Bericht zur Mathematischen Eingangsprüfung der DAV im Oktober 2005

Martin Folkers und *Günter Last* (Karlsruhe)

1. Aufgabe (13 Punkte)

Gegeben sei die folgende Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \int_0^{\sin(x)} e^{-t}\, dt, \quad x \in [0, \pi].$$

a) Man berechne die ersten drei Ableitungen der Funktion f.

b) Man bestimme die lokalen und globalen Maximalstellen der Funktion f.

c) Man bestimme die Taylorpolynome $T_2(x)$ und $T_3(x)$ zweiter bzw. dritter Ordnung von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

d) Man beweise die Ungleichung

$$|T_2(x) - f(x)| \leq \tfrac{\pi^3}{12}, \quad x \in [0, \pi].$$

Lösung:

Zu a)
Es gilt

$$f(x) = 1 - e^{-\sin(x)},$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \cdot e^{-\sin(x)}, \\ f''(x) &= -\big(\sin(x) + \cos^2(x)\big) \cdot e^{-\sin(x)}, \\ f'''(x) &= \big(-\cos(x) + 3 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + \cos^3(x)\big) \cdot e^{-\sin(x)}. \end{aligned}$$

Zu b)
Der Sinus ist auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und auf dem Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ streng monoton fallend. Da die Funktion $h(x) = 1 - e^{-x}$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, hat die Funktion f dieselben Monotonieeigenschaften wie der Sinus. Folglich ist $x_0 = \frac{\pi}{2}$ die einzige lokale und globale Maximalstelle von f.

Zu c)
Es gilt $\sin(x_0) = 1$ und $\cos(x_0) = 0$ und damit insbesondere

$$f'(x_0) = f'''(x_0) = 0.$$

Es folgt

$$T_2(x) = T_3(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 = (1 - e^{-1}) - \frac{e^{-1}}{2} \cdot (x - \frac{\pi}{2})^2.$$

Zu d)
Es sei $x \in [0, \pi]$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein $z \in [0, \pi]$ mit

$$T_2(x) - f(x) = \frac{f'''(z)}{6} \cdot (x - x_0)^3.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |T_2(x) - f(x)| &= \frac{1}{6} \cdot \left|3 \cdot \cos(z) \cdot \sin(z) - \cos(z) \cdot (1 - \cos^2(z))\right| \cdot e^{-\sin(z)} \cdot \left|x - \frac{\pi}{2}\right|^3 \\ &\leq \frac{1}{6} \cdot \left(3 \cdot |\cos(z)| \cdot |\sin(z)| + |\cos(z)| \cdot (1 - \cos^2(z))\right) \cdot e^{-\sin(z)} \cdot \left|x - \frac{\pi}{2}\right|^3. \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq 1 - \cos^2(z) = \sin^2(z) \leq 1$ und $e^{-\sin(z)} \leq 1$ und $\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^3 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$ ergibt sich für $x \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} |T_2(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{6} \cdot (3 \cdot |\cos(z)| \cdot |\sin(z)| + |\cos(z)|) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \\ &\leq \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{12}. \end{aligned}$$

2. Aufgabe (12 Punkte)

Gegeben sei die folgende Teilmenge B des $\mathbb{R}^3$

$$B := \{(x, y, z) : 1 + 4 \cdot (x^2 + y^2) \leq z \leq 3\}.$$

a) Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Volumen $V(B)$ von B.

b) Für jedes $\lambda \geq 0$ sei die Menge $\lambda \cdot B$ durch

$$\lambda \cdot B := \{\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z) : (x, y, z) \in B\}$$

definiert. Wie muss λ gewählt werden, damit

$$V(\lambda \cdot B) = \pi$$

gilt?

c) Man berechne den Schwerpunkt von B, d.h. den Vektor

$$\vec{s}_B = V(B)^{-1} \cdot \left(\int_B x \, d(x, y, z), \int_B y \, d(x, y, z), \int_B z \, d(x, y, z) \right).$$

Lösung:

Zu a)
Für Zylinderkoordinaten eines Punktes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$x = r \cdot \cos(\varphi), \; y = r \cdot \sin(\varphi), \; z = z,$$

wobei $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi$. Damit ist

$$\begin{aligned} B^* &= \{(r, \varphi, z) : 1 + 4 \cdot r^2 \leq z \leq 3,\ 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi\} \\ &= \{(r, \varphi, z) : 1 \leq z \leq 3,\ 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{z-1}}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi\} \end{aligned}$$

eine Beschreibung von B mittels Zylinderkoordinaten. Aus dem Transformationssatz (und dem Satz von Fubini) folgt

$$\begin{aligned} V(B) &= \int_B d(x,y,z) = \int_{B^*} r\, d(r,\varphi,z) = \int_1^3 \int_0^{\frac{\sqrt{z-1}}{2}} \int_0^{2\cdot\pi} r\, d\varphi\, dr\, dz \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \int_1^3 \int_0^{\frac{\sqrt{z-1}}{2}} r\, dr\, dz = 2 \cdot \pi \cdot \int_1^3 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{z-1}}{2}} dz \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \int_1^3 \frac{z-1}{8}\, dz = \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{(z-1)^2}{2}\right]_1^3 = \frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Zu b)
Für jedes $\lambda \geq 0$ gilt

$$V(\lambda \cdot B) = \lambda^3 \cdot V(B).$$

Gesucht ist also ein $\lambda \geq 0$ mit

$$\lambda^3 \cdot V(B) = \lambda^3 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Es folgt

$$\lambda = \sqrt[3]{2}.$$

Zu c)
Aus dem Transformationssatz folgt

$$\int_B x\, d(x,y,z) = \int_1^3 \int_0^{\frac{\sqrt{z-1}}{2}} \int_0^{2\cdot\pi} r^2 \cdot \cos(\varphi)\, d\varphi\, dr\, dz = 0$$

und analog

$$\int_B y\, d(x,y,z) = \int_1^3 \int_0^{\frac{\sqrt{z-1}}{2}} \int_0^{2\cdot\pi} r^2 \cdot \sin(\varphi)\, d\varphi\, dr\, dz = 0.$$

Schließlich folgt wie in a)

$$\begin{aligned} \int_B z\, d(x,y,z) &= \int_1^3 \int_0^{\frac{\sqrt{z-1}}{2}} \int_0^{2\cdot\pi} z \cdot r\, d\varphi\, dr\, dz = 2 \cdot \pi \cdot \int_1^3 z \cdot \frac{z-1}{8}\, dz \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^3 (z^2 - z)\, dz = \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_1^3 \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7 \cdot \pi}{6}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\vec{s}_B = \frac{2}{\pi} \cdot (0, 0, \frac{7 \cdot \pi}{6}) = (0, 0, \frac{7}{3}).$$

3. Aufgabe (12 Punkte)

a) Überprüfen Sie, welche der drei folgenden Mengen Untervektorräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ sind:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2 \cdot y - z = 0 \text{ und } x = y\}, \\ M_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \leq 1\}, \\ M_3 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2 \text{ und } x + y - z = -2\}. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das (komplexe) lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccc} (3 + 4 \cdot i) \cdot x & & & + & (3 - 4 \cdot i) \cdot z & = & c_1 \\ -25 \cdot x & - & y & + & (7 + 24 \cdot i) \cdot z & = & c_2 \\ (-1 + 32 \cdot i) \cdot x & - & y & + & (31 - 8 \cdot i) \cdot z & = & c_3 \end{array}$$

für die beiden rechten Seiten

$$\begin{array}{llll} (I) & c_1 = -1 - i, & c_2 = 7 - i, & c_3 = -1 - 9 \cdot i, \\ (II) & c_1 = 1 + i, & c_2 = 0, & c_3 = 0. \end{array}$$

Lösung:

Zu a)

M_1 ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystem und folglich ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Wegen $(1, 0, 0) \in M_2$, aber $(2, 0, 0) = 2 \cdot (1, 0, 0) \notin M_2$ ist M_2 kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. M_3 ist wegen $(0, 0, 0) \notin M_3$ kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

Zu b)

