Bericht zur Mathematischen Eingangsprüfung der DAV im Oktober 2004

Martin Folkers und *Günter Last* (Karlsruhe)

1. Aufgabe (13 Punkte)

a) Bestimmen sie zu den angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils alle Häufungspunkte sowie den limes superior $\overline{\lim}$ als auch den limes inferior $\underline{\lim}$.

Folge	Häufungspunkte	$\underline{\lim}$	$\overline{\lim}$
$a_n := (1+(-1)^n)\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k}}$	$0, \infty$	0	∞
$b_n := \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{3/2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k}}$	0	0	0

b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

	Grenzwert
$\lim\limits_{x\to 1+}\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$	$\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3^{x-2}-1}{x^2-2\cdot x}$	$\frac{\log(3)}{2}$

c) Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\ln n}}$ konvergiert.

Lösung:

Zu a)

1. Es gilt

$$a_n = (1+(-1)^n)\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k}} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 2\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k}}, & \text{falls } n \text{ gerade.}\end{cases}$$

Weiter gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k}} = +\infty\,.$$

2. Es gilt

$$b_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k}} = \frac{\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k}} \,.$$

Weiter gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}} = (\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x})^{\frac{3}{2}} = 1\,,$$

und wegen

$$0 < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k}} \le \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot \sqrt{2} \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k}} = 0\,.$$

Zu b)

1. Für $x \in (1,3)$ gilt (geometrische Reihe)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = \frac{1}{3-x}\,,$$

und damit folgt

$$\lim_{x\to 1+} \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = \frac{1}{2}\,.$$

2. Mit der Regel von de Hospital erhält man

$$\lim_{x\to 2} \frac{3^{x-2}-1}{x^2-2\cdot x} = \lim_{x\to 2} \frac{e^{(x-2)\cdot\log(3)}-1}{x^2-2\cdot x} = \lim_{x\to 2} \frac{3^{x-2}\cdot\log(3)}{2\cdot x-2} = \frac{\log(3)}{2}\,.$$

Zu c)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\log(x)}}\,dx \overset{u=\log(x)}{=} \int_{\log(2)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+u}}\,du = \left[2\cdot\sqrt{1+u}\right]_{\log(2)}^{\infty} = \infty\,.$$

Aus dem Integralkriterium für die Divergenz von Reihen folgt, dass die vorgelegte Reihe divergent ist.

2. Aufgabe (11 Punkte)

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int (2 \cdot x + 3) \cdot \ln(1 + x)\, dx\,.$$

b) Vorgegeben sei der beschränkte Bereich B im ersten Quadranten der xy-Ebene, welcher berandet wird durch die beiden Geraden $x = 0$ und $x = 2$, sowie durch die beiden Parabeln $y = -(x-2)^2 + 10$ und $y = (x-2)^2 + 2$.

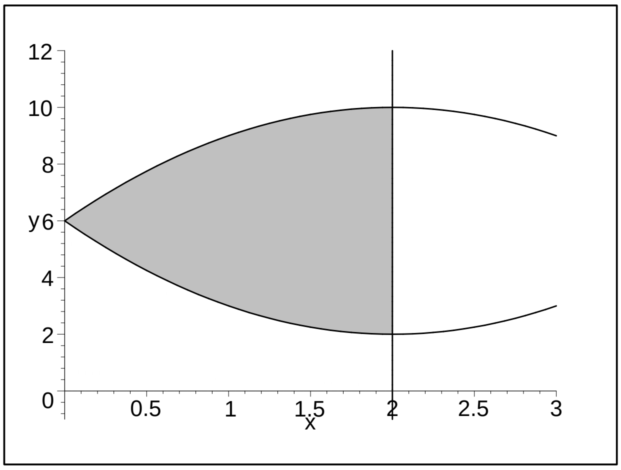

Schaubild des Bereiches B

1. Berechnen Sie das Integral

$$I := \int_B 3 \cdot x\, d(x, y)\,.$$

2. Berechnen Sie das Volumen V des Rotationskörpers, welcher entsteht, wenn das Flächenstück B im $\mathbb{R}^3$ um die y-Achse rotiert.
   Hinweis: Verwenden Sie das Prinzip des Cavalieri.

