

Zu b)

Nach der Schadenexzedentenrückversicherung gilt für den beim Erstversicherer verbleibenden Einzelschaden $\tilde{Y}_A$ bzw. $\tilde{Y}_B$:

$$E[\tilde{Y}_A] = E[\tilde{X}_A] = 0.8; \qquad E[\tilde{Y}_B] = 4 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.1 = 1.6$$
$$Var[\tilde{Y}_A] = Var[\tilde{X}_A] = 1.56; \qquad Var[\tilde{Y}_B] = 16 \cdot 0.3 + 16 \cdot 0.1 - 1.6^2 = 3.84.$$

Damit folgt

$$VarK[\tilde{Y}_A + \tilde{Y}_B] = \sqrt{1.56 + 3.84}/(0.8 + 1.6) = 0.9682.$$

Nach 10%-iger Erhöhung der Schäden und Berücksichtigung der Schadenexzedentenrückversicherung gilt für den beim Erstversicherer verbleibenden Einzelschaden $\tilde{Y}'_A$ bzw. $\tilde{Y}'_B$:

$$E[\tilde{Y}'_A] = 1,1 \cdot E[\tilde{Y}_A] = 0.88; \qquad E[\tilde{Y}'_B] = E[\tilde{Y}_B] = 1.6$$
$$Var[\tilde{Y}'_A] = 1.1^2 \cdot Var[\tilde{Y}_A] = 1.8876; \qquad Var[\tilde{Y}'_B] = Var[\tilde{Y}_B] = 3.84.$$

Damit folgt

$$VarK[\tilde{Y}'_A + \tilde{Y}'_B] = \sqrt{1.8876 + 3.84}/(0.88 + 1.6) = 0,9650.$$

Der Variationskoeffizient für den Erstversicherer verringert sich.

5. Aufgabe (15 Punkte)

Die inflationsbereinigten Schadenzahlungen der Anfalljahre 1999 bis 2003 sind in dem folgenden Abwicklungsdreieck eingetragen, wobei davon ausgegangen wird, dass die Schäden eines Anfalljahres nach 5 Jahren vollständig abgewickelt sind.

		Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	Beitragsaufkommen	k=1	2	3	4	5
1999	400	50	100	30	50	50
2000	1000	120	260	250	130	
2001	1100	130	270	280		
2002	1200	150	310			
2003	1300	160				

a) Berechnen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren eine Schätzung für die inflationsbereinigten Schadenzahlung des Anfalljahres 2002 im Jahr 2005.

b) Wie groß ist die Schätzung der inflationsbereinigten Reserve für das Anfalljahr 2003 nach den Verfahren der anfalljahrsunabhängigen Schadenquotenzuwächse?

c) Wäre in dem vorliegenden Fall anstelle des Chain-Ladder-Verfahrens das Payment-Ratio-Verfahren vorzuziehen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Zu a)

Kumulierte Schadenzahlungen

		Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	Beitragsaufkommen	k=1	2	3	4	5
1999	400	50	150	180	230	280
2000	1000	120	380	630	760	
2001	1100	130	400	680		
2002	1200	150	460	736.92	900.52	
2003	1300	160				

$$\hat{f}_2 = 1.602 \quad \hat{f}_3 = 1.222$$

$\hat{S}_{2002,4} = \hat{C}_{2002,4} - \hat{C}_{2002,3} = 900.52 - 736.92 = 163.60$ ist eine Schätzung der inflationsbereinigten Schadenzahlungen des Anfalljahres 2002 im Jahr 2005, dem 4. Abwicklungsjahr.

