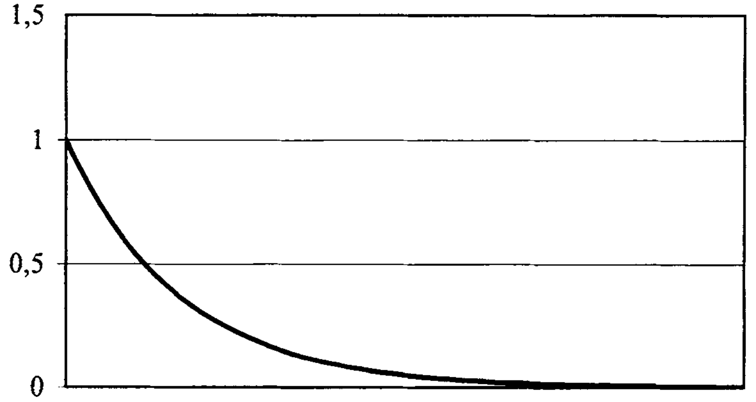
Bericht zur Prüfung im März 2001 über Mathematik der Schadenversicherung (Grundwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Martin Morlock* (Giessen)

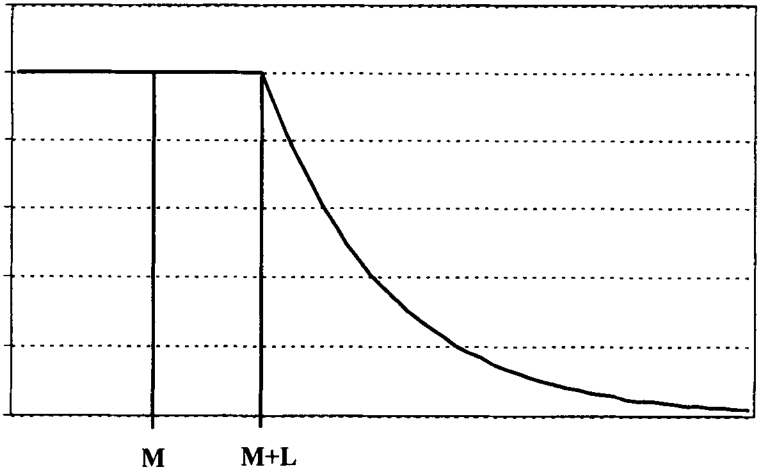
Zu jedem der Gebiete Grundlagen, Prämienkalkulation, Solvabilität, Risikoteilung und Reservierung ist jeweils eine Aufgabe gestellt. Die Zusatzaufgabe wird nur gewertet, wenn eine der anderen Aufgaben nicht bearbeitet wurde. Als Hilfsmittel sind die beigefügte Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen. Die Zahlen in der Aufgabenstellung geben jeweils die maximal erreichbare Punktzahl an. Die Klausur ist bestanden, wenn 36 der 90 möglichen Punkte erreicht wurden.

1. Aufgabe (Grundlagen) (20 Punkte):

a) Zeichnen Sie in die vorbereitete Grafik die Dichte einer Gammaverteilung mit zugehörigem Erwartungswert 2 und Varianz 2 ein. In der Grafik ist die Funktion $f(x) = \exp(-x)$ dargestellt.



b) Sei X eine Schadenhöhe mit der unten gezeigten Dichte. Skizzieren Sie die Verteilung von $Y = \min\{L, \max(X - M, 0)\}$.



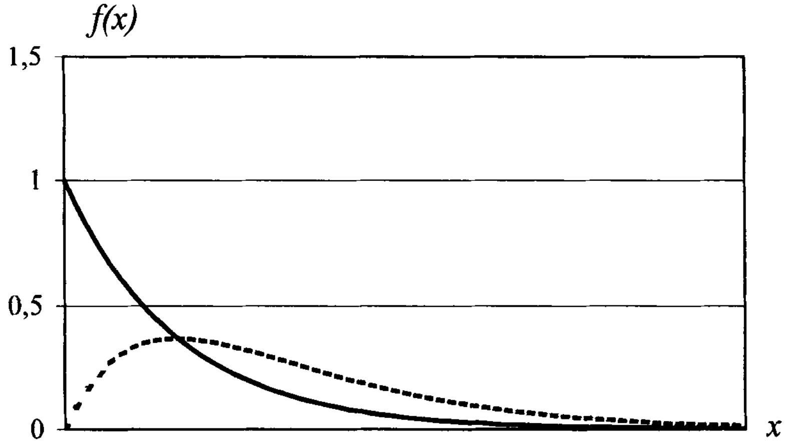
c) Berechnen Sie $E[Y]$ für die Parameterkombination $M = L$ und $P\{X > 2L\} = 0{,}2$.

