Bericht zur Prüfung im Mai 2003 über Schadenversicherungsmathematik (Grundwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Martin Morlock* (Giessen)

Am 10. Mai 2003 fand die achte DAV-Prüfung zur Schadenversicherungsmathematik statt. Von den 278 Teilnehmern und Teilnehmerinnen haben 197 bestanden.
Zu jedem der Gebiete Grundlagen, Prämienkalkulation, Solvabilität, Risikoteilung und Reservierung war jeweils eine Aufgabe gestellt worden. Die Zusatzaufgabe wurde nur gewertet, wenn eine der anderen Aufgaben nicht bearbeitet war. Als Hilfsmittel war die klassische Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen. Die Zahlen in der Aufgabenstellung geben jeweils die maximal erreichbare Punktzahl an. Die Klausur wurde als bestanden bewertet, wenn 36 der 90 möglichen Punkte erreicht wurden.

1. Aufgabe (15 Punkte):

Sei $VarK(S)$ der Variationskoeffizient eines Risikos S.

a) Zeigen Sie: Sind S, T stochastisch unabhängige Risiken mit den Verteilungen $PSV(\lambda_S, Q)$ und $PSV(\lambda_T, Q)$, dann gilt $VarK(S+T) \leq VarK(S)$.

b) Obige Ungleichung gilt nicht allgemein. Seien $E[S] = Var(S) = E[T] = 1$. Für welche Werte von $Var(T)$ gilt dann die Relation $VarK(S+T) > VarK(S)$?

c) Sei S der Gesamtschaden eines Bestandes und T das Risiko eines einzelnen Vertrages. Es gelte:

$$E[T] \leq E[S]/1000$$

$$VarK(T) \leq 44 VarK(S).$$

Zeigen Sie, dass dann wiederum $VarK(S+T) - VarK(S) \leq 0$ gilt.

Lösung:
a) Seien $m(1)$ das erste und $m(2)$ das zweite Moment von Q. Die Verteilung $PSV(\lambda, Q)$ hat Erwartungswert $\lambda m(1)$ und Varianz $\lambda m(2)$, und somit ist der quadrierte Variationskoeffizient dieser Verteilung $m(2)/(\lambda m(1)^2)$. S hat somit den quadrierten Variationskoeffizienten $a := m(2)/(\lambda_S m(1)^2)$. Die Summe $S+T$ hat die Verteilung $PSV(\lambda_S + \lambda_T, Q)$ mit dem quadrierten Variationskoeffizienten $m(2)/((\lambda_S + \lambda_T)m(1)^2)$, und dieser ist kleiner als a.

b) Der quadrierte Variationskoeffizient von $S+T$ ist $(Var(S)+Var(T))/(E[S]+E[T])^2 = (1+Var(T))/4$. Dieser Wert ist größer als der (quadrierte) Variationskoeffizient 1 von S, wenn $Var(T) > 3$.
c) Wir gehen aus von der Differenz

$$VarK(S+T) - VarK(S),$$

erweitern diese passend und formen das Produkt um:

$$\begin{aligned}&(VarK(S+T) - VarK(S))(VarK(S+T)\\&+ VarK(S))E[S+T]^2 E[S]^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (VarK^2(S+T) - VarK^2(S))E[S+T]^2E[S]^2 \\
&= (Var(S) + Var(T))E[S]^2 - Var(S)E[S+T]^2 \\
&= Var(T)E[S]^2 - Var(S)(2E[S]E[T] + E[T]^2) \\
&= E[S]^2E[T]^2(VarK^2(T) - VarK^2(S)(2E[S]/E[T] + 1)) \\
&\leq E[S]^2E[T]^2VarK^2(S)(44^2 - 2E[S]/E[T] - 1).
\end{aligned}
$$

Wegen $E[S]/E[T] \geq 1000$ und $44^2 = 1936 < 2001$ ist dieser letzte Ausdruck kleiner oder gleich Null. Somit ist auch $VarK(S+T) - VarK(S)$ kleiner oder gleich Null.