Zu b)

Anfalljahr	Beitrags-aufkommen	Abwicklungsjahr				
		k=1	2	3	4	5
1999	400	50	100	30	50	50
2000	1000	120	260	250	130	
2001	1100	130	270	280		
2002	1200	150	310			
2003	1300	160	330.27	291.20	167.14	162.50

$$\hat{s}_2 = 0.254 \quad \hat{s}_3 = 0.224 \quad \hat{s}_4 = 0.129 \quad \hat{s}_5 = 0.125$$

Die inflationsbereinigten Reserve für das Anfalljahr 2003 nach den Verfahren der anfalljahrsunabhängigen Schadenquotenzuwächse beträgt:

$$330.27 + 291.20 + 167.14 + 162.50 = 951.11.$$

Zu c)

Die Schadenzahlung des Anfalljahres 1999 im 3. Abwicklungsjahr stellt offensichtlich einen Ausreißer dar, der beim Chain-Ladder-Verfahren besser ausgeglichen wird als beim Payment-Ratio-Verfahren, da die Anfalljahre, in denen der Ausreißer nicht auftritt, durch das größer gewordene (Prämien-)volumen beim Chain-Ladder-Verfahren bei der Berechnung des Abwicklungskoeffizienten $\hat{f}_2$ (automatisch) stärker berücksichtigt wird.

Zusatzaufgabe (15 Punkte)

Ein Versicherungsunternehmen bietet für ein Risiko mit einem Jahresgesamtschaden S, beschrieben durch die folgende Verteilung,

k Geldeinheiten (GE)	1	2	3
$P(S = k)$	0.2	0.5	0.3

eine Gewinnbeteiligung an:
Übersteigt die Nettorisikoprämie B den Jahresschaden S, so werden *40%* der Differenz $\max(B - S,\ 0)$ zurückgegeben. (Die Selbstregulierung von Schäden sei hier ausgeschlossen.)

a) Bestimmen Sie die erforderliche Nettorisikoprämie B.

b) Bestimmen Sie für eine Prämie B in Höhe von *2.25 GE* den Erwartungswert und die Standardabweichung des „Gewinns“ $\max(B - S,\ 0) \cdot 0.6 + [\min(B, S) - S]$.

   (Hierbei sollen Zuschläge für Sicherheit, Kosten, Gewinn usw. nicht berücksichtigt werden)

Lösung:

Zu a)

Die Prämie muss so festgelegt werden, dass

$$B = E[S] + 0.4 \cdot E[\ddot{U}]$$

mit $\ddot{U} = \max(B - S,\ 0)$.
Da $B > E[S] = 2.1$ ist, folgt für den erwarteten Gewinn

$$\begin{aligned}
E[\ddot{U}] &= \sum_{k=1}^{3} \max(B - k,\ 0) \cdot P(S = k) \\
&= \begin{cases} 0.2 \cdot (B - 1) + 0.5 \cdot (B - 2) & \text{falls } 2 \leq B < 3 \\ 0.2 \cdot (B - 1) + 0.5 \cdot (B - 2) + 0.3 \cdot (B - 3) & \text{falls } 3 \leq B \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0.7B - 1.2 & \text{falls } 2 \leq B < 3 \\ B - 2.1 & \text{falls } 3 \leq B \end{cases}
\end{aligned}$$

also

$$B - 0.4 \cdot E[\ddot{U}] = \left.\begin{cases} 0.72B + 0.48 & \text{falls } 2 \leq B < 3 \\ 0.60B + 0.84 & \text{falls } 3 \leq B \end{cases}\right\} = 2.1$$

und somit

$$0.72B + 0.48 = 2.1 \text{ d.h. } B = 2.25 \text{ GE.}$$

Zu b)

Nach a) gilt mit $G = \max(B - S,\ 0) \cdot 0.6 + [\min(B, S) - S]$.

$$\begin{aligned}
E[G] &= 0 \\
E[G^2] &= (1.25 \cdot 0.6)^2 \cdot 0.2 + (0.25 \cdot 0.6)^2 \cdot 0.5 + 0.75^2 \cdot 0.3 = 0.2925 \\
\sigma[G] &= \sqrt{0.2925} = 0.5408
\end{aligned}$$