Bericht zur Prüfung im Oktober 2006 über Finanzmathematik und Investmentmanagement (Grundwissen)

Peter Albrecht (Mannheim)

Am 07. Oktober 2006 wurde zum ersten Mal eine Prüfung im Fach Finanzmathematik und Investmentmanagement nach PO III (Grundwissen Teil A) durchgeführt. Es waren 291 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu verzeichnen.

Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 40 von 90 möglichen Punkten erzielt werden.

Aufgabe 1: (23 Punkte)

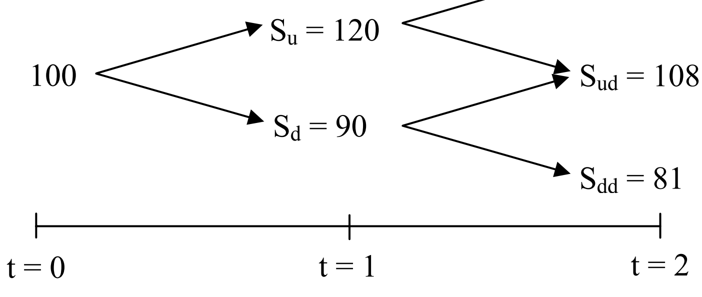
Unterstellen Sie für den Basistitel einer Terminposition einen zweiperiodigen Binomialgitterprozess mit Startwert $s_0 = 100$ und einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 20% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 10% pro Periode. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage 5%.

a) Bestimmen Sie auf Basis des Duplikationsprinzips den arbitragefreien Preis in $t = 0$ eines zweiperiodigen Forwardkontraktes auf den Basistitel. Welche Beziehung weisen der arbitragefreie Forwardpreis und der Startwert des Basistitels auf?

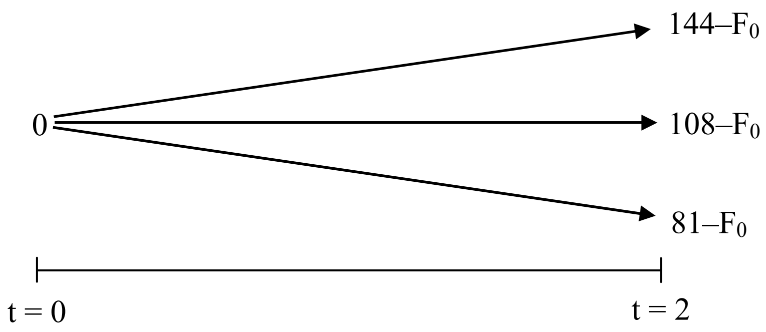
b) Bestimmen Sie auf Basis des Duplikationsprinzips den arbitragefreien Preis in $t = 0$ einer zweiperiodigen Calloption auf den Basistitel. Der Ausübungspreis der Option sei 126.

Lösungsskizze:

Entwicklung Basistitel:



a) Für die Forwardposition gilt entsprechend aus Sicht des Investors:



Dabei ist F_0 der zu bestimmende arbitragefreie Forwardpreis.

Erwirbt der Investor in t = 0 x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition in t = 2 die folgenden Bedingungen:

(1) $144x + (1.05)^2\, y = 144 - F_0$

(2) $108x + (1.05)^2\, y = 108 - F_0$

(3) $81x + (1.05)^2\, y = 81 - F_0$.

Aus (beispielsweise) (1) – (2) resultiert 36x = 36 und somit x = 1. Aus (1) resultiert dann $y = -F_0(1.05)^{-2}$.

Schließlich muss in t = 0 gelten (Law of One Price)

$0 = 100x + y = 100 - F_0(1.05)^{-2}$.

Hieraus resultiert insgesamt

$F_0 = 100(1.05)^2$.

Der Forwardpreis entspricht somit dem um zwei Perioden aufgezinsten Kassapreis (Cost of Carry-Formel).

b) Die Rückflüsse der zweiperiodigen Calloption mit Strike 126 ergeben sich zu $(C_{uu}, C_{ud}, C_{dd}) = (18, 0, 0)$. Der Optionspreis ist – im Unterschied zu Aufgabenteil a) – rekursiv zu bestimmen.

Wir fixieren nun den Zustand S_u zum Zeitpunkt $t = 1$. Die weitere Entwicklung des Prozesses entspricht dann dem einperiodigen Binomialfall. Erwirbt der Investor in $t = 1$ x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition in $t = 2$ dann die folgenden Bedingungen:

$144x + 1.05y = 18$
$108x + 1.05y = 0.$

Hieraus folgt $x = ½$ und $y = -54(1.05)^{-1} = -51.4286$.

In $t = 1$ ergibt sich hieraus
$C_u = 120x + y = 60 - 51.4286 = 8.5714$.

Da $(C_{ud}, C_{dd}) = (0, 0)$, muss auch $C_d = 0$ sein.