2. Aufgabe (20 Punkte):

Bei einem Versicherungsunternehmen mit 2 Versicherungsnehmern hat jeder Versicherungsnehmer mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 einen Schaden der Höhe 1.000 und ist mit der Wahrscheinlichkeit von 0,8 schadenfrei. Die Anfangsreserve beträgt 3.000 und die Prämie beträgt 300 für jeden der Versicherungsnehmer.

a) Wie groß ist die Ruinwahrscheinlichkeit für das Versicherungsunternehmen im Lauf von 3 Jahren?

b) Das Versicherungsunternehmen hat die Möglichkeit, in jedem Jahr gegen eine Prämie von 50 eine Rückversicherung abzuschließen, die in jeder Periode den 2. Schaden des Bestands (bestehend aus den beiden Versicherungsnehmern) übernimmt, falls ein solcher eintritt. Ist die Rückversicherungsprämie auskömmlich berechnet; d.h. größer als der Erwartungswert des vom Rückversicherer zu tragenden Schadens?

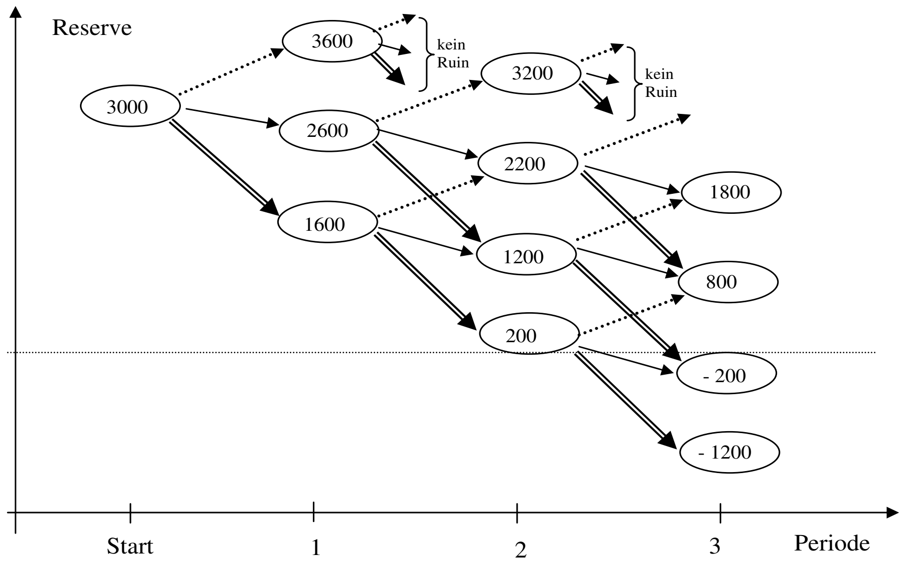
c) Stellen Sie die Entwicklung der Reserve des EV in den ersten 3 Jahren unter Einbeziehung der Rückversicherungsmöglichkeit dar. Kann durch die RV der Ruin in den ersten drei Jahren vollständig vermieden werden?

Lösung:
a) Mit einem Markov-Graphen lässt sich die Entwicklung der Reserve sehr anschaulich darstellen.
Für beide Risiken X_1, X_2 gilt:

$$
\begin{aligned}
P(X_i = 1.000) &= 1 - P(X_i = 0) = 0,2 \ (i = 1,2) \text{ und somit} \\
P(X_1 + X_2 = 0) &= (1 - 0,2)^2 = 0,64 \\
P(X_1 + X_2 = 1.000) &= 2 * 0,2 * (1 - 0,2) = 0,32 \\
P(X_1 + X_2 = 2.000) &= 0,2^2 = 0,04
\end{aligned}
$$