Lösung der Aufgabe Grundlagen:

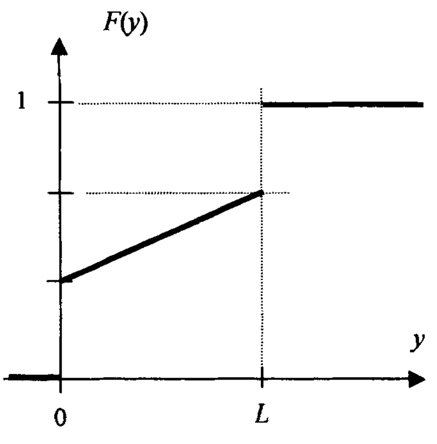
a) Die Dichte lautet $f(x) = x\exp(-x)$, $x > 0$. Die (nachfolgend gestrichelt gezeichnete) Funktion

$$f'(x) = -x\exp(-x) + \exp(-x) = 0 \text{ für } x = 1, f(1) = \exp(-1),$$

startet in Null, $f(0) = 0$, sie hat in $x = 1$ ihr Maximum, und sie fällt exponentiell für $x \to \infty$.



b) Y hat Masse $P\{X < M\}$ in der Null, Masse $P\{X > M + L\}$ im Punkt L und eine Gleichverteilung im Bereich $0 < x < L$. Die Verteilungsfunktion $F(y)$ von Y hat damit die folgende Gestalt:



c) $E[Y] = 0{,}8\int_0^L \frac{x}{M+L}dx + 0{,}2\,L = 0{,}8\frac{1}{2}\frac{L^2}{2L} + 0{,}2L = 0{,}4L.$

2. Aufgabe (Solvabilität) (15 Punkte):

Für einen Versicherungsbestand mit Gesamtschaden S und Bestandsprämie B sei R der Anpassungskoeffizient, also die positive Lösung der Gleichung

$$\lambda + RB = \lambda E[\exp(RX)],$$

wenn man für die Verteilung von S das kollektive Modell mit einer Poisson(λ) Schadenanzahl und Schadenhöhen X ansetzt.

a) Notieren Sie R für den Fall, dass X eine Exponentialverteilung mit Mittelwert m besitzt (siehe Formelsammlung). Geben Sie die dafür notwendigen Voraussetzungen für m, λ und B an.
b) Für welche Werte von B kann man durch Verdoppelung der Prämie erreichen, dass der Anpassungskoeffizient mindestens verdoppelt wird?

Lösung der Aufgabe Solvabilität:

a) Nach Formelsammlung gilt für R bei dem Beitrag B:

$$R = \frac{1}{m} \frac{\frac{B - \lambda m}{\lambda m}}{1 + \frac{B - \lambda m}{\lambda m}} = \frac{1}{m} \frac{\frac{B - \lambda m}{\lambda m}}{\frac{\lambda m + B - \lambda m}{\lambda m}} = \frac{1}{m} \frac{B - \lambda m}{B}$$

Es muss $B > \lambda m$ gelten.

b) Eine Verdoppelung von R ergibt sich bei einer Verdoppelung von B genau dann, wenn

$$2\frac{B - \lambda m}{B} = \frac{2B - \lambda m}{2B} \quad \text{oder} \quad 2B - 2\lambda m = B - \lambda m/2 \quad \text{oder} \quad B = \frac{3}{2}\lambda m$$

erfüllt ist.

