Bericht zur Mathematischen Eingangsprüfung der DAV im Oktober 2003

Martin Folkers und *Günter Last* (Karlsruhe)

1. Aufgabe (13 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die drei folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

$$\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_3 := \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$.

c) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

vom Nullpunkt $O(0|0|0)$.

d) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g_3, welche durch den Nullpunkt verläuft und senkrecht auf der Geraden g_1 sowie auf der Geraden

$$g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R},$$

steht.

e) Vorgegeben seien die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

$$M_1 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y \textbf{ oder } y = z \},$$

$$M_2 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y \textbf{ und } y = z \}.$$

Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und tragen Sie jeweils die richtigen Dimensionszahlen ein. Für jede richtige Antwort erhalten Sie (+1) Punkt, für jede falsche Antwort erhalten Sie (−1) Punkt. Eine negative Gesamtpunktzahl wird in diesem Aufgabenteil nicht vergeben. **Begründungen sind nicht verlangt**.

(a) M_1 ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

wahr	falsch
	×

dim(span(M_1)) =	3

(b) M_2 ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

wahr	falsch
×	

dim(span(M_2)) =	1

Lösung:

Zu a)

Spaltenweises Anwenden des Gaußschen Algorithmus liefert

$$\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix})$$
$$= \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = \mathbb{R}^3.$$

Zu b)

Es gilt

$$\cos(\varphi) = \frac{< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2} = \tfrac{1}{2}$$

also

$$\varphi = \tfrac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Zu c)

Man macht den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{w} \qquad \text{mit} \qquad < \vec{w}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} >= 0.$$

Skalare Multiplikation mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ liefert

$$11 + \lambda \cdot 33 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\tfrac{1}{3},$$

also

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix},$$

und es folgt

$$d(g_1, O) = \|\vec{w}\|_2 = \tfrac{1}{3} \cdot \sqrt{16 + 64 + 4} = \tfrac{2}{3}\sqrt{21}.$$

Zu d)

Es bezeichne

$$U := \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Jeder Vektor aus $U^\perp$ muss das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -18 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist x_3 ein freier Parameter, und es folgt

$$U^\perp = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Damit lautet die gesuchte Gerade

$$g_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \rho \in \mathbb{R}.$$

2. Aufgabe (11 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ wird durch die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Parallelflach (Parallelotop) M aufgespannt.

a) Berechnen Sie das Volumen $|M|$ von M.

b) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; \varphi(\vec{x}) = A \cdot \vec{x},$$

die das Parallelflach (Parallelotop) M auf den Einheitswürfel abbildet, und geben Sie die Abbildungsmatrix A an.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_M (x_2 + x_3) \; d(x_1, x_2, x_3).$$

Lösung:

Zu a)

Mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt

$$|M| = |\det(T)| = 3.$$

Zu b)

Wegen

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 3 \neq 0$$

bilden die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Folglich gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}),$$

mit

$$\varphi(\vec{a}) = \vec{e}_1,\ \varphi(\vec{b}) = \vec{e}_2,\ \varphi(\vec{c}) = \vec{e}_3,$$

dabei bezeichne $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Um eine Matrizendarstellung der Abbildung φ zu erhalten, müssen die Vektoren der Standardbasis in der Basis $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ausgedrückt werden. Es gilt

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -\frac{2}{3} \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

also lautet die Matrizendarstellung von φ

$$\varphi(\vec{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 & -\frac{2}{3} \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \vec{x},\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Zu c)
Mit der Substitution

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x}$$

ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 2 \cdot y_3 \\ 2 \cdot y_1 + y_2 + 4 \cdot y_3 \\ 3 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_M (x_2 + x_3)\, d(x_1, x_2, x_3) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2 \cdot y_1 + y_2 + 4 \cdot y_3 + 3 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3) \cdot 3\, d(y_1, y_2, y_3) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (6 \cdot y_1 + 12 \cdot y_2 + 21 \cdot y_3)\, d(y_1, y_2, y_3) = \frac{39}{2}. \end{aligned}$$

3. Aufgabe (11 Punkte)

Zu jedem $t > 0$ seien vorgegeben die Funktion

$$f_t : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_t(x) := \frac{1}{4} \cdot x + \frac{t}{4 \cdot (x+1)}$$

und der zugehörige Graph

$$G_t := \{(x, f_t(x)) : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t > 0$ alle Punkte $(x, y) \in G_t$ mit waagerechter Tangente.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t > 0$ alle lokalen Extrema der Funktion f_t.

c) Die Graphen der Funktionen $f_8,\ f_4$ und die beiden Geraden $x = u,\ x = 2 \cdot u,\ u > 0$, schließen eine Fläche $F(u)$ ein. Berechnen Sie $F(u)$ und $\lim\limits_{u\to\infty} F(u)$.

d) Es sei speziell $t = 1$.