Vier Wege führen zum Ruin mit einer Reserve von - 200 bzw. -1200 in der dritten Periode:
(i) **1 Weg** mit jeweils 2 Schäden in allen Perioden mit der Wahrscheinlichkeit: $(0,2^2)^3 = 0,000064$
(ii) **3 Wege** mit 2 mal 2 Schäden und 1 mal 1 Schaden mit insgesamt der Wahrscheinlichkeit $3 * (0,2^2)^2 * (2 * 0,2 * (1 - 0,2)) = 0,001536$.
Als Summe ergibt sich 0,001600.

b) Wahrscheinlichkeit für 2 Schäden: 0,04.
Schadenerwartungswert für die Rückversicherung: 40;
damit ist die Rückversicherungsprämie auskömmlich berechnet.



c)
Damit ist klar, dass unter Einbeziehung der Rückversicherung kein Ruin in den ersten 3 Perioden eintritt.

3. Aufgabe (20 Punkte)

Wir betrachten das folgende Bonus-Malus-System mit den Stufen G, M und S:

	G	M	S
G	0	1	>1
M	0	1	>1
S	-	0	>0

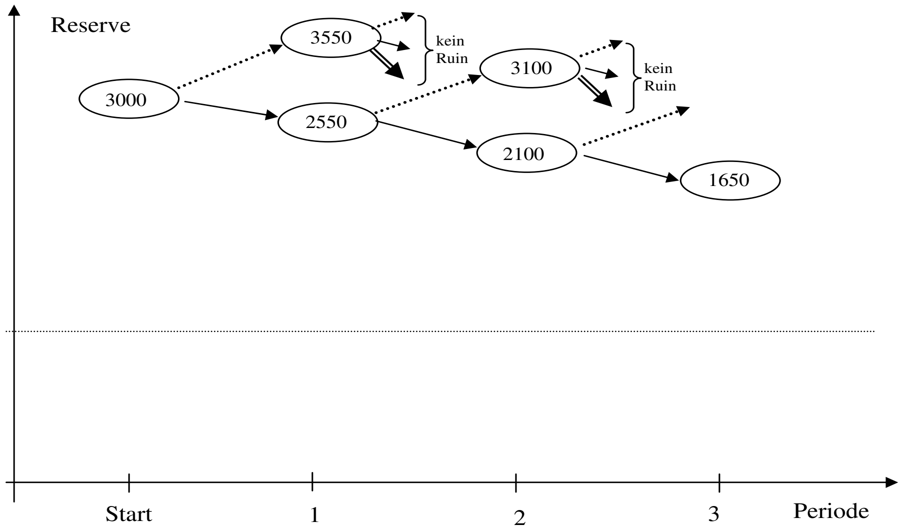
Für die Anzahl der Schäden N pro Jahr gelte:
$P(N=0) = 2/3, P(N=1) = 1/9$ und $P(N>1) = 2/9$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsnehmer mit diesem Schadenverhalten nach zwei Jahren in Stufe G ist, wenn er am Anfang des ersten Jahres in Stufe G war?

b) Notieren Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $p(i,j), i,j \in \{G,M,S\}$, und berechnen Sie die zugehörige stationäre Verteilung $(p(G), p(M), p(S))$.

Wie groß müssten $P(N=0), P(N=1)$ und $P(N>1)$ sein, damit man als stationären Vektor $p(G) = p(M) = p(S)$ erhält?

Lösung:
a) Die beiden Möglichkeiten des Überganges von G nach G sind: G-G-G und G-M-G, sie haben die Wahrscheinlichkeit 4/9 bzw. 2/27. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit 14/27.



b) Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind in folgender Tabelle eingetragen:

	G	M	S
G	2/3	1/9	2/9
M	2/3	1/9	2/9
S	0	2/3	1/3

Die Berechnung der stationären Verteilung ist die Lösung des Gleichungssystems

$$p(G)p(G,G) + p(M)p(M,G) + p(S)p(S,G) = p(G)$$

$$p(G)p(G,M) + p(M)p(M,M) + p(S)p(S,M) = p(M)$$

$$p(G)p(G,S) + p(M)p(M,S) + p(S)p(S,S) = p(S).$$

Eine Lösung $x(G), x(M), x(S)$ erhält man am schnellsten durch den Ansatz $x(G) = 1$, dann in die erste Gleichung eingesetzt:

$$2/3 + 2/3x(M) = 1 \text{ und daher } \; x(M) = 1/2,$$

und dies wiederum in die dritte Gleichung eingesetzt:

$$2/9 + 2/9x(M) + 1/3x(S) = x(S) \text{ und daraus } \; x(S) = 1/2.$$

Durch Normierung erhalten wir die Lösung $p(G), p(M), p(S):$

$$x(G) + x(M) + x(S) = 2,$$

$$p(G) = x(G)/2 = 1/2, p(M) = x(M)/2 = 1/4, \text{ und } \; p(S) = x(S)/2 = 1/4.$$

c) Für die gesuchten Größen $p(0) = P(N = 0), p(1) = P(N = 1)$ und $p(2) = P(N > 1)$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p(0) + p(0) &= 1 \\ p(1) + p(1) + p(0) &= 1 \\ p(2) + p(2) + (p(1) + p(2)) &= 1. \end{aligned}$$

Es ergibt sich sofort $p(0) = 1/2, p(1) = 1/4$ und $p(2) = 1/4$.

4. Aufgabe (20 Punkte):

Die Entlastungseffektfunktion $r(a)$ einer Schadenhöhe X hat die folgende Gestalt:

$$r(a) = \begin{cases} 0,75 & \text{für } 0 \le a < 1 \\ -0,25\,a^2 + a & \text{für } 1 \le a \le 2 \end{cases}$$

a) Wie groß ist die maximale Schadenhöhe?

b) Wie groß ist der Erwartungswert der Schadenhöhe?

c) Geben Sie die Verteilungsfunktion der Schadenhöhe an (gegebenenfalls mit einem oder mehreren Sprüngen). Welche Verteilung liegt hier vor?

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Totalschadens für ein auf 10 begrenztes Schadenrisiko mit dem Erwartungswert 6, falls die linksseitige Ableitung $r'(10)$ der Entlastungseffektfunktion an der Stelle 10 den Wert $r'(10)$ =0,04 hat.

Begründen Sie Ihre Antworten jeweils.

Lösung:

a) Die maximale Schadenhöhe beträgt 2, da $r(2) = 1$ bedeutet, dass der Erwartungswert des Schadens im Selbstbehalt so groß ist, wie der Erwartungswert des Schadens insgesamt. Wären Schäden größer als 2 mit einer positiven Wahrscheinlichkeit möglich, hätten wir einen Widerspruch zur obigen Aussage zum Erwartungswert des Schadens im Selbstbehalt.

b) Es gilt:
$r'(0) = \frac{1-F(0)}{E(X)} = 0,75$ und damit $E(X) = 1/0,75 = 1,333$.

c) Aus

$$r'(a) = \begin{cases} 0,75\ , & \text{für } 0 \le a < 1 \\ -0,5\,a + 1\ , & \text{für} 1 \le a \le 2 \end{cases}$$

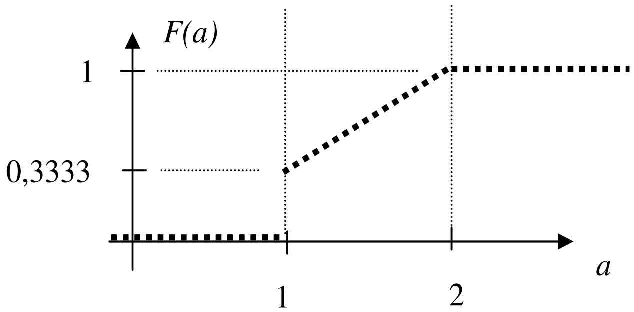
folgt $0,75 = \frac{1-F(a)}{1,333}$, d.h. $F(a)$ =0 , für $0 \le a < 1$ und

$$-0,5\,a + 1 = \frac{1-F(a)}{1,333}\ ,\ \text{d.h. } F(a) = \tfrac{2}{3}\,a - \tfrac{1}{3}\ ,\ \text{für } 1 \le a \le 2$$

Wir haben es hier mit einer gemischten Verteilung zu tun, bestehend aus der Einpunktverteilung in 1 mit der Wahrscheinlichkeit von 1/3 und der (1, 2)-Gleichverteilung mit der Wahrscheinlichkeit von 2/3.

d) Mit der linksseitigen Ableitung $r'(10) = \frac{1-F(10)}{6} = 0,04$ erhält man $F(10)$ =0,76.

Damit verbleibt eine Wahrscheinlichkeit von 0,24 für das Risiko eines Totalschadens der Höhe 10.



5. Aufgabe (15 Punkte):

Das folgende Abwicklungsdreieck der Schadenzahlungen der letzten 5 Anfalljahre 1998, 1999, 2000, 2001 und 2002 eines (Teil-)Bestands eines Versicherungsunternehmens enthält die Prämieneinnahmen sowie die Schadenzahlungen der jeweiligen Abwicklungsjahre in Millionen EURO. Alle auftretenden und zu berechnenden Werte seien inflationsbereinigt.

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
1998	(200)	40	40	60	20	10
1999	(210)	40	40	60	20	
2000	(300)	60	70	100		
2001	(320)	65	15			
2002	(330)	70				

a) Berechnen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren jeweils eine Schätzung der Spätschadenreserven für die Anfalljahre 1999, 2000, 2001 und 2002.

b) Berechnen Sie mit dem Verfahren der anfalljahrsunabhängigen Schadenquotenzuwächse eine Schätzung der Spätschadenreserven für die Anfalljahre 1999, 2000, 2001 und 2002.

c) Worauf ist der deutliche Unterschied der Schätzungen der Spätschadenreserven zurückzuführen?

   Welcher Schätzung gemäß a) oder b) räumen Sie eine größere Glaubwürdigkeit ein?

Die Berechnungen sind mit einer Genauigkeit von 3 Nachkommastellen durchzuführen.

Lösung:

Kumulierte Schadenzahlungen C_{ik} :

Anf.-	Abw.Jahr						*CL-*	*AUSQZ-*
Jahr	(Prämie)	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	*Reserve*	*Reserve*
1998	(200)	40	80	140	160	170		
1999	(210)	40	80	140	160		10,080	10,500
2000	(300)	60	130	230			49,452	44,400
2001	(320)	65	80				90,976	146,560
2002	(330)	70					200,035	203,940
						Σ	350,543	405,400

$$\hat{f}_1 = 1,805; \hat{f}_2 = 1,759; \hat{f}_3 = 1,143; \hat{f}_4 = 1,063$$
$$\hat{s}_2 = 0,160; \hat{s}_3 = 0,310; \hat{s}_4 = 0,098; \hat{s}_5 = 0,050$$

a) Die Schätzungen der (inflationsbereinigten) Spätschadenreserven für die Anfalljahre 1999, 2000, 2001 und 2002 sind in dem obigen Tableau eingetragen.

b) Die Schätzungen der (inflationsbereinigten) Spätschadenreserven für die Anfalljahre 1999, 2000, 2001 und 2002 sind in dem obigen Tableau eingetragen.

c) Die Schätzungen differieren beträchtlich. Grund hierfür ist die auffallend niedrige Schadenzahlung $S_{2001,\ 2} = 15$, die mit dem sonstigen Abwicklungspattern nicht übereinstimmt. Hier liegt mutmaßlich ein Ausreißer vor. Dies zeigt sich auch daran, dass die Schätzungen der Spätschadenreserven für beim Verfahren der AUSQZ mit den Anfalljahren monoton steigt, nicht jedoch die entsprechende Zeitreihe für die Schätzung mit dem Chain-Ladder-Verfahren (Vergl. obiges Tableau). Damit besitzt in diesem Fall das Verfahren AUSQZ eine größere Glaubwürdigkeit.