Damit ergibt sich mindestens eine Verdoppelung von R bei einer Verdoppelung von B, falls gilt:

$$\lambda m < B \leq \frac{3}{2}\lambda m.$$

3. Aufgabe (Prämienkalkulation) (20 Punkte):

Die in einem Versicherungsvertrag möglichen Schäden seien modelliert durch eine geometrisch verteilte Schadenanzahl N mit

$$P\{N = k\} = 0{,}8 * 0{,}2^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und (auch von N) stochastisch unabhängigen Schadenhöhen X_i mit

$$P\{X_i > t\} = \exp(-t), \quad t > 0.$$

Das Versicherungsunternehmen gewährt eine Beitragsrückerstattung in Höhe von 1, wenn im Versicherungszeitraum kein Schaden reguliert wird. (Nachmelden von Schäden ist möglich.)

a) Wie wird sich ein rationaler Versicherungsnehmer verhalten?
b) Die Verteilung des Gesamtschadens $S = X_1 + \ldots + X_N$ ist gegeben durch $P\{S = 0\} = 0{,}8$ und $P\{S > t\} = 0{,}2 \exp(-0{,}8t)$, $t > 0$.
Berechnen Sie die Nettorisikoprämie ohne und mit Beitragsrückerstattung.
c) Unter welchem Gesichtspunkt kann das Versicherungsprodukt mit Beitragsrückerstattung für Kunden interessant sein?

Hinweise zu b): Die erzeugende Funktion von N ist $m_N(z) = 0{,}8/(1 - 0{,}2z)$, und die momenterzeugende Funktion von X lautet $f(t) = 1/(1 - t)$, $t < 1$.

Lösung der Aufgabe Prämienkalkulation:

a) Ein rationaler Versicherungsnehmer wird die Schäden selbst tragen, bis die Summe dieser Schäden die Beitragsrückerstattung übersteigt.

b) Mit der Faltungsformel ergibt sich als momenterzeugende Funktion der Gesamtschadenverteilung

$$h(t) = m_N(f(t)) = \frac{0{,}8}{1 - 0{,}2\,f(t)} = \frac{0{,}8 - 0{,}8t}{0{,}8 - t} = 0{,}8 + 0{,}2\frac{0{,}8}{0{,}8 - t},$$

und das ist die momenterzeugende Funktion der angegebenen Verteilung. Aus der Ableitung von $h(t)$ an der Stelle $t = 0$ ergibt sich als Erwartungswert des Schadens 0,25.

Gemäß der Definition des Erwartungswerts ergibt sich ebenfalls:

ohne Beitragsrückerstattung:

$$E[S] = 0{,}2 \int_0^\infty 0{,}8\,x \exp(-0{,}8)dx = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25.$$

mit Beitragsrückerstattung:

Hier wird die Beitragsrückerstattung als Leistung des Versicherungsunternehmens in den unter a) genannten Fällen aufgefasst. Die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Beitragsrückerstattung gezahlt wird, ist

$$P\{S < 1\} = 0{,}8 + 0{,}2(1 - \exp(-0{,}8)) = 0{,}91.$$

Die Nettorisikoprämie für die Beitragsrückerstattung ist demnach 0,91. Die Nettorisikoprämie für die vom Versicherungsunternehmen übernommenen Schäden ist

$$\begin{aligned}
E[S\,1_{\{S>1\}}] &= 0{,}2 \int_1^\infty 0{,}8x \exp(-0{,}8x)dx \\
&= 0{,}2 \int_0^\infty 0{,}8(x+1) \exp(-0{,}8(x+1))dx \\
&= 0{,}2 \exp(-0{,}8)\left[\int_0^\infty 0{,}8x \exp(-0{,}8x)dx + \int_0^\infty 0{,}8 \exp(-0{,}8x)dx\right] \\
&= 0{,}2 \exp(-0{,}8)\left[\frac{1}{0{,}8} + 1\right] = 0{,}202.
\end{aligned}$$

Die Nettorisikoprämie mit Beitragsrückerstattung ist demnach

$$0{,}91 + 0{,}202 = 1{,}112.$$

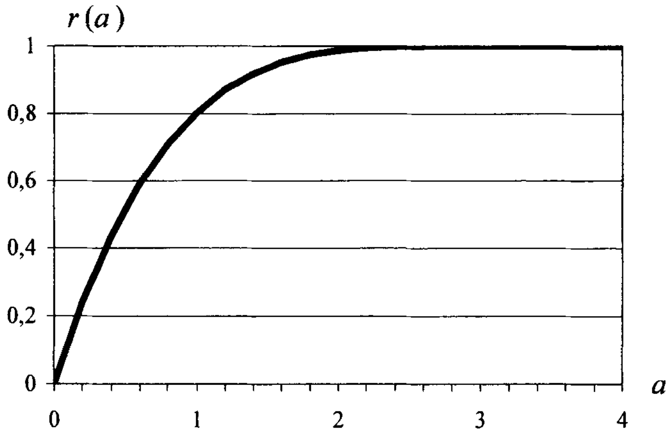
c) Ein Kunde, der sein Risiko so einschätzt, dass bei ihm kein Gesamtschaden < 1 auftritt, wird als Preis für den Versicherungsschutz (ohne Kosten) mit

