Bericht zur Prüfung über Mathematik der Schadenversicherung (Grundwissen) im Januar 2000

Christian Hipp (Karlsruhe), *Martin Morlock* (Gießen)

Zu jedem der Gebiete Grundlagen, Prämienkalkulation, Solvabilität, Risikoteilung und Reservierung wurde jeweils eine Aufgabe gestellt. Die Zusatzaufgabe wurde nur gewertet, wenn eine der anderen Aufgaben nicht bearbeitet worden war. Als Hilfsmittel waren die übliche Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen. Die Zahlen bei den Aufgabenstellungen geben jeweils die maximal erreichbare Punktzahl an. Die Klausur wurde als bestanden bewertet, wenn 36 der 90 möglichen Punkte erreicht wurden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

a) Die geometrische Verteilung hat die Punktwahrscheinlichkeiten

$$P\{k\} = p^k(1-p), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und die erzeugende Funktion

$$m(z) = (1-p)/(1-pz), \quad |z| < 1\,.$$

Welche Verteilung gehört zur erzeugenden Funktion

$$m(z) = z(1-p)/(1-pz), \quad |z| < 1?$$

b) Seien

$$N, X_1, X_2, X_3, \ldots$$

stochastisch unabhängig, N mit geometrischer Verteilung mit Parameter q, und die X's mit der in a) erwähnten Verteilung. Berechnen Sie mit der Fundamentalformel in der Form

$$m_S(z) = m_N(m_X(z))$$

die erzeugende Funktion für

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N\,.$$

c) Welche Verteilung gehört zu der in b) berechneten erzeugenden Funktion?

d) Für die Verteilung von

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N\,.$$

gilt

$$\beta_3(S) = \beta_3(N)\,E[X]^3 + 3\sigma^2(N)\,\mu(X)\,\sigma^2(X) + \beta_3(X)\,\mu(N)\,.$$

Berechnen Sie $\beta_3(S)$ für eine Poisson-verteilte Schadenanzahl N und zeigen Sie $\beta_3(S) > 0$.

(Hinweis zu d): Hier gilt für die Schiefe $\beta_3(N) = \lambda$.)

Lösung der Aufgabe 1:

a) Die Potenzreihe der Funktion

$$m(z) = z(1-p)/(1-pz), \quad |z| < 1$$

lautet

$$m(z) = z(1-p)\sum_{n=0}^{\infty}(pz)^n = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)\,p^{n-1}z^n,$$

und damit hat die zugehörige Verteilung P mit $P\{0\} = 0$ die Punktwahrscheinlichkeiten

$$P\{n\} = (1-p)\,p^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

b) Einsetzen liefert

$$m_S(z)=\frac{1-q}{1-q\dfrac{z(1-p)}{1-pz}},\quad |z|<1.$$

c) Die Verteilung, d.h. die Punktwahrscheinlichkeiten, erhält man aus der Potenzreihendarstellung von $m_S(z)$. Hierbei treten i.d.R. Terme mit $1/(1-rz)=\sum_{n=0}^{\infty}(rz)^n$ auf. Damit erhält man nach einfacher Umformung im Hinblick auf den Ausdruck $1/(1-rz)$ mit $r:=p+q(1-p)=p+q-pq$:

$$\begin{aligned}m_S(z)&=\frac{(1-q)(1-pz)}{1-pz-qz(1-p)}=\frac{(1-q)(\{1-pz-[qz(1-p)]\}+[qz(1-p)])}{\{1-pz-qz(1-p)\}}\\&=(1-q)+\frac{(1-q)qz(1-p)}{1-pz-qz(1-p)}\\&=1-q+qz\frac{(1-q)(1-p)}{1-rz}\\&=1-q+qz\frac{(1-r)}{1-rz},\quad |z|<1.\end{aligned}$$

Damit wird sichtbar, dass S eine Punktwahrscheinlichkeit $1-q$ in Null hat und auf den Zahlen 1, 2, 3, ... Punktwahrscheinlichkeiten besitzt, welche (mit r anstelle von p) die q-fachen der in a) dargestellten Punktwahrscheinlichkeiten sind.