6. Zusatzaufgabe (15 Punkte):

Gegeben sei ein versichertes Risiko mit Poissonverteilter Schadenzahl $N \sim \pi(3)$ und identisch verteilter Einzelschadenhöhe X für jeden Schadenfall mit

k Geldeinheiten (GE)	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = k)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1

(Die Zufallsvariablen $N,\ X_1,\ X_2,\ ...$ sind stochastisch unabhängig, die Schadenhöhen $X_1,\ X_2,\ ...$ sind identisch verteilt wie X und erfüllen damit die Voraussetzungen des kollektiven Modells der Risikotheorie).
Für dieses Risiko werde eine Schadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität 3 GE und unbegrenzter Haftung abgeschlossen.

a) Bestimmen Sie die erwartete ,,Anzahl von Entschädigungen $\hat{N}$" und die durchschnittliche ,,Entschädigungshöhe $\bar{X}$", die der Rückversicherer zu leisten hat.

b) Bestimmen Sie für $k = 0,\ 1,\ 2$ die Wahrscheinlichkeiten $P(\hat{S} = k)$, wobei $\hat{S} = \sum_{j=1}^{\hat{N}} \bar{X}_j$ der vom Rückversicherer zu tragende Gesamtschaden ist.

c) Um wieviel kann der Rückversicherer seine Nettorisikoprämie reduzieren, wenn eine Jahresüberschaden-Rückversicherung (Stop-Loss-Rückversicherung) mit der Priorität von 3 GE vereinbart wird?

Lösung:

a) $\hat{N} = \sum_{i=1}^{N} 1_{[X_i>3]} \sim \pi(3\alpha)$mit $\alpha = P(X > 3) = 0,5$ also $\hat{N} \sim \pi(1,5)$ und somit $E[\hat{N}] = 1,5$. Die bedingte Zufallsvariable $\bar{X} = X - 3|X > 3$ hat die Zähldichte

k (GE)	1	2	3	4
$P(\bar{X} = k)$	0,4	0,2	0,2	0,2

also

$$E[\bar{X}] = 0,4 + 0,4 + 0,6 + 0,8 = 2,2.$$

b) $P(\hat{S} = k) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\hat{N} = j)\, Q^{*j}\{k\} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$, wobei Q die Verteilung von $\bar{X}$ ist.

$$\begin{aligned}
P(\hat{S} = 0) &= P(\hat{N} = 0) = \exp(-1,5) = 0,2231 \\
P(\hat{S} = 1) &= P(\hat{N} = 1)P(\bar{X}_1 = 1) = \exp(-1,5) \times 1,5 \times 0,4 \\
&= 0,1339 \\
P(\hat{S} = 2) &= P(\hat{N} = 1)P(\bar{X}_1 = 2) + P(\hat{N} = 2)P(\bar{X}_1 + \bar{X}_2 = 2) \\
&= \exp(-1,5) \times (1,5 \times 0,2 + \frac{1,5^2}{2} \times 0,4^2) \\
&= 0,1071
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
B_1 &= E[\hat{S}] = E[\hat{N}] \times E[\bar{X}] = 1,5 \times 2,2 = 3,3 \\
B_2 &= E[\min(\hat{S},\ 3)] = \sum_{k=0}^{\infty} \min(k,3) \times P(\hat{S} = k) = \\
&= P(\hat{S} = 1) + 2P(\hat{S} = 2) + 3\sum_{k=3}^{\infty} P(\hat{S} = k) \\
&= P(\hat{S} = 1) + 2P(\hat{S} = 2) \\
&\quad + 3(1 - P(\hat{S} = 0) - P(\hat{S} = 1) - P(\hat{S} = 2)) \\
&= 3 - 3P(\hat{S} = 0) - 2P(\hat{S} = 1) - P(\hat{S} = 2) \\
&= 3 - 3 \times 0,2231 - 2 \times 0,1339 - 0,1071 = 1,9558 \\
B_1 - B_2 &= 1,3442
\end{aligned}$$