Duplikation von (C_u, C_d) erfordert in analoger Weise
$120x + 1.05y = 8.5714$
$90x + 1.05y = 0.$

Hieraus folgt $30x = 8.5714$ und damit $x = 0.2857$.
Für y resultiert hieraus $y = -25.7142\ (1.05)^{-1} = 24.4897$.

In $t = 0$ resultiert hieraus schließlich
$C_0 = 100x + y = 28.57 - 24.4897 = 4.0803 \approx 4.08$.

Der gesuchte Wert der zweijährigen Calloption ist somit 4.08.

Aufgabe 2: (22 Punkte)

Gegeben sei der Prozess $(\sigma > 0)$

$$S_t = s_0 \exp\{mt + \sigma W_t\},$$

wobei W_t den Standard-Wienerprozess bezeichne.

a) Bestimmen Sie den Driftkoeffizienten $\mu_S(t, S_t)$ und den Diffusionskoeffizienten $\sigma_S(t, S_t)$ dieses Prozesses.

b) Weisen Sie auf der Grundlage von a) nach, dass die stochastische Differentialgleichung

$$d(\ln S_t) = mdt + \sigma\, dW_t$$

eine äquivalente Darstellung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t / S_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$$

ist, wenn $m = \mu - \sigma^2 / 2$.

Lösungsskizze:

a) Bezeichne $\mu_W = 0$ und $\sigma_W = 1$ Drift und Diffusion des Standard-Wienerprozesses.

Es gilt zunächst

$S_t = F(t, W_t)$

mit

$F = F(t, x) = s_0 \exp(mt + \sigma x)$.

Damit gilt weiter

$F_t = m\, s_0 \exp(mt + \sigma x) = mF$

$F_x = \sigma\, s_0 \exp(mt + \sigma x) = \sigma F$

$F_{xx} = \sigma^2\, s_0 \exp(mt + \sigma x) = \sigma^2 F$.

Nach Itos Lemma gilt für Drift $\mu_S(t, x)$ und Diffusion $\sigma_S(t, x)$ des Prozesses $\{S_t\}$:

$$\begin{aligned}\mu_S &= F_t + F_x \mu_W + F_{xx}\, \sigma_W^2/2 \\ &= F_t + F_{xx}/2 = (m + \sigma^2/2)\, F = \mu F\end{aligned}$$

$\sigma_S = F_x\, \sigma_W = \sigma F$

Fazit:

$\mu_S(t, S_t) = \mu\, S_t$, $\sigma_S(t, S_t) = \sigma S_t$.

b) Gemäß a) ist der Prozess

$S_t = s_0 \exp(mt + \sigma W_t)$

durch die stochastische Differentialgleichungen

$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$

bzw. äquivalent

$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t$

charakterisiert.

Es genügt somit nachzuweisen, dass $\{S_t\}$ auch die stochastische Differentialgleichung

$d(\ln S_t) = m dt + \sigma dW_t$

erfüllt.

Es gilt nun

$\ln S_t = \ln s_0 + mt + \sigma W_t$,

d.h. es gilt

$\ln S_t = F(t, W_t)$

mit

$F(t, x) = \ln s_0 + mt + \sigma x$.

Damit gilt weiter:

$F_t = m$, $F_x = \sigma$, $F_{xx} = 0$.

Nach Itos Lemma gilt somit für Drift $\mu_{\ln S}(t, x)$ und Diffusion $\sigma_{\ln S}(t, x)$ des Prozesses $\{\ln S_t\}$:

$\mu_{\ln S} = F_t + F_x \, \mu_W + F_{xx} \, \sigma_W^2/2 = m$

$\sigma_{\ln S} = F_x \, \sigma_W = \sigma$,

wobei wieder $\mu_W = 0$ und $\sigma_W = 1$ Drift und Diffusion des Standard-Wienerprozesses bezeichnen.

Damit ist der Nachweis geführt.

Aufgabe 3: (22 Punkte)

a) Gegeben sei der Zwei-Wertpapier-Fall sowie die Präferenzfunktion V(R) = E(R) – aVar(R). Die Investmentgewichte seien nicht auf den Wertebereich [0,1] beschränkt. Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Investmentgewichte des optimalen Portfolios!

b) Gegeben sei eine Putoption, die nach Black/Scholes bewertet ist. Wie hoch ist die Standardabweichung der Änderung des Wertes der Optionsposition über ein Intervall der Länge h unter Anwendung der Delta-Normal-Methode?

Hinweise: 1) Das Put-Delta auf Basis der Black/Scholes-Formel ist gegeben durch $\partial P_t / \partial S_t = -N[-d_1(t)]$.

2) Die Rendite R_h des Basisobjekts sei gegeben durch $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$.

Lösungsskizze:

a) Im Zwei-Wertpapier-Fall gilt:

$$\begin{aligned} E(R) &= x\,E(R_1) + (1-x)\,E(R_2) = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x \\ Var(R) &= x^2 Var(R_1) + (1-x)^2 Var(R_2) + 2x(1-x)Cov(R_1, R_2) \\ &= x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}, \end{aligned}$$

wobei $\sigma_{12} := Cov(R_1, R_2)$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} V(R) &= E(R) - aVar(R) \\ &= \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x - a[x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}] \end{aligned}$$

$$0 = dV(R)/dx = (\mu_1 - \mu_2) - 2a\sigma_1^2 x + 2a(1-x)\sigma_2^2 - 2a\sigma_{12} + 4ax\sigma_{12}$$

Insgesamt folgt damit:

$$x = \frac{2a(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - (\mu_1 - \mu_2)}{4a\sigma_{12} - 2a(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}.$$

b) Delta-Normal-Methode:

$$P_{t+h} - P_t = \frac{\partial P_t}{\partial S_t}(S_{t+h} - S_t)\,.$$

Nach Hinweis gilt $\partial P_t / \partial S_t = -N[-d_1(t)]$. Ferner gilt:

$$S_{t+h} - S_t = S_t\, R_h\,.$$

Insgesamt damit:

$$P_{t+h} - P_t = -S_t\, N[-d_1(t)]\, R_h\,.$$

Folgerung:

$$\sigma(P_{t+h} - P_t) = S_t\, |\, N[-d_1(t)]\, |\, \sigma\sqrt{h}\,.$$

Aufgabe 4: (23 Punkte)

Gegeben sei eine zweijährige Aktienanleihe mit Kupon 50. Bei Fälligkeit der Anleihe kann der Emittent entweder den Nennwert in Höhe von 1000 zurückzahlen oder 10 Fresenius-Aktien als Tilgungsleistung andienen.

a) Formalisieren Sie den Rückzahlungsstrom dieser Aktienanleihe aus Sicht des Erwerbers der Anleihe (Investor).

b) Duplizieren Sie diesen Rückzahlungsstrom unter Verwendung eines Short Put. Wie lauten Basisobjekt, Laufzeit und Ausübungspreis des Put? Welcher weitere Finanztitel wird in diesem Falle zur Duplikation benötigt?

c) Der Investor besitze bereits 10 Fresenius-Aktien. Welche weiteren Finanztitel muss der Investor erwerben, damit seine Gesamtposition die gegebene Aktienanleihe dupliziert?

Lösungsskizze:

a) Der Rückzahlungsstrom aus Sicht des Investors ist gegeben durch

$\{50, 50 + \min(1000, 10\ S_2)\}$,

wobei S_2 den Wert der Freseniusaktie zum Zeitpunkt 2 bedeute.

b) Es gilt

$\min(1000, 10\ S_2) = 1000 + \min(0, 10\ S_2 - 1000)$

$= 1000 + 10\min(0, S_2 - 100) = 1000 - 10\max(0, 100 - S_2)$

und damit insgesamt

$\{50, 50 + \min(1000, 10\ S_2)\}$

$= \{50, 1050\} - \{0, 10 \max(0, 100 - S_2)\}$.

Der Rückzahlungsstrom wird damit dupliziert durch eine Anleihe mit Nennwert 1000 und Kupon 50 sowie einer Europäischen Short Put-Position, bestehend aus 10 Puts auf das Basisobjekt mit zwei Jahren Laufzeit und Ausübungspreis 100.

c) Es gilt

$\min(1000, 10\ S_2) = 10\ S_2 + \min(1000 - 10\ S_2, 0)$

$= 10\ S_2 + 10 \min(100 - S_2, 0) = 10\ S_2 - 10 \max(S_2 - 100, 0)$.

Für die Differenz zwischen Rückzahlungsstrom Aktienanleihe und der bestehenden Aktienposition gilt somit

$\{50, 50 + \min(1000, 10\ S_2)\} - 10\ \{0, 10\ S_2\}$

$= \{50, 50 + 10\ S_2 - 10 \max(S_2 - 100, 0)\} - \{0, 10\ S_2\}$

$= \{50, 50 - 10 \max(S_2 - 100, 0)\}$

$= \{50, 50\} - \{0, 10 \max(S_2 - 100, 0)\}$

$= \{50, 0\} + \{0, 50\} - \{0, 10 \max(S_2 - 100, 0)\}$.

Gesamtposition setzt sich daher zusammen aus:

a) Einem Zerobond mit Nennwert 50, fällig in $t = 1$

b) Einem Zerobond mit Nennwert 50, fällig in $t = 2$

c) Einer Short Call-Position, bestehend aus 10 Calls auf das Basisobjekt mit zwei Jahren Laufzeit und Ausübungspreis 100.