Lösung:

Zu a)

Partielle Intergration liefert für $x > -1$ (c ist eine Integrationskonstante)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \underbrace{(2 \cdot x + 3)}_{=u'} \cdot \underbrace{\log(1 + x)}_{=v}\, dx = \big(x^2 + 3 \cdot x\big) \cdot \log(1 + x) - \int \frac{x^2 + 3 \cdot x}{1 + x}\, dx + c \\ &= \big(x^2 + 3 \cdot x\big) \cdot \log(1 + x) - \int \left(x + 2 - \frac{2}{x + 1}\right) dx + c \\ &= \big(x^2 + 3 \cdot x\big) \cdot \log(1 + x) - \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x + 2 \cdot \log(x + 1) + c \\ &= \big(x^2 + 3 \cdot x + 2\big) \cdot \log(x + 1) - \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x + c\,. \end{aligned}$$

Zu b)
Es gilt

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_B 3\cdot x\,d(x,y) = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{(x-2)^2+2}^{-(x-2)^2+10} 3\cdot x\,dy \right) dx \\
&= \int\limits_0^2 3\cdot x\cdot \big(-(x-2)^2+10-(x-2)^2-2\big)\,dx \\
&= \int\limits_0^2 3\cdot x\cdot \big(-x^2+4\cdot x-4+10-x^2+4\cdot x-4-2\big)\,dx \\
&= \int\limits_0^2 3\cdot x\cdot \big(-2\cdot x^2+8\cdot x\big)\,dx = \int\limits_{x=0}^2 \big(-6\cdot x^3+24\cdot x^2\big)\,dx \\
&= \left[-\frac{6}{4}\cdot x^4+8\cdot x^3\right]_{x=0}^2 = -24+64=40\,.
\end{aligned}
$$

Zu c)
Mit dem Cavalieriprinzip erhält man

$$
\begin{aligned}
V &= 2\cdot\pi\cdot \int\limits_2^6 \left(4-\left(2-\sqrt{y-2}\right)^2\right) dy = 2\cdot\pi\cdot\int\limits_2^6 \left(4\cdot\sqrt{y-2}-(y-2)\right) dy \\
&= 2\cdot\pi\cdot\left(\left[\frac{8}{3}\cdot(y-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^6-\left[\frac{1}{2}\cdot(y-2)^2\right]_2^6\right) = 2\cdot\pi\cdot\left(\frac{64}{3}-8\right) = \frac{80}{3}\cdot\pi.
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe (11 Punkte)

a) Vorgegeben seien die Spaltenvektoren

$$
\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2\\1\\1\\-2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0\\-1\\1\\0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1\\-2\\-2\\-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4\,.
$$

Berechnen Sie das 2-dimensionale Volumen V_2 des von den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ aufgespannten Parallelogramms sowie das 3-dimensionale Volumen V_3 des von den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ aufgespannten Parallelotops (Spats).

b) Im $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$
\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\2\\1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2\\3\\0\\3 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\6 \end{pmatrix}, \vec{c}_\alpha = \begin{pmatrix} 1\\ \alpha\\1\\ \alpha \end{pmatrix}
$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ vorgegeben.

1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $B_\alpha := (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{c}_\alpha)$, und bestimmen Sie α so, dass $\vec{c}_\alpha$ in der linearen Hülle

$$V := \operatorname{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3).$$

liegt.

2. Begründen Sie, warum

$$U := \operatorname{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)^\perp \cup \operatorname{span}(\vec{b}_2)^\perp$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist, und bestimmen Sie α so, dass $\vec{c}_\alpha \in U$ ist.

Lösung:

Zu a)

Es gilt

$$\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2,\ \vec{a}_1 \perp \vec{a}_3 \text{ und } \vec{a}_2 \perp \vec{a}_3\,,$$

und damit folgt

$$V_2 = \|\vec{a}_1\|_2 \cdot \|\vec{a}_2\|_2 = \sqrt{20}$$

sowie

$$V_3 = \|\vec{a}_1\|_2 \cdot \|\vec{a}_2\|_2 \cdot \|\vec{a}_3\|_2 = 10 \cdot \sqrt{2}\,.$$

Zu b)

1. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & \alpha \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & \alpha \end{pmatrix} = 30 - 24 \cdot \alpha\,.$$

Für $\alpha \neq \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$ sind die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{c}_\alpha$ linear unabhängig. Da die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ linear unabhängig sind, gilt für $\alpha = \frac{5}{4}$

$$\vec{c}_\alpha \in \operatorname{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)\,.$$

2. Es gilt

$$\operatorname{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)^\perp \subseteq \operatorname{span}(\vec{b}_2)^\perp\,,$$

und hieraus folgt

$$U = \operatorname{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)^\perp \cup \operatorname{span}(\vec{b}_2)^\perp = \operatorname{span}(\vec{b}_2)^\perp\,.$$

Weiter gilt

$$\langle \vec{c}_\alpha, \vec{b}_2 \rangle = 2 + 6 \cdot \alpha\,,$$

also

$$\vec{c}_\alpha \in U \iff \alpha = -\frac{1}{3}\,.$$

4. Aufgabe (13 Punkte)

a) Mit den Spaltenvektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

werde die 4×3 Matrix $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ gebildet. Mit A und der transponierten Matrix A^T werden dann die folgenden beiden linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) := A \cdot \vec{x}, \\ g &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) := A^T \cdot \vec{x}, \end{aligned}$$

definiert. Geben Sie (jeweils mit Begründung) an, ob die Abbildungen

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto h(\vec{x}) := g(f(\vec{x})), \\ k &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \vec{x} \mapsto k(\vec{x}) := f(g(\vec{x})). \end{aligned}$$

injektiv bzw. surjektiv sind. Falls eine dieser Abbildungen bijektiv ist, ist die Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung anzugeben.

b) Vorgegeben sei die reelle (4×4)-Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die Determinante von B.
2. $\lambda = 1$ ist ein Eigenwert der Matrix B. Bestimmen Sie eine Basis des Eigenraumes $\mathcal{E}_1$ zu diesem Eigenwert.
3. Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix B.
Hinweis: Sie brauchen zur Lösung nicht die genaue Kenntnis des charakteristischen Polynoms der Matrix B.

Lösung:

Zu a)

Es gilt

$$h(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = A^T \cdot A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3,$$

und wegen

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 3$$

ist die Abbildung $h = g \circ f$ injektiv und surjektiv, also bijektiv, und die Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung h^{-1} lautet

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$f(g(\vec{x})) = A \cdot A^T \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^4,$$

und wegen

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3 < 4$$

ist die Abbildung $k = f \circ g$ weder injektiv noch surjektiv.

Zu b)

1. Es gilt

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

2. Das homogene, lineare Gleichungssystem, welches zur Bestimmung von Kern$(E_4 - B)$ gehört, lautet (E_4 bezeichne die 4-dimensionale Einheitsmatrix)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

also folgt

$$\text{Kern}(E_4 - B) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

3. Das charakteristische Polynom der Matrix B hat die Gestalt

$$g_B(x) = \det(x \cdot E_4 - B) = (x-1)^3 \cdot (x - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

und wegen $\det(B) = 2$ folgt

$$\alpha = 2.$$

Die Matrix B besitzt also die Eigenwerte 1 (dreifach) und 2 (einfach).

5. Aufgabe (13 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, seien unabhängig und jede habe folgende Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0\,, \\ x^2, & \text{falls} \quad 0 \leq x \leq 1\,, \\ 1, & \text{falls} \quad 1 < x\,. \end{cases}$$

a) Geben Sie die Dichte von X_1 an.

b) Berechnen Sie für $s \in \mathbb{R}$ den Erwartungswert $\mathbb{E}\big[e^{s \cdot X_1}\big]$.

c) Berechnen Sie die Varianz der Zufallsvariablen $Y = e^{X_1}$.

d) Sei $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Z := e^{S_n}$.

e) Finden Sie Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass die Verteilung von $\frac{S_n - a_n}{b_n}$ für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung $N(0,1)$ konvergiert.

Lösung:

Zu a)

Eine Dichte von X_1 lautet

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x, & \text{falls} \quad x \in (0,1)\,, \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zu b)

Für $s \neq 0$ gilt

$$\mathbb{E}[e^{s \cdot X_1}] = \int\limits_0^1 2 \cdot x \cdot e^{s \cdot x}\, dx = \left[\frac{2}{s^2} \cdot (s \cdot x \cdot e^{s \cdot x} - e^{s \cdot x})\right]_0^1 = \frac{2}{s^2}\,(s \cdot e^s - e^s + 1)\;.$$

Für $s = 0$ ergibt sich

$$\mathbb{E}[e^{0 \cdot X_1}] = \mathbb{E}[1] = 1\,.$$

Zu c)

Für die Varianz der Zufallsvariablen $Y = e^{X_1}$ erhält man

$$\operatorname{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[e^{2 \cdot X_1}] - \big(\mathbb{E}[e^{X_1}]\big)^2 = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{7}{2} \approx 0,1945\,.$$

Zu d)

Da die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt sind, folgt

$$\mathbb{E}[e^{S_n}] = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} e^{X_i}] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{X_i}] = \big(\mathbb{E}[e^{X_1}]\big)^n = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Zu e)
Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1] &= \int_0^1 x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 2 \cdot x^2\, dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}, \\
\mathbb{E}[S_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = n \cdot \mathbb{E}[X_1] = \frac{2 \cdot n}{3}, \\
\mathbb{E}\left[{X_1}^2\right] &= \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 2 \cdot x^3\, dx = \left[\frac{2}{4} \cdot x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_1) &= \mathbb{E}\left[{X_1}^2\right] - \mathbb{E}\left[X_1\right]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}, \\
\mathrm{Var}(S_n) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) = n \cdot \mathrm{Var}(X_1) = \frac{n}{18}.
\end{aligned}
$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz konvergiert die Verteilung von $\frac{S_n - a_n}{b_n}$ für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung $N(0,1)$ für die Folgen

$$a_n = \mathbb{E}[S_n] \text{ und } b_n = \sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}\,.$$

Demzufolge wähle man

$$
\begin{aligned}
a_n &= \mathbb{E}[S_n] = \frac{2 \cdot n}{3}, \\
b_n &= \sqrt{\mathrm{Var}(S_n)} = \sqrt{\frac{n}{18}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

6. Aufgabe (11 Punkte)

Es sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit Dichte

$$f(x,y) := \begin{cases} c \cdot \frac{2 \cdot y}{\sqrt{y^2 - x^2}}, & \text{falls} \quad |x| < y,\ 0 \le y < 1, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante $c > 0$.

b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.

c) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

Lösung:
Zu a)
Es bezeichne

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y,\ 0 \le y < 1\}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_D f(x,y)\,d(x,y) &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-y}^{y} c \cdot \frac{2 \cdot y}{\sqrt{y^2 - x^2}}\,dx \right) dy = c \cdot \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{2 \cdot y}{\sqrt{1 - z^2}}\,dz \right) dy \\ &= c \cdot \left(\int\limits_0^1 2 \cdot y\,dy \right) \cdot \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}\,dz \right) = c \cdot \pi\,.\end{aligned}$$

Folglich muss $c = \frac{1}{\pi}$ gesetzt werden.

Zu b)

Es gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-y}^{y} \frac{2 \cdot y}{\sqrt{y^2 - x^2}}\,dx = 2 \cdot y, \quad 0 \le y < 1\,,$$

und folglich ist

$$f_1(y) = 2 \cdot y \cdot 1_{\{0<y<1\}}, \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

eine Randdichte von Y. Weiter gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{|x|}^{1} \frac{2 \cdot y}{\sqrt{y^2 - x^2}}\,dy = \left[\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{y^2 - x^2} \right]_{|x|}^{1} = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1 - x^2}\,,$$

und folglich ist

$$f_2(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot 1_{\{-1<x<1\}}, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

eine Randdichte von X.

Zu c)

Es gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int\limits_{-1}^{1} \frac{2 \cdot x}{\pi} \cdot \sqrt{1 - x^2}\,dx = 0\,,$$

da der Integrand punktsymmetrisch ist. Weiter gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-y}^{y} \frac{2 \cdot x \cdot y^2}{\pi \cdot \sqrt{y^2 - x^2}}\,dx \right) dy = 0\,,$$

da der innere Intergrand punktsymmetrisch in x ist. Es folgt

$$C(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot E[Y] = 0\,.$$