Die beiden vorgegebenen linearen Gleichungssysteme unterscheiden sich nur in der rechten Seite und können daher simultan gelöst werden. Durchführung des Gauß-Algorithmus ergibt

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 3 + 4 \cdot i & 0 & 3 - 4 \cdot i & -1 - i & 1 + i \\ -25 & -1 & 7 + 24 \cdot i & 7 - i & 0 \\ -1 + 32 \cdot i & -1 & 31 - 8 \cdot i & -1 - 9 \cdot i & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} | \cdot (3 - 4 \cdot i) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c|c} 25 & 0 & -7 - 24 \cdot i & -7 + i & 7 - i \\ -25 & -1 & 7 + 24 \cdot i & 7 - i & 0 \\ -1 + 32 \cdot i & -1 & 31 - 8 \cdot i & -1 - 9 \cdot i & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot (+1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c|c} 25 & 0 & -7-24\cdot i & -7+i & 7-i \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 7-i \\ -1+32\cdot i & -1 & 31-8\cdot i & -1-9\cdot i & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \quad | \cdot (-1) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c|c} 25 & 0 & -7-24\cdot i & -7+i & 7-i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7+i \\ -1+32\cdot i & 0 & 31-8\cdot i & -1-9\cdot i & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(\frac{1-32\cdot i}{25}) \quad | : (25) \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & \frac{-7-24\cdot i}{25} & \frac{-7+i}{25} & \frac{7-i}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8-8\cdot i \end{array}\right]
$$

Die Lösungsmenge des ersten linearen Gleichungssystems lautet

$$
L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (\tfrac{-7+i}{25}, 0, 0) + t \cdot (7+24\cdot i, 0, 25),\ t \in \mathbb{R}\}.
$$

Das zweite lineare Gleichungssystem ist unlösbar.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ und $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ gegeben mit

$$
\vec{a}_1 := (1,1,0), \quad \vec{a}_2 := (0,1,1), \quad \vec{a}_3 := (1,0,1),
$$

$$
\vec{b}_1 := (0,1,-2), \quad \vec{b}_2 := (1,0,0), \quad \vec{b}_3 := (-1,2,-1),
$$

sowie die Vektoren

$$
\vec{x} := \vec{b}_1 - \vec{b}_2, \quad \vec{y} := \vec{b}_3, \quad \vec{z} := \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3.
$$

a) Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ dar.

b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$
f(\vec{a}_1) = \vec{x}, \quad f(\vec{a}_2) = \vec{y}, \quad f(\vec{a}_3) = \vec{z}.
$$

1. Berechnen Sie Kern(f).
2. Berechnen Sie die Dimension von Bild(f), und bestimmen Sie eine Basis von Bild(f).

Lösung:

Zu a)

Es gilt

$$
\vec{x} = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 = (-1,1,-2).
$$

Durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus erhält man

$$\vec{x} = \vec{a}_1 - 2 \cdot \vec{a}_3.$$

Zu b)

1. Da die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, ergibt sich Kern(f) durch Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich

$$\text{Kern}(f) = \text{span}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3).$$

2. Mit Hilfe des Dimensionssatzes erhält man

$$\dim(\text{Bild}(f)) = 2,$$

und da die Vektoren $\vec{x} = f(\vec{a}_1)$ und $\vec{y} = f(\vec{a}_2)$ linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von Bild(f).

5. Aufgabe (14 Punkte)

Gegeben seien drei Zufallsvariablen X, Y und Z mit Erwartungswert 0 und endlicher Varianz. Die Zufallsvariablen seien paarweise unkorrelliert, und für die Varianzen von X, Y, Z gelte

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \text{Var}(Z) = \sigma^2 > 0.$$

a) Man bestimme den Korrelationskoeffizienten $\rho(S, T)$ für

$$S := X + 2 \cdot Y \text{ und } T := 2 \cdot Y + Z.$$

b) In Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ betrachte man die Zufallsvariablen

$$S_a := a \cdot X + a^2 \cdot Y \text{ und } T_a := a \cdot Y + a^2 \cdot Z$$

und bestimme die Kovarianz $\text{Cov}(S_a, T_a)$ von S_a und T_a.

c) Man betrachte die in b) definierten Zufallsvariablen S_a und T_a in Abhängigkeit von $a \neq 0$. Man bestimme den Korrelationskoeffizienten $\rho(S_a, T_a)$ und beweise die Ungleichung

$$-\frac{1}{2} \leq \rho(S_a, T_a) \leq +\frac{1}{2}.$$

d) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass die in b) definierten Zufallsvariablen S_a und T_a stochastisch unabhängig sind?

Lösung:

Zu a)

Da die Zufallsvariablen X, Y und Z paarweise unkorreliert sind, erhält man für die Kovarianz von S und T

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(S,T) &= \operatorname{Cov}(X + 2\cdot Y,\ 2\cdot Y + Z)\\ &= 2\cdot \underbrace{\operatorname{Cov}(X,Y)}_{=0} + \underbrace{\operatorname{Cov}(X,Z)}_{=0} + 4\cdot \operatorname{Cov}(Y,Y) + 2\cdot \underbrace{\operatorname{Cov}(Y,Z)}_{=0}\\ &= 4\cdot \operatorname{Cov}(Y,Y) = 4\cdot \operatorname{Var}(Y) = 4\cdot\sigma^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(S) &= \operatorname{Var}(X + 2\cdot Y) = \operatorname{Var}(X) + 4\cdot \operatorname{Var}(Y) = \sigma^2 + 4\cdot\sigma^2 = 5\cdot\sigma^2,\\ \operatorname{Var}(T) &= \operatorname{Var}(2\cdot Y + Z) = 4\cdot \operatorname{Var}(Y) + \operatorname{Var}(Z) = 4\cdot\sigma^2 + \sigma^2 = 5\cdot\sigma^2.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\rho(S,T) = \frac{\operatorname{Cov}(S,T)}{\sqrt{\operatorname{Var}(S)}\cdot\sqrt{\operatorname{Var}(T)}} = \frac{4\cdot\sigma^2}{5\cdot\sigma^2} = \frac{4}{5}.$$

Zu b)

Wie in a) folgt

$$\operatorname{Cov}(S_a, T_a) = \operatorname{Cov}(a^2\cdot Y,\ a\cdot Y) = a^3\cdot\sigma^2.$$

Zu c)

Für $a \neq 0$ ist

$$\rho(S_a, T_a) = \frac{\operatorname{Cov}(S_a,T_a)}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_a)}\cdot\sqrt{\operatorname{Var}(T_a)}} = \frac{a^3\cdot\sigma^2}{(a^2 + a^4)\cdot\sigma^2} = \frac{a}{1+a^2}.$$

Aus $(1-a)^2 \geq 0$ und $(1+a)^2 \geq 0$ folgen die Ungleichungen

$$-(1+a^2) \leq 2\cdot a \leq 1 + a^2,$$

also

$$-\frac{1}{2} \leq \rho(S_a, T_a) \leq +\frac{1}{2}.$$

Zu d)

Für $a = 0$ ist $S_a = T_a = 0$. Damit sind S_a und T_a stochastisch unabhängig.

6. Aufgabe (14 Punkte)

Ein Röhrenproduzent stelle zwei verschiedene Sorten von Röhren her. Die in *cm* gemessene (zufällige) Länge der ersten Sorte sei ausreichend genau durch eine normalverteilte Zufallsvariable X beschrieben mit

Erwartungswert $\mu = 80\,cm$ und Varianz $\sigma^2 = 9\,cm^2$.

Die in *cm* gemessene (zufällige) Länge der zweiten Sorte sei ausreichend genau durch eine normalverteilte Zufallsvariable Y beschrieben mit

$$\text{Erwartungswert } \nu = 75\,cm \text{ und Varianz } \tau^2 = 4\,cm^2.$$

Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus der Produktion herausgegriffene Röhre der ersten Sorte eine Länge zwischen $80\,cm$ und $83\,cm$ hat?

b) Der (zahlenmäßige) Anteil der ersten bzw. der zweiten Sorte an der Gesamtproduktion betrage 60% bzw. 40%. Man berechne den Erwartungswert und die Varianz der Länge Z einer rein zufällig aus der Produnktion herausgegriffenen Röhre. (Diese kann vom Typ 1 oder vom Typ 2 sein.)

c) Jede Röhre der ersten Sorte wird konstant um $1\,cm$ verlängert. Die Zufallsvariable V beschreibe die (zufällige) Länge der verlängerten Röhre. Welche Verteilung besitzt V?

d) Für einen Auftrag werden eine Röhre der ersten Sorte und zwei Röhren der zweiten Sorte zusammengesetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die (zufällige) Gesamtlänge W einer zusammengesetzten Röhre höchsten $236\,cm$ beträgt.

e) Man betrachte die in b) eingeführte Zufallsvariable Z. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zufällig herausgegriffene Röhre von der zweiten Sorte ist, falls $Z = 77\,cm$ ist?

Lösung:

Zu a)

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(80 \le X \le 83) &= \mathbb{P}(X \le 83) - \mathbb{P}(X \le 80)\\ &= \mathbb{P}(\underbrace{\frac{X-80}{3}}_{\sim N(0,1)} \le \frac{83-80}{3}) - \mathbb{P}(\underbrace{\frac{X-80}{3}}_{\sim N(0,1)} \le \frac{80-80}{3})\\ &= \Phi(1) - \Phi(0) \approx 0.8413 - 0.5 = 03413.\end{aligned}$$

Zu b)

Die Verteilungsfunktion F_Z von Z ergibt sich zu

$$F_Z(t) = 0.6 \cdot \Phi_{80,9}(t) + 0.4 \cdot \Phi_{75,4}(t).$$

Damit ist

$$EZ = 0.6 \cdot EX + 0.4 \cdot EY = 0.6 \cdot 80 + 0.4 \cdot 75 = 78.$$

Außerdem gilt

$$EZ^2 = 0.6 \cdot EX^2 + 0.4 \cdot EY^2,$$

also

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= EZ^2 - (EZ)^2\\ &= 0.6 \cdot \big(EX^2 - (EX)^2\big) + 0.4 \cdot \big(EY^2 - (EY)^2\big) + 0.6 \cdot (EX)^2 + 0.4 \cdot (EY)^2 - (EZ)^2\\ &= 0.6 \cdot \mathrm{Var}(X) + 0.4 \cdot \mathrm{Var}(Y) + 0.6 \cdot 80^2 + 0.4 \cdot 75^2 - 78^2 = 7 + 6 = 13.\end{aligned}$$

Zu c)
Es gilt

$$V = X + 1 \sim N(80 + 1, 9) = N(81, 9).$$

Zu d)
Da die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind, gilt

$$W = X + 2 \cdot Y \sim N(80 + 2 \cdot 75,\ 9 + 4 \cdot 4) = N(230,\ 25),$$

und damit ergibt sich

$$\mathbb{P}(W \leq 236) = \mathbb{P}(\underbrace{\frac{W - 230}{5}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{236 - 230}{5}) = \Phi(1.2) \approx 0.8849.$$

Zu e)
Es bezeichne A das Ereignis, dass die ausgewählte Röhre von der zweiten Sorte ist. Mit differentieller Schreibweise gilt

$$\mathbb{P}(A, Z \in dt) = 0.4 \cdot f_Y(t)\, dt$$

und

$$\mathbb{P}(Z \in dt) = (0.6 \cdot f_X(t) + 0.4 \cdot f_Y(t))\, dt.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \,|\, Z = t) &= \frac{\mathbb{P}(A, Z \in dt)}{\mathbb{P}(Z \in dt)} = \frac{0.4 \cdot f_Y(t)\, dt}{(0.6 \cdot f_X(t) + 0.4 \cdot f_Y(t))\, dt} \\ &= \frac{0.4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{(t-75)^2}{8}\right)}{0.6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \exp\left(-\frac{(t-80)^2}{18}\right) + 0.4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{(t-75)^2}{8}\right)}. \end{aligned}$$

Für $t = 77$ ergibt sich

$$\mathbb{P}(A \,|\, Z = 77) = \frac{0.2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\right)}{0.2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\right) + 0.2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$