  (a) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(x; f_1, 0)$ der Funktion f_1 mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
  (b) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich K der Taylorreihe $T(x; f_1, 0)$.
  (c) Wird die Funktion f_1 innerhalb des Konvergenzbereiches K durch die Taylorreihe $T(x; f_1, 0)$ dargestellt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Zu a)

Es gilt

$$f_t'(x) = \frac{1}{4} - \frac{t}{4} \cdot (x+1)^{-2},\ x \neq -1,$$

also

$$f_t'(x) = \frac{1}{4} - \frac{t}{4} \cdot (x+1)^{-2} \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{t}.$$

Damit lauten die Punkte mit waagerechter Tangente

$$(x_1, y_1) = (-1 + \sqrt{t},\ -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{t})$$

und

$$(x_2, y_2) = (-1 - \sqrt{t},\ -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{t}).$$

Zu b)

Es gilt

$$f_t''(x) = \frac{t}{2} \cdot (x+1)^{-3}$$

und

$$f_t''(x_1) = f_t''(-1 + \sqrt{t}) = \frac{t}{2} \cdot t^{-\frac{3}{2}} > 0,$$
$$f_t''(x_2) = f_t''(-1 - \sqrt{t}) = -\frac{t}{2} \cdot t^{-\frac{3}{2}} < 0,$$

also besitzt die Funktion f im Punkt $x_1 = -1 + \sqrt{t}$ ein lokales Minimum und im Punkt $x_2 = -1 - \sqrt{t}$ ein lokales Maximum.

Zu c)

Für $u > 0$ gilt

$$F(u) = \int\limits_u^{2\cdot u} (f_8(x) - f_4(x))\, dx = \int\limits_u^{2\cdot u} \tfrac{1}{x+1}\, dx = \log(2 \cdot u + 1) - \log(u+1) = \log(\tfrac{2\cdot u+1}{u+1})$$

und

$$\lim_{u\to\infty} F(u) = \lim_{u\to\infty} \log(\tfrac{2\cdot u+1}{u+1}) = \log(2).$$

Zu d)

Für $x \in (-1, +1)$ gilt

$$f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k = T(x; f_1, 0).$$

Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Der Konvergenzbereich der Reihe lautet daher

$$K = (-1, +1).$$

Die Funktion f_1 besitzt auf der Menge K eine Potenzreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, diese stimmt mit der Taylorreihe von f_1 mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ überein.

4. Aufgabe (11 Punkte)

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei vorgegeben die Funktion

$$f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f_n(x, y) := x^2 \cdot y + (y-1)^{n+2}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ die stationären Punkte der Funktion f_n.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ alle lokalen Extremstellen (Maxima/Minima) der Funktion f_n (**Vollständige Begründungen erforderlich!**).

Lösung:

Zu a)

Es gilt

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x, y) = 2 \cdot x \cdot y \text{ und } \frac{\partial f_n}{\partial y}(x, y) = x^2 + (n+2) \cdot (y-1)^{n+1}.$$

Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial x}(x, y) &= 2 \cdot x \cdot y \stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\partial f_n}{\partial y}(x, y) &= x^2 + (n+2) \cdot (y-1)^{n+1} \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

1. Fall: $x = 0$, es ergibt sich der stationäre Punkt

$$(x_0, y_0) = (0, 1).$$

2. Fall: $y = 0$, Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$x^2 + (n+2) \cdot (-1)^{n+1} = 0 \iff x^2 = (n+2) \cdot (-1)^{n+2}.$$

Fall 2.1.: $n \equiv 0 \pmod 2$,

$$x^2 = n+2, \text{ also } x_1 = +\sqrt{n+2} \text{ und } x_2 = -\sqrt{n+2},$$

es ergeben sich also die stationären Punkte

$$(x_1, y_1) = (+\sqrt{n+2}, 0) \text{ und } (x_2, y_2) = (-\sqrt{n+2}, 0).$$

Fall 2.2.: $n \equiv 1 \pