Bericht zur Prüfung im März 2002 über Mathematik der Schadenversicherung (Grundwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Martin Morlock* (Giessen)

Zu jedem der Gebiete Grundlagen, Prämienkalkulation, Solvabilität, Risikoteilung und Reservierung ist jeweils eine Aufgabe gestellt. Die Zusatzaufgabe wird nur gewertet, wenn eine der anderen Aufgaben nicht bearbeitet wurde. Als Hilfsmittel sind die beigefügte Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen. Die Zahlen in der Aufgabenstellung geben jeweils die maximal erreichbare Punktzahl an. Die Klausur ist bestanden, wenn 36 der 90 möglichen Punkte erreicht wurden.

1. Aufgabe (Grundlagen) (20 Punkte):

a) $X, Y > 0$ sind beliebige (nicht notwendigerweise stochastisch unabhängige) Risiken (Zufallsvariable). In welcher Beziehung stehen die Größen „$\mathrm{VarK}(X+Y)$" und „$\mathrm{VarK}(X) + \mathrm{VarK}(Y)$" wobei VarK den Variationskoeffizient bezeichnet?
Benutzen Sie die Ungleichung $\mathrm{Var}(X+Y) \le \left(\sqrt{\mathrm{Var}(X)} + \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\right)^2$.

b) Zeigen Sie: Für ein beliebiges Risiko X und $a > 0$ gilt $\mathrm{VarK}(aX) = \mathrm{VarK}(X)$.

Lösung der Aufgabe Grundlagen:

a) Gemäß dem angegebenen Hinweis gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VarK}(X) + \mathrm{VarK}(Y) &= \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E[X]} + \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}{E[Y]} \\
&= \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,\dfrac{E[X]+E[Y]}{E[X]}}{E[X]+E[Y]} + \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\,\dfrac{E[X]+E[Y]}{E[Y]}}{E[X]+E[Y]} \\
&\ge \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E[X]+E[Y]} + \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}{E[X]+E[Y]} && (X \text{ bzw. } Y > 0) \\
&\ge \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)}}{E[X+Y]} && (\text{Hinweis}) \\
&= \mathrm{VarK}(X+Y).
\end{aligned}
$$

b) Für beliebiges $a \neq 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VarK}(aX) &= \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(aX)}}{E[aX]} = \frac{\sqrt{a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)}}{a \cdot E[X]} \\
&= \frac{|a| \cdot \mathrm{Var}(X)}{a \cdot E[X]} = \frac{|a|}{a} \cdot \mathrm{VarK}(X) = \mathrm{sign}(a) \cdot \mathrm{VarK}(X)
\end{aligned}
$$

Für $a > 0$ gilt somit die behauptete **Skaleninvarianz** $\mathrm{VarK}(aX) = \mathrm{VarK}(X)$.

2. Aufgabe (Prämienkalkulation) (20 Punkte)

Der für einen Versicherungsvertrag mögliche Gesamtschaden S werde beschrieben durch eine gemischte Verteilung

$$S \sim 0{,}6\,\delta_0 + 0{,}4\,U(0{,}1)$$

d.h. $P(S=0) = 0{,}6$ und $P(S > t) = 0{,}4 \cdot (1-t) \quad (0 \le t \le 1)$.

Das Versicherungsunternehmen bietet für dieses Risiko alternativ die Verträge

V_1: ohne Beitragsrückerstattung zur Nettorisikoprämie B_1 und

V_2: mit einer Beitragsrückerstattung von 30% der Nettorisikoprämie B_2, falls im Versicherungszeitraum kein Schaden zu regulieren ist,

an.

a) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von S und geben Sie die Nettorisikoprämie B_1 an.

b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie B_2.

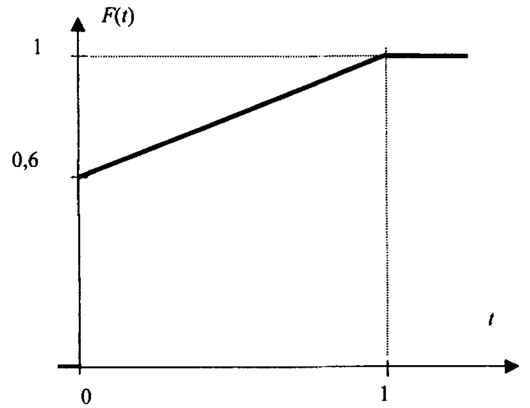
c) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion der Zahlungen des Versicherungsunternehmens für den Fall der Beitragsrückerstattung gemäß Vertrag V_2.

Hinweis: Unterstellen Sie bei b) und c), dass sich alle Versicherungsnehmer rational verhalten, d. h. dass sie einen Gesamtschaden bis zur Höhe der Beitragsrückerstattung selbst tragen.

Lösung der Aufgabe Prämienkalkulation:

a) Für die Verteilungsfunktion F(t) von S gilt:

$$\begin{aligned} F(t) &= 0, & t &< 0 \\ F(t) &= 0{,}6 + 0{,}4t, & 0 &\le t < 1 \\ F(t) &= 1, & 1 &\le t \end{aligned}$$



Damit beträgt die Nettorisikoprämie wegen $S \geq 0$

$$B_1 = E[S] = \int_0^\infty (1 - F(t))dt = \int_0^1 (0,4 - 0,4t)dt = 0{,}2$$

oder ohne Integration: $B_1 = E[S] = 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot E[U(0{,}1)] = 0 + 0{,}4 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}2.$

b) Da ein rational handelnder Versicherungsnehmer bei einer Nettorisikoprämie B_2 nur einen Gesamtschaden melden wird, der größer als $0{,}3\,B_2$ ist, gilt für die zu leistenden Zahlungen S_2 des Versicherungsunternehmens

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{ll} 0{,}3\,B_2, & S < 0{,}3\,B_2 \\ S, & 0{,}3\,B_2 \le S \end{array} \right\} = \max(S - 0{,}3\,B_2;\ 0) + 0{,}3\,B_2.$$

1. Lösungsweg:

Die Verteilungsfunktion $F_2(t)$ der vom Versicherungsunternehmen zu leistenden Zahlungen S_2 hat die Gestalt:

$$F_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0{,}3\,B_2 \\ F(t), & 0{,}3\,B_2 \le t \end{cases}.$$

Da der Höchstschaden hier $S = 1$ beträgt, kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass $B_2 < 1$ gilt. Für die Nettorisikoprämie B_2 gilt damit:

$$B_2 = E[S_2] = \int_0^{\infty} (1 - F_2(t))dt = \int_0^{0{,}3B_2} dt + \int_{0{,}3B_2}^{\infty} (1 - F(t))dt = 0{,}3\,B_2 + 0{,}4 \int_{0{,}3B_2}^{1} (1 - t)dt$$

$$= 0{,}3\,B_2 + 0{,}4(1 - 0{,}3\,B_2 - 0{,}5 + 0{,}045\,B_2^2),$$

also $0{,}018\,B_2^2 - 0{,}82\,B_2 + 0{,}2 = 0$ und folglich $B_2 = 0{,}245$.

(Die 2. Lösung der obigen quadratischen Gleichung ist 45,31 und somit hier nicht relevant, da von $B_2 < 1$ ausgegangen werden kann.)

2. Lösungsweg:

Mit $p = P(S > 0{,}3B_2) = 1 - F(0{,}3B_2) = 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}3B_2)$ gilt, dass das Versicherungsunternehmen mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ die Zahlung $0{,}3B_2$ zu leisten hat und sich die darüber hinausgehenden Zahlungen aus der Integration ergeben:

$$B_2 = E[S_2] = (1 - p) \cdot 0{,}3\,B_2 + 0{,}4 \int_{0{,}3B_2}^{1} t\,dt$$

$$= (0{,}6 + 0{,}12\,B_2) \cdot 0{,}3\,B_2 + 0{,}4 \cdot (0{,}5 - 0{,}045\,B_2^2)$$

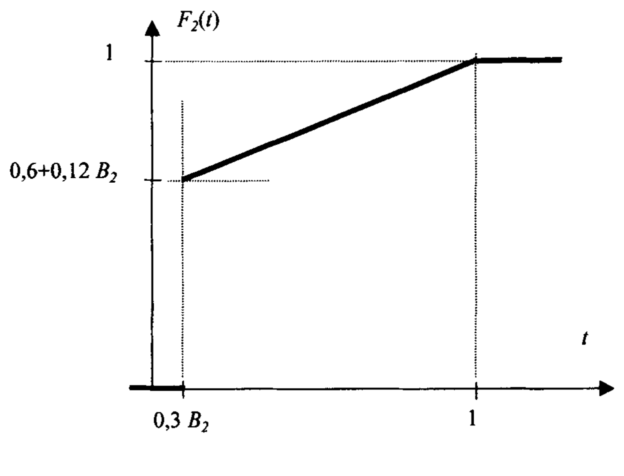
$$= 0{,}18\,B_2 + 0{,}018\,B_2^2 + 0{,}2$$

also $0{,}018\,B_2^2 - 0{,}82\,B_2 + 0{,}2 = 0$ und folglich $B_2 = 0{,}245$.

Die Nettoprämie muss also aufgrund der Beitragsrückerstattung um 22,5% erhöht werden.

c) Die Zahlung $S_2 = \begin{cases} 0{,}3\,B_2, & S < 0{,}3\,B_2 \\ S, & 0{,}3\,B_2 \le S \end{cases}$ des Versicherungsunternehmens hat die Verteilungsfunktion:

$$F_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0{,}3\,B_2 \\ F(t), & 0{,}3\,B_2 \le t \end{cases}.$$



3. Aufgabe (Solvabilität) (15 Punkte):

Ein Versicherungsbestand produziert pro Jahr N Schäden mit $E[N] = 100$, und die Schadenhöhen X_i sind stochastisch unabhängig sowie stochastisch unabhängig von N mit

$$P\{X_i = 100\} = P\{X_i = 200\} = \ldots = P\{X_i = 1.000\} = 1/10.$$

a) Zeigen Sie: Eine Bestandsprämie von 55.000 ist nicht ausreichend, d.h. auch für ein Startkapital von $s = 550.000$ ergibt sich eine Ruinwahrscheinlichkeit von 1.

b) Verbessert sich die Situation des Versicherungsunternehmens durch Abschluss des folgenden Rückversicherungsvertrages: Bei jedem Einzelschaden über 500 bezahlt der Rückversicherer 200, und die Rückversicherungsprämie für den Gesamtbestand beträgt 10.000? Und ist diese Rückversicherungsprämie für den Rückversicherer in obigem Sinn ausreichend?

c) Wie verändert sich die Situation des Versicherungsunternehmens, wenn statt des Rückversicherungsvertrages ein Selbstbehalt des Versicherungsnehmers in Höhe von 100 pro Schadenfall vereinbart wird und die Bestandsprämie auf 46.000 reduziert wird?

Lösung der Aufgabe Solvabilität:

a) Ist S der Gesamtschaden des Bestandes, dann gilt

$$E[S] = E[N] \cdot E[X_1] = 100 \cdot 550 = 55.000 = \text{Jahresprämie},$$

und damit wird $\psi(s) = 1$ für alle $s > 0$, d.h. mit Wahrscheinlichkeit 1 tritt (bei unendlichem Planungshorizont) irgendwann der Ruin ein, gleichgültig wie groß die Anfangsreserve ist, da das Prämienaufkommen nicht größer ist als das Schadenaufkommen.

b) Mit der angegebenen Rückversicherung gilt

$$E[S] = E[N] \cdot E[X_1] = 100 \cdot \left(550 - \frac{5}{10} \cdot 200\right) = 100 \cdot 450 = 45.000,$$

und dies ist gerade die dem Erstversicherer verbleibende Jahresprämie.

Auch hier gilt $\psi(s) = 1$ für alle $s > 0$.

Für den Rückversicherer ergibt sich aus dem Geschäft ein Gesamtschaden mit dem Erwartungswert 10.000, also stimmen Jahresprämie und Erwartungswert des Gesamtschadens überein.

Auch für den Rückversicherer beträgt die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s) = 1$ für alle $s > 0$.

c) Ein Selbstbehalt der Höhe 100 verändert die Schadenhöhenverteilung:

$$Y_i = (X_i - 100)^+ = \max(X_i - 100, 0)$$

mit $P\{Y_i = 0\} = P\{Y_i = 100\} = \ldots = P\{Y_i = 900\} = 1/10$.

Also ist der Erwartungswert des Gesamtschadens S

$$E[S] = E[N] \cdot E[Y_1] = 100 \cdot 450 = 45.000,$$

und dieser ist kleiner als die Jahresprämie 46.000.

Somit ist die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s) < 1$ für alle $s > 0$.

4. Aufgabe (Risikoteilung) (20 Punkte):

Bei einem Risiko können 0, 1, 2 oder 3 Schäden mit jeweils der Wahrscheinlichkeit 0,25 eintreten. Die Schadenhöhe ist $U(0, 10)$-verteilt, d.h. auf dem Intervall $(0, 10)$ gleichverteilt. Alle auftretenden Zufallsgrößen werden als stochastisch unabhängig angenommen.

a) Berechnen Sie die Risikoprämie nach dem Varianzprinzip mit einem Risikozuschlag von 1% der Varianz des Gesamtschadens.

b) Das Erstversicherungsunternehmen möchte einen Teil der Schäden durch eine Rückversicherung abdecken. Hierbei werden die Rückversicherungsprämien ebenfalls nach dem Varianzprinzip mit dem Parameter 1% für den Sicherheitszuschlag berechnet. Diskutieren Sie die folgenden Rückversicherungsmöglichkeiten aus Sicht des Rückversicherungsunternehmens:

ba) Falls mehr als ein Schaden auftritt, wird dieser von dem Rückversicherer übernommen; d.h. falls zwei Schäden auftreten, übernimmt der Rückversicherer den zweiten Schaden; falls drei Schäden auftreten, übernimmt der Rückversicherer den zweiten und den dritten Schaden.

bb) Der Rückversicherer übernimmt von allen Schäden den $\sqrt{50}$ übersteigenden Schadenbetrag.

Lösung der Aufgabe Risikoteilung:

Es bezeichne

N, die Anzahl der Schäden und

X, die U(0, 10)-verteilte Schadenhöhe.

a) Bestimmung der Risikoprämie

Mit den Größen

$$\begin{aligned} E[N] &= (0 + 1 + 2 + 3)/4 = 1{,}5 \\ \operatorname{Var}(N) &= (0 + 1 + 4 + 9)/4 - 1{,}5^2 = 1{,}25 \\ E[X] &= 5 \\ \operatorname{Var}(X) &= (10 - 0)^2/12 = 8{,}333 \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N] \cdot E[X] = 7{,}5 \\ \operatorname{Var}(S) &= E[N] \cdot \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(N) \cdot (E[X])^2 \\ &= 1{,}5 \cdot 8{,}3333 + 1{,}25 \cdot 5^2 = 43{,}75 \end{aligned}$$

und damit die (Brutto-)Risikoprämie

$$BRP = E[S] + 0{,}01 \cdot \operatorname{Var}(S) = 7{,}5 + 0{,}01 \cdot 43{,}75 = 7{,}9375.$$

ba) Bestimmung der Rückversicherungsprämie, falls jeweils der 2. und 3. Schaden übernommen wird.

Es sei $\tilde{N}$ die vom Rückversicherer gemäß der Vereinbarung aus ba) zu übernehmende Anzahl der Schäden. Offenbar ist $\tilde{N}$ eine diskrete Zufallsvariable, die den Wert 0, 1 oder 2 annehmen kann, wobei

$$P(\tilde{N} = 0) = \frac{1}{2} \text{ und } P(\tilde{N} = 1) = P(\tilde{N} = 2) = \frac{1}{4}$$

gilt. Die Vereinbarung ba) beeinflusst die Verteilung der Einzelschaden*höhen* der vom Rückversicherer zu übernehmenden Schäden *nicht*. Somit ergibt sich der Gesamtschaden $\tilde{S}_a$ des Rückversicherers in ba) aus den Verteilungen von $\tilde{N}$ und X.

Mit den Größen

$$\begin{aligned} E[\tilde{N}] &= 0/2 + 1/4 + 2/4 = 0{,}75 \\ \operatorname{Var}(\tilde{N}) &= 0/2 + 1/4 + 4/4 - 0{,}75^2 = 0{,}6875 \\ E[X] &= 5 \\ \operatorname{Var}(X) &= 8{,}3333 \end{aligned}$$

erhält man

$$E[S_a] = E[\tilde{N}] \cdot E[X] = 0{,}75 \cdot 5 = 3{,}75$$

$$\text{Var}(S_a) = 0{,}75 \cdot 8{,}3333 + 0{,}6875 \cdot 5^2 = 23{,}4375$$

und damit die (Brutto-)Risikoprämie

$$BRP_a = E[S_a] + 0{,}01 \cdot \text{Var}(S_a) = 3{,}75 + 0{,}01 \cdot 23{,}4375 = 3{,}984375.$$

bb) Rückversicherungsprämie für den Fall, dass jeder Schaden bis zur Höhe $\sqrt{50}$ beim Erstversicherer verbleibt und die diesen Wert übersteigende Schadenhöhe vom Rückversicherer übernommen wird; Einzelschadenexzedentenrückversicherung

Die Vereinbarung bb) beeinflusst – im Gegensatz zu ba) – die Verteilung der Schaden*anzahlen* der vom Rückversicherer zu übernehmenden Schäden *nicht*. Hingegen wird die Verteilung der Einzelschadenhöhe verändert. Man geht von den Schadenhöhen X_i über auf die Entschädigungen

$$\tilde{X}_i = \max\left(X_i - \sqrt{50};\ 0\right).$$

Somit ergibt sich der Gesamtschaden S_b des Rückversicherers in bb) aus der Verteilung von N und $\tilde{X}$ (wobei $\tilde{X}$ stellvertretend für $\tilde{X}_i$ steht).

Mit

$$E[\tilde{X}] = \int_{\sqrt{50}}^{10} 1/10 \cdot \left(x - \sqrt{50}\right) dx$$

$$= \int_0^{10-\sqrt{50}} 1/10 \cdot x\, dx = 1/20 \cdot \left(10 - \sqrt{50}\right)^2 = 0{,}4289$$

$$\text{Var}(\tilde{X}) = \int_0^{10-\sqrt{50}} 1/10 \cdot x^2\, dx - 0{,}4289^2 = 1/30 \cdot \left(10 - \sqrt{50}\right)^3 - 0{,}4289^2 = 0{,}6536$$

erhält man

$$E[S_b] = E[N] \cdot E[\tilde{X}] = 1{,}5 \cdot 0{,}4289 = 0{,}6434$$

$$\text{Var}(S_b) = 1{,}5 \cdot 0{,}6536 + 1{,}25 \cdot 0{,}4289^2 = 1{,}2103$$

und damit die (Brutto-)Risikoprämie

$$BRP_b = E[S_b] + 0{,}01 \cdot \text{Var}(S_b) = 0{,}6434 + 0{,}01 \cdot 1{,}2103 = 0{,}655503.$$

Ergebnis:

Die Risikoprämie ist für die Übernahme des Risikos in Teil bb) wesentlich kleiner als bei ba). Unter diesem Aspekt wäre aus Sicht des Rückversicherers die Rückversicherung gemäß ba) vorzuziehen (größeres Prämienvolumen).

Betrachtet man ferner die Variationskoeffizienten der beiden Rückversicherungsvarianten, so ergibt sich

für ba) $\text{VarK}(S_a) = \dfrac{\sqrt{23{,}4375}}{3{,}75} = 1{,}291.$

für bb) $\text{VarK}(S_b) = \dfrac{\sqrt{1{,}2103}}{0{,}6434} = 1{,}7099.$

Die Übernahme der Spitzenrisiken bei kleinerer Prämie stellt für den Rückversicherer ein größeres Risiko dar (gemessen mit dem Variationskoeffizienten). Auch aus diesem Grund ist für den Rückversicherer die Variante ba) vorzuziehen.

5. Aufgabe (Schadenreservierung) (15 Punkte):

Ein Versicherungsunternehmen weiß, dass die Schäden einer bestimmten Sachsparte nach 5 Jahren vollständig abgewickelt sind. Vor 2 Jahren hat eine Gesetzesänderung dazu geführt, dass seitdem die zu leistenden Schadenzahlungen um 50% erhöht sind. Die Prämien wurden entsprechend um 50% erhöht. Auf eine Erhöhung der Prämien auf Grund der nunmehr zu niedrig eingeschätzten Spätschäden der Anfalljahre 1997, 1998 und 1999 wurde verzichtet. Die monetäre Inflation spielt bei der betrachteten Sparte eine zu vernachlässigende Rolle.

Das folgende Abwicklungsdreieck der letzten 5 Anfalljahre 1997, 1998, 1999, 2000 und 2001 enthält die geleisteten Zahlungen – also auch die erhöhten Zahlungen und Prämien für die Jahre 2000 und 2001 auf Grund der Gesetzesänderung (in Mio. EURO).

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
1997	(20)	4	6	4	3	3
1998	(25)	6	7	6	3	
1999	(40)	7	15	9		
2000	(90)	21	24			
2001	(120)	24				

a) Berechnen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren eine Schätzung der im Jahr 2002 für Schäden des Anfalljahres 1999 zu leistenden Schadenzahlungen und eine Schätzung der Spätschadenreserve für das Anfalljahr 2001.

b) Berechnen Sie Schätzungen für die Spätschadenreserve für die Anfalljahre 1998 und 2001 mit dem Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse.

Lösung der Aufgabe Schadenreservierung:

a) Die um die (durch die Gesetzesänderung verursachte) superimposed inflation in den Jahren 2000 und 2001 bereinigten Prämien und nichtkumulierten Schadenzahlungen S_{ik}^* ergeben sich aus den gegebenen Daten durch Multiplikation mit 2/3 (damit ein 50%-Zuschlag auf die Ausgangsdaten führt):

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
1997	(20)	4	6	4	2	2
1998	(25)	6	7	4	2	
1999	(40)	7	10	6		
2000	(60)	14	16			
2001	(80)	16				

(Eine andere – rechentechnisch einfachere – Variante inflationiert die Zahlungen, die die Jahre 1997, 1998 und 1999 betreffen. Als Basisjahr wird dabei das Jahr 2001 gewählt. Diese Berechnungsweise führt zu den gleichen Ergebnissen.)

Bereinigte Prämien und bereinigte kumulierte Schadenzahlungen C_{ik}^*

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
1997	(20)	4	10	14	16	18
1998	(25)	6	13	17	19	
1999	(40)	7	17	23		
2000	(60)	14	30			
2001	(80)	16				

Abwicklungskoeffizienten $\hat{f}_k^*$: $\hat{f}_1^* = 2{,}258$; $\hat{f}_2^* = 1{,}35$; $\hat{f}_3^* = 1{,}129$; $\hat{f}_4^* = 1{,}125$

Schadenzahlungen des Anfalljahres 1999 im 4. Abwicklungsjahr

$$\hat{S}_{1999,4}^* = \hat{C}_{1999,4}^* - C_{1999,3}^* = C_{1999,3}^* \cdot (\hat{f}_3^* - 1) = 23 \cdot 0{,}129 = 2{,}967$$

Unter Berücksichtigung der superimposed inflation ergibt sich dann

$$\hat{S}_{1999,4} = 2{,}967 \cdot 1{,}5 = 4{,}45.$$

Schätzung der Spätschadenreserve für das Anfalljahr 2001

$$\hat{R}_{2001}^* = \hat{C}_{2001,5}^* - C_{2001,1}^* = C_{2001,1}^* \cdot (\hat{f}_1^* \hat{f}_2^* \hat{f}_3^* \hat{f}_4^* - 1) = 16 \cdot 2{,}872 = 45{,}952$$

Unter Berücksichtigung der superimposed inflation ergibt sich dann

$$\hat{R}_{2001} = 45{,}952 \cdot 1{,}5 = 68{,}928.$$

b) Schätzung der Schadenquotenzuwächse

$$\hat{s}_k^*: \hat{s}_5^* = 0{,}1; \hat{s}_4^* = 0{,}089; \hat{s}_3^* = 0{,}165; \hat{s}_2^* = 0{,}269$$

Als Schätzung der Spätschadenreserve für 1998 ergibt sich ohne Berücksichtigung der superimposed inflation:

$$\hat{s}_5^* \cdot 25 = 2{,}5$$

und unter Berücksichtigung der superimposed inflation $2{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}75$.

Als Schätzung der Spätschadenreserve für 2001 ergibt sich ohne Berücksichtigung der superimposed inflation:

$$(\hat{s}_2^* + \hat{s}_3^* + \hat{s}_4^* + \hat{s}_5^*) \cdot 80 = 49{,}84$$

und unter Berücksichtigung der superimposed inflation $49{,}84 \cdot 1{,}5 = 74{,}76$.

6. Zusatzaufgaben (15 Punkte):

Das Kollektiv eines Versicherungsunternehmens besteht aus den 2 Risiken A und B mit den folgenden Eintrittswahrscheinlichkeiten der stochastisch unabhängigen Einzelschadenhöhen X_A und X_B:

	Versicherungssumme	Schadenhöhe		
	VS	0	½ VS	VS
Risiko A	6	0,6	0,2	0,2
Risiko B	10	0,8	0,1	0,1

a) Das Erstversicherungsunternehmen schließt zunächst einen Summenexzedentenrückversicherungsvertrag mit dem Maximum (Selbstbehalt) 6 ab. Für den bei ihm verbleibenden Schaden

schließt es (bei einem anderen Rückversicherungsunternehmen) eine Einzelschadenexzedentenrückversicherung mit der Priorität (Selbstbehalt) 3 ab.
Berechnen Sie die Nettorisikoprämien, die der Erstversicherer an die beiden Rückversicherer zu zahlen hat.

b) Wie ändert sich durch die beiden Rückversicherungen das beim Erstversicherer verbleibende Risiko (gemessen mit dem Variationskoeffizienten)?

Lösung der Zusatzaufgabe:

a) Summenexzedentenrückversicherungsvertrag mit dem Maximum 6

Rückversichereranteil S_{RVS}

	Versicherungssumme VS	Schadenhöhe//Eintrittswahrscheinlichkeit		
Risiko A	6	0//0,6	0//0,2	0//0,2
Risiko B	10	0//0,8	5 · 4/10//0,1	10 · 4/10//0,1

Nettorisikorückversicherungsprämie:

$$E[S_{RVS}] = 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}6$$

Nachfolgender Einzelschadenexzedentenrückversicherungsvertrag mit der Priorität 3

Rückversicherungsanteil S_{RVE}

	Versicherungssumme VS	Schadenhöhe//Eintrittswahrscheinlichkeit		
Risiko A	6	0//0,6	0//0,2	3//0,2
Risiko B	10	0//0,8	0//0,1	3//0,1

Nettorisikorückversicherungsprämie

$$E[S_{RVE}] = 3 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}9$$

Die gesamte Rückversicherungsprämie beträgt damit 0,6 + 0,9 = 1,5.

b) Variationskoeffizient der dem Erstversicherer gemeldeten Schadenzahlungen $S = X_A + X_B$ (ohne Rückversicherung)

Risiko A

Erwartungswert: $E[X_A] = 3 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}2 = 1{,}8$

Varianz: $\mathrm{Var}(X_A) = (9 + 36) \cdot 0{,}2 - 1{,}8^2 = 5{,}76$

Risiko B

Erwartungswert: $E[X_B] = 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$

Varianz: $\mathrm{Var}(X_B) = (25 + 100) \cdot 0{,}1 - 1{,}5^2 = 10{,}25$

Mit der stochastischen Unabhängigkeit von X_A und X_B ergibt sich

Variationskoeffizient: $\mathrm{VarK}(S) = \sqrt{5{,}76 + 10{,}25}/(1{,}8 + 1{,}5) = 1{,}212$

Nach Rückversicherung ergeben sich die folgenden Eigenanteile des Erstversicherers:

	Versicherungssumme VS	Schadenhöhe//Eintrittswahrscheinlichkeit		
Risiko A	6	0//0,6	3//0,2	3//0,2
Risiko B	10	0//0,8	3//0,1	3//0,1

Mit X_{EVA} bzw. X_{EVB} sei der (zufällige) Eigenanteil des Erstversicherers am Risiko A bzw. B bezeichnet, mit $S_{EV} = X_{EVA} + X_{EVB}$ der Gesamtschaden nach Rückversicherung.

Risiko A

Erwartungswert: $E[X_{EVA}] = 1{,}2$

Varianz: $Var(X_{EVA}) = 9 \cdot 0{,}4 - 1{,}2^2 = 2{,}16$

Risiko B

Erwartungswert: $E[X_{EVB}] = 0{,}6$

Varianz: $Var(X_{EVB}) = 9 \cdot 0{,}2 - 0{,}6^2 = 1{,}44$

Mit den Ausgangsrisiken X_A und X_B sind auch die Eigenanteile X_{EVA} und X_{EVB} stochastisch unabhängig. Somit gilt insbesondere $Var(S_{EV}) = Var(X_{EVA}) + Var(X_{EVB})$ und es ergibt sich

Variationskoeffizient: $VarK(S_{EV}) = \sqrt{2{,}16 + 1{,}44}/(1{,}2 + 0{,}6) = 1{,}054$

Durch die Kombination Summenexzedenten-Einzelschadenexzedentenrückversicherung sinkt der Variationskoeffizient von 1,212 auf 1,054.