d) Wir notieren zuerst den Erwartungswert, die Varianz und die absolute Schiefe der Poisson-Verteilung: $\mu(N)=\lambda$, $\sigma^2(N)=\lambda$, $\beta_3(N)=\lambda$.
Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}\beta_3(S)&=\lambda E[X]^3+3\lambda\mu(X)\sigma^2(X)+\lambda\beta_3(X)\\&=\lambda(E[X]^3+3E[X](E[X^2]-E[X]^2)+E[X^3]-3E[X]E[X^2]+2E[X]^3)\\&=\lambda E[X^3].\end{aligned}$$

Da X nicht negativ und nicht Null ist, muss auch das dritte Moment positiv sein.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Sei X exponentialverteilt mit Erwartungswert 100. Das Risiko X (pro Periode tritt genau ein Schaden der Höhe X auf) ist versichert mit einer Bruttorisikoprämie von 80, die Selbstbeteiligung ist 50, und die Beitragsrückerstattung bei Leistungsfreiheit beträgt 20.

a) Ab welcher Höhe wird ein Versicherungsnehmer einen Schaden melden und regulieren lassen?
b) Welchen Sicherheitszuschlag (d.h. Bruttorisikoprämie minus Nettorisikoprämie) hat der Versicherer eingerechnet, wenn er rationales Verhalten seiner Versicherungsnehmer vorausgesetzt hatte?

Lösung der Aufgabe 2:

a) Ab Schadenhöhe $50+20=70$, da der Versicherungsnehmer sonst mehr (an Beitragsrückerstattung) verliert, als er an Entschädigung ausgezahlt bekommt.
b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Beitragsrückerstattung gezahlt wird, ist

$$P(X\le 70)=\int_0^{70}\frac{1}{100}\exp(-x/100)dx.$$

Fasst man die Beitragsrückerstattung als Leistung des Versicherungsunternehmens auf, so ergibt sich als Nettorisikoprämie

$$\int_0^{70} \frac{1}{100} \exp(-x/100)\,dx \times 20 + \int_{70}^{\infty} (x-50) \frac{1}{100} \exp(-x/100)\,dx$$

$$= \int_0^{70} \frac{1}{100} \exp(-x/100)\,dx \times 20 + \int_{70}^{\infty} \frac{1}{100} \exp(-x/100)\,dx \times 20 + \int_{70}^{\infty} (x-70) \frac{1}{100} \exp(-x/100)\,dx$$

$$= 20 + \exp(-0,7) \int_0^{\infty} u \frac{1}{100} \exp(-u/100)\,du = 20 + \exp(-0,7) \times 100$$

$$= 20 + 49,66 = 69,66.$$

Der Sicherheitszuschlag beträgt damit $80 - 69,66 = 10,34$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Aus den letzten 4 Jahren sind die folgenden kumulierten Schadenzahlungen (ohne Reservierungen) eines Abrechnungsverbands bekannt:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k=1	k=2	k=3	k=4
1996	(90.158)	11.270	36.063	58.790	73.790
1997	(107.438)	12.397	48.761	68.761	
1998	(127.273)	18.182	63.182		
1999	(150.000)	20.000			

Es wird angenommen, dass alle Schäden eines Anfalljahres innerhalb von 4 Jahren vollständig abgewickelt werden können. In der Vergangenheit traten Preissteigerungen bei den Schäden von jährlich 10% auf, und man geht davon aus, dass diese Preissteigerungsrate bei den Schadenzahlungen auch in den zukünftigen Jahren auftritt.

Hinweis: Der Einfachheit halber sind die Schätzungen der zukünftigen Schadenzahlungen und der Reserveschätzungen auf ganze Zahlen zu runden.

Berechnen Sie mit dem Chain-Ladder-Verfahren (auf der Basis von inflationsbereinigten Daten mit dem Jahr 1999 als Basisjahr)

a) einen Schätzwert für die Spätschadenreserve für das Anfalljahr 1997;
b) einen Schätzwert für die Schadenzahlung für das Anfalljahr 1998, die in den Jahren 2000 und 2001 zu leisten sind.