$$\begin{aligned}
&\text{Nettorisikoprämie für Vertrag mit Beitragsrückerstattung} - 1 * P\{S < 1\} \\
&= 1{,}112 - 0{,}91 = 0{,}202 = E[S\,1_{\{S>1\}}] = 0{,}202
\end{aligned}$$

ansetzen, und dies ist deutlich weniger als der Preis des Vertrages ohne Beitragsrückerstattung 0,25 (wieder ohne Kosten).

4. Aufgabe (Risikoteilung) (20 Punkte):

Die Entlastungseffektfunktion $r(.)$ für ein Risiko, bei dem ein Schaden (mit stochastischer Schadenhöhe) mit Wahrscheinlichkeit 1 eintritt, hat die folgende Gestalt (mit $r(a) < 1$ für $a < 3$ und $r(a) = 1$ für $a \geq 3$):



a) Wie groß ist die maximale Schadenhöhe?

b) Skizzieren Sie die Entlastungseffektfunktion für den Fall, dass der Schaden (bei gleicher Schadenhöhenverteilung) nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 eintritt.

c) Bestimmen Sie die Dichte der Schadenhöhenverteilung als Funktion von $r(.)$. (Der Erwartungswert der Schadenhöhe beträgt hier ¾.)

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der graphischen Darstellung der Entlastungseffektfunktion den Erwartungswert des vom Versicherungsunternehmen übernommenen Schadenanteils bei einem Versicherungsvertrag mit der Abzugsfranchise a für $a = 1$ und $a = 1{,}5$.

e) Skizzieren Sie die Entlastungseffektfunktion für ein Versicherungsunternehmen, das im Zuge einer Mitversicherung nur 1/3 dieses Risikos zeichnet, d. h. nur 1/3 des Schadens bezahlt.

Lösung der Aufgabe Risikoteilung:

a) Die maximale Schadenhöhe ist 3; für $a \geq 3$ verbleibt der Schaden vollständig beim Versicherungsnehmer, d. h. eine größere Schadenhöhe als 3 tritt nicht auf.

b) Für den Entlastungseffekt ist die Schadenhäufigkeit ohne Bedeutung. Der Entlastungseffekt ändert sich bei einer Änderung der Schadenhäufigkeit nicht. (Der Erwartungswert der Schadenhäufigkeit tritt als multiplikativer Faktor sowohl im Zähler als auch im Nenner des Quotienten auf, der die Entlastungseffektfunktion definiert.)

c) Es gilt

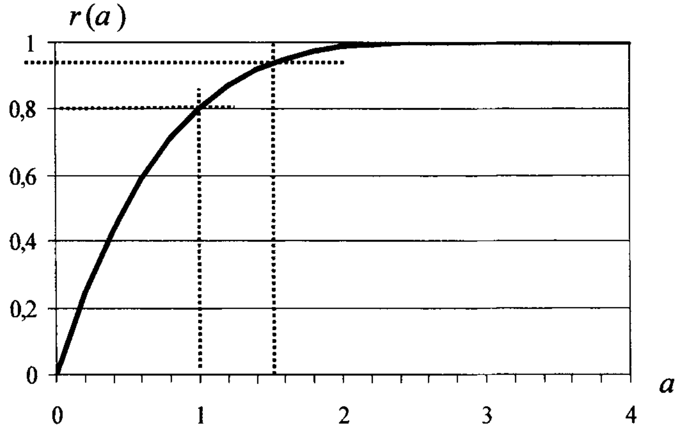
$$r''(a) = -\frac{f(a)}{E[X]} \qquad 0 \leq a \leq 3$$

mit dem Erwartungswert $E[X] = ¾$ der Schadenhöhe X und der Dichte $f(.)$ von X.

Daraus folgt

$$f(x) = \begin{cases} -\tfrac{3}{4} r''(x), & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

d)



Gemäß Zeichnung gilt $r(1) = 0{,}8$ und $r(1{,}5) = 0{,}94$. Damit beträgt der Erwartungswert des Anteils des vom Versicherungsunternehmen übernommenen Schadens $1 - r(a)$, d.h. 20% bzw. 6%.

e) Die Entlastungseffektfunktion $\tilde{r}(a)$ hat die (prinzipiell) gleiche Gestalt wie $r(a)$ mit

$$\tilde{r}(a) := r(3a),\ 0 \leq a \leq 1,$$

da die Dichte $\tilde{f}(.)$ eines Drittels der Schadenhöhe X (mit der Dichte $f(.)$) durch

$$\tilde{f}(x) = 3f(3x)$$

festgelegt ist und damit

$$\tilde{r}(a) = \frac{\int_0^a 3x f(3x)dx + a(1 - F(3a))}{\int_0^1 3x f(3x)dx} = \frac{\int_0^{3a} y f(y)\frac{1}{3}dy + a(1 - F(3a))}{\int_0^3 y f(y)\frac{1}{3}dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(\int_0^{3a} y f(y)dy + 3a(1 - F(3a))\right)}{\frac{1}{3}\int_0^3 y f(y)dy} = r(3a)$$

gilt.

5. Aufgabe (Schadenreservierung) (15 Punkte):

Drei Jahre nach der Währungsumstellung am 01.01.2002 auf den EURO soll für einen ab 1998 neu gebildeten Versicherungsbestand mit den folgenden (inflationsbereinigten) Schadenzahlungen eine Schätzung der Spätschäden vorgenommen werden:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
1999	(470)	150	98	64	22	15
2000	(570)	180	122	41	28	
2001	(630)	200	68	45		
2002	(375)	120	81			
2003	(425)	135				

Die Schadenzahlungen und Prämien bis zum Jahr 2001 (einschließlich) sind dabei in Mio. DM und ab 2002 in Mio. EURO angegeben.

Der Einfachheit halber soll hier 2 DM = 1 EURO gelten.

a) Berechnen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren eine Schätzung der im Jahr 2005 für Schäden des Anfalljahres 2001 zu leistenden Schadenzahlungen (in EURO).

b) Lösen Sie a) mit dem Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse.

c) Kann man bei einer Analyse der Zeitreihe der Schadenzahlungen die begründete Vermutung haben, dass die Schäden eines Anfalljahres nach 5 Jahren noch **nicht** vollständig abgewickelt sind?

Lösung der Aufgabe Schadenreservierung:

a) Prämien und (nichtkumulierte) Schadenzahlungen S_{ik}

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
1999	(235)	75	49	32	22	15
2000	(285)	90	61	41	28	
2001	(315)	100	68	45		
2002	(375)	120	81			
2003	(425)	135				

Prämien und kumulierte Schadenzahlungen C_{ik} in EURO

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
1999	(235)	75	124	156	178	193
2000	(285)	90	151	192	220	
2001	(315)	100	168	213		
2002	(375)	120	201			
2003	(425)	135				

Abwicklungskoeffizienten $\hat{f}_k$: $\hat{f}_3 = 1{,}144$; $\hat{f}_4 = 1{,}084$

Schätzung der Schadenzahlungen des Anfalljahres 2001 im 5. Abwicklungsjahr

$$\hat{S}_{2001,5} = \hat{C}_{2001,5} - \hat{C}_{2001,4} = C_{2001,3} * \hat{f}_3 * (\hat{f}_4 - 1) = 213 * 1{,}144 * 0{,}084 = 20{,}47$$

b) Anfalljahrunabhängige Schadenquotenzuwächse

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
1999	(235)	75	49	32	22	15
2000	(285)	90	61	41	28	
2001	(315)	100	68	45		
2002	(375)	120	81			
2003	(425)	135				

Schadenquotenzuwächse: $\hat{s}_k$: $\hat{s}_1 = 0{,}3180$; $\hat{s}_2 = 0{,}2140$; $\hat{s}_3 = 0{,}1413$; $\hat{s}_4 = 0{,}0962$; $\hat{s}_5 = 0{,}0638$

Schätzung der Schadenzahlungen des Anfalljahres 2001 im 5. Abwicklungsjahr

$$\hat{S}_{2001,5} = P_{2001} * \hat{s}_5 = 315 * 0{,}0638 = 20{,}10$$

c) Die Schätzungen für Schadenzahlungen und auch die Schadenquotenzuwächse nehmen in jedem Abwicklungsjahr ungefähr um 1/3 ab. Die Schäden sind damit nach 5 Jahren vermutlich noch nicht vollständig abgewickelt. Das Modell des Complementary Loss Ratio beschreibt diese Situation recht gut.

6. Zusatzaufgabe (15 Punkte):

Ein einfaches Bonus-Malus-System besitzt neben der Einstiegsklasse 1 noch die beiden Bonusklassen 2 und 3. Das mit Hilfe dieses Bonus-Malus-Systems zu differenzierende Kollektiv setzt sich aus zwei Risikotypen zusammen, die sich lediglich in ihren Schadenzahlwahrscheinlichkeiten (pro Jahr) unterscheiden.

	Schadenzahl pro Jahr		
	0	1	2
Risikotyp A	0,7	0,2	0,1
Risikotyp B	0,5	0,3	0,2

Wahrscheinlichkeiten der Zahl der Schäden pro Jahr

Bei einem schadenfreien Verlauf während eines (Kalender-)Jahres wird der Versicherungsnehmer im nächsten Jahr in die nächsthöhere Klasse eingestuft, oder er verbleibt gegebenenfalls in der höchsten Klasse 3.

Bei einem bzw. zwei Schäden wird er (unabhängig von der Höhe des Schadens) eine bzw. zwei Klassen zurückgestuft, maximal jedoch in die Klasse 1.

Der Erwartungswert der Höhe eines Einzelschadens beträgt 1.000 DM (1 TDM).

Der Eintritt der Schäden erfolgt stochastisch unabhängig.

a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämien für einen Versicherungsnehmer des Risikotyps A und B.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Versicherungsnehmer des Risikotyps B **nach 3 Jahren** in der Klasse 2 befindet?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Versicherungsnehmer **nach 2 Jahren** in Klasse 2 befindet, wenn er zufällig aus einem Bestand mit 70% Verträgen des Risikotyps A und 30% Verträgen des Risikotyps B entnommen wird.

Lösung der Zusatzaufgabe:

Berechnung der Nettorisikoprämien

a) Risikotyp A:

$$NRP_A = (0{,}2 * 1 + 0{,}1 * 2) * 1.000 \text{ DM} = 400 \text{ DM}$$

Risikotyp B:

$$NRP_B = (0{,}3 * 1 + 0{,}2 * 2) * 1.000 \text{ DM} = 700 \text{ DM}$$

b) Erstellung der Übergangsmatrix

Risikotyp A:

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 hat ein Versicherungsnehmer keinen Unfall. Befindet er sich in der Klasse 1, so geht er mit dieser Wahrscheinlichkeit im nächsten Jahr in die Klasse 2 über; das Element in der 1. Zeile und 2. Spalte hat damit den Wert 0,7. Entsprechend sind die anderen Matrixelemente festgelegt.

$$P_A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,7 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Risikotyp B:

$$P_B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Verteilung von Risikotyp B nach 3 Jahren auf die verschiedenen Risikoklassen

$$\begin{aligned}(p_1^3;\ p_2^3;\ p_3^3)_B &= (((1;\ 0;\ 0)P_B)P_B)P_B \\ &= ((0,5;\ 0,5;\ 0)P_B)P_B \\ &= (0,5;\ 0,25;\ 0,25)\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix} \\ &= (0,425;\ 0,325;\ 0,25)\end{aligned}$$

c) Verteilung von Risikotyp A nach 2 Jahren auf die verschiedenen Risikoklassen

$$\begin{aligned}(p_1^2;\ p_2^2;\ p_3^2)_A &= ((1;\ 0;\ 0)P_A)P_A \\ &= (0,3;\ 0,7;\ 0,0)\begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,7 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \\ &= (0,3;\ 0,21;\ 0,49)\end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit für einen beliebigen Versicherungsnehmer des Kollektivs nach 2 Jahren in Klasse 2 zu sein:

$$0,7 * 0,21 + 0,3 * 0,25 = 0,222$$