Lösung der Aufgabe 3:

a) (Nichtkumulierte) Schadenzahlungen in den einzelnen Abwicklungsjahren:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k=1	k=2	k=3	k=4
1996	(90.158)	11.270	24.793	22.727	15.000
1997	(107.438)	12.397	36.364	20.000	
1998	(127.273)	18.182	45.000		
1999	(150.000)	20.000			

(Nichtkumulierte) inflationsbereinigte Schadenzahlungen in den einzelnen Abwicklungsjahren (und Prämien der Anfalljahre) mit 1999 als Basisjahr (die früher geleisteten Zahlungen sind pro Jahr mit 10% aufzuzinsen):

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k=1	k=2	k=3	k=4
1996	(120.000)	15.000	30.000	25.000	15.000
1997	(130.000)	15.000	40.000	20.000	
1998	(140.000)	20.000	45.000		
1999	(150.000)	20.000			

Kumulierte inflationsbereinigte Schadenzahlungen:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k=1	k=2	k=3	k=4
1996	(120.000)	15.000	45.000	70.000	85.000
1997	(130.000)	15.000	55.000	75.000	
1998	(140.000)	20.000	65.000		
1999	(150.000)	20.000			

Hieraus ergeben sich folgende Abwicklungskoeffizienten:

$$\hat{f}_3^* = \frac{85.000}{70.000} = 1{,}214$$

$$\hat{f}_2^* = \frac{70.000 + 75.000}{45.000 + 55.000} = 1{,}45$$

Schätzwert der kumulierten inflationsbereinigten Schadenzahlungen des Anfalljahres 1997 im Abwicklungsjahr 2000:

$$\hat{C}_{1997,4}^* = 75.000 \times \hat{f}_3^* = 75.000 \times 1{,}214 = 91.050$$

und damit die inflationsbereinigte Schadenzahlung

$$\hat{C}_{1997,4}^* - C_{1997,3}^* = 91.050 - 75.000 = 16.050.$$

Nominell ergibt sich durch Inflationierung mit 10% als geschätzte Schadenzahlung $\hat{S}_{1997,4}$ des Anfalljahres 1997 für das Abwicklungsjahr 2000 (das 4. Abwicklungsjahr), die gleichzeitig der Schätzwert der noch benötigten Reserve für das Anfalljahr 1997 ist:

$$\hat{S}_{1997,4} = \hat{R}_{1997} = 16.050 \times 1{,}1 = 17.655.$$

b) Mit den Abwicklungskoeffizienten und bereits berechneten Werten ergeben sich folgende Schätzwerte für die kumulierten inflationsbereinigten Schadenzahlungen (in der nachfolgenden Tabelle fett und kursiv eingetragen):

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Prämie)	k=1	k=2	k=3	k=4
1996	(120.000)	15.000	45.000	70.000	85.000
1997	(130.000)	15.000	55.000	75.000	***91.050***
1998	(140.000)	20.000	65.000	***94.250***	***114.420***
1999	(150.000)	20.000			

Für das Anfalljahr 1998 ergeben sich die Schätzungen für die kumulierten inflationsbereinigten Schadenzahlungen folgendermaßen:

$$\hat{C}_{1998,3}^* = 65.000 \times \hat{f}_2^* = 65.000 \times 1{,}45 = 94.250$$

$$\hat{C}_{1998,4}^* = 65.000 \times \hat{f}_2^* \times \hat{f}_3^* = 65.000 \times 1{,}45 \times 1{,}214 = 114.420$$

und damit

$$\hat{S}_{1998,3} = (\hat{C}^*_{1998,3} - \hat{C}^*_{1998,2}) \times 1{,}1 = (94.250 - 65.000) \times 1{,}1 = 32.175$$

$$\hat{S}_{1998,4} = (\hat{C}^*_{1998,4} - \hat{C}^*_{1998,3}) \times 1{,}1 \times 1{,}1 = (114.420 - 94.250) \times 1{,}1 \times 1{,}1 = 24.406$$

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Ein Kollektiv eines Versicherungsunternehmens besteht aus 10.000 Risiken, bei denen die Schäden unabhängig voneinander auftreten und folgendermaßen identisch verteilt sind:

Schadenhöhe	0	1.000	3.000
Wahrscheinlichkeit	0,7	0,2	0,1

Durch welche Maßnahme wird das Risiko für das Versicherungsunternehmen am kleinsten:

a) Durch eine proportionale Selbstbeteiligung der Versicherungsnehmer in Höhe von 25% der Schadenhöhe?
b) Durch eine Abzugsfranchise (Selbstbeteiligung des Versicherungsnehmers) in Höhe von 1.000?
c) Durch eine Verdopplung der Zahl der Versicherungsnehmer?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung der Aufgabe 4

Als Maß des Risikos für das Versicherungsunternehmen wird der Variationskoeffizient Vko verwendet. Er beträgt für das Kollektiv ohne Risikoteilung:

Erwartungswert und Varianz des Schadens S eines Risikos:

$$E(S) = 0{,}2 \times 1.000 + 0{,}1 \times 3.000 = 500$$

$$Var(S) = 0{,}2 \times 1.000^2 + 0{,}1 \times 3.000^2 - 500^2 = 850.000$$

Vko des Kollektivs von 10.000 Risiken:

$$Vko = \frac{\sqrt{10.000 \times Var(S)}}{10.000 \times E(S)} = \frac{\sqrt{850.000}}{100 \times 500} = 0{,}0184$$

a) Durch eine proportionale Risikoteilung verändert sich weder der Variationskoeffizient des Einzelrisikos noch der des Kollektivs.

b) Beim Versicherungsunternehmen verbleibt lediglich für jedes Risiko ein Schaden der Höhe 2.000, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 auftritt.

Erwartungswert und Varianz des Schadens S eines Risikos:

$$E(S) = 0{,}1 \times 2.000 = 200$$

$$Var(S) = 0{,}1 \times 2.000^2 - 200^2 = 360.000$$

Vko des Kollektivs von 10.000 Risiken:

$$Vko = \frac{\sqrt{10.000 \times Var(S)}}{10.000 \times E(S)} = \frac{\sqrt{360.000}}{100 \times 200} = 0{,}03$$

Durch die Übernahme der Spitzenrisiken vergrößert sich das Risiko des Versicherungsunternehmens.

c) Durch die Verdoppelung der Anzahl der Risiken des Kollektivs verringert sich das Risiko des Versicherungsunternehmens um den Faktor $1/\sqrt{2}$:

$$\text{Vko} = \frac{\sqrt{20.000 \times \text{Var(S)}}}{20.000 \times \text{E(S)}} = \frac{\sqrt{850.000}}{\sqrt{2} \times 100 \times 500} = 0{,}013$$

Bei Maßnahme c) wird das Risiko für das Versicherungsunternehmen also am kleinsten.

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Für ein Risiko, bei dem die Schadenhöhe auf dem Intervall [0, 1.000] gleichverteilt ist, soll ein Tarif mit einer Abzugsfranchise gestaltet werden.
Für die Regulierung eines Schadenfalls, der größer ist als die Abzugsfranchise a, fallen fixe Schadenregulierungskosten in Höhe von 20 an. Der Gewinnzuschlag auf die Nettorisikoprämie soll 10% betragen.
Berechnen Sie die Höhe der Abzugsfranchise a und die Nettorisikoprämie NRP so, dass der Gewinn abzüglich des Erwartungswerts der (fixen) Schadenregulierungskosten pro Vertrag maximal wird. Geben Sie den Entlastungseffekt für das Versicherungsunternehmen an, der durch diese Abzugsfranchise hervorgerufen wird.

Lösung der Aufgabe 5:

Nettorisikoprämie in Abhängigkeit von der Höhe a der Abzugsfranchise:

$$\text{NRP} = \int_a^{1.000} 0{,}001 \times (s-a)\,ds = \int_0^{1.000-a} 0{,}001 x\,dx = 0{,}001 \times 0{,}5 \times (1000-a)^2 = 500 - a + 0{,}0005 \times a^2$$

Zu maximierende Funktion:

$$\begin{aligned} G(a) &= \text{NRP} \times 0{,}1 - P(S > a) \times 20 \\ &= \text{NRP} \times 0{,}1 - \int_a^{1.000} 0{,}001\,ds \times 20 \\ &= 50 - 0{,}1 \times a + 0{,}00005 \times a^2 - (1 - 0{,}001 \times a) \times 20 \\ &= 30 - 0{,}08 \times a + 0{,}00005 \times a^2 \end{aligned}$$

G(a) ist eine nach oben offene Parabel, die ihr Maximum in einem der beiden Randpunkte annimmt (Nullsetzen der 1. Ableitung liefert eine Minimalstelle):

$$\begin{aligned} G(0) &= 30, \\ G(1000) &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist $a = 0$ die optimale Abzugsfranchise; d.h. der Gewinn des Versicherers wird maximal für einen Vertrag ohne Abzugsfranchise.
Der Entlastungseffekt der Abzugsfranchise $a = 0$ ist damit Null, d.h. es gilt:

$$r(0) = 0.$$

Zusatzaufgabe (15 Punkte)

Ein Bonus-Malus-System hat die Klassen P (perfekt), M (mittel), S (schlecht) und G (gefährlich). Die Übergangsregeln sind gegeben durch

1. von P nach P bei 0 und 1 Schäden, nach M bei 2, nach S bei 3 und nach G bei mehr als 3 Schäden;
2. von M nach P bei 0 Schäden, nach M bei 1, nach S bei 2 und nach G bei mehr als 2 Schäden;
3. von S nach M bei 0 Schäden, nach S bei 1 Schaden und nach G bei mehr als 1 Schaden;
4. von G nach S bei 0 Schäden und nach G bei mehr als 0 Schäden.

a) Konstruieren Sie die Übergangsmatrix für die Übergänge $p(i, j)$ zwischen den Klassen ausgehend von den Wahrscheinlichkeiten

   0,6 für 0 Schäden, 0,2 für 1 Schaden, 0,1 für 2 Schäden, 0,1 für 3 Schäden.

b) Prüfen Sie, welcher der folgenden Vektoren die stationären Wahrscheinlichkeiten (p_P, p_M, p_S, p_G) aus dem Gleichungssystem

$$p_P\, p(P,P) + p_M\, p(M,P) + p_S\, p(S,P) + p_G\, p(G,P) = p_P,$$
$$p_P\, p(P,M) + p_M\, p(M,M) + p_S\, p(S,M) + p_G\, p(G,M) = p_M,$$
$$p_P\, p(P,S) + p_M\, p(M,S) + p_S\, p(S,S) + p_G\, p(G,S) = p_S,$$
$$p_P\, p(P,G) + p_M\, p(M,G) + p_S\, p(S,G) + p_G\, p(G,G) = p_G.$$

darstellt:

$$(p_P, p_M, p_S, p_G) = (0{,}568,\ 0{,}189,\ 0{,}158,\ 0{,}085) \text{ oder}$$
$$(p_P, p_M, p_S, p_G) = (0{,}25,\ 0{,}25,\ 0{,}25,\ 0{,}25).$$

Lösung der Zusatzaufgabe:

a) Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind in folgender Matrix zusammengefasst:

Klasse	P	M	S	G
P	0,8	0,1	0,1	0
M	0,6	0,2	0,1	0,1
S	0	0,6	0,2	0,2
G	0	0	0,6	0,4

b) Der zweite Vektor kann nicht der stationäre Vektor sein, da die Klasse P mehr Gewicht erhalten wird als die anderen Klassen. Nachrechnen ergibt für den ersten Vektor:

$$0{,}8 \times 0{,}568 + 0{,}6 \times 0{,}189 = 0{,}5678 \qquad (0{,}568)$$
$$0{,}1 \times 0{,}568 + 0{,}2 \times 0{,}189 + 0{,}6 \times 0{,}158 = 0{,}1894 \qquad (0{,}189)$$
$$0{,}1 \times 0{,}568 + 0{,}1 \times 0{,}189 + 0{,}2 \times 0{,}158 + 0{,}6 \times 0{,}085 = 0{,}1583 \qquad (0{,}158)$$
$$0{,}1 \times 0{,}189 + 0{,}2 \times 0{,}158 + 0{,}4 \times 0{,}085 = 0{,}0845 \qquad (0{,}085)$$

Die rechte Seite des Gleichungssystems, in Klammern angegeben, stimmt in der Genauigkeit, mit der die Zahlen angegeben waren, mit der linken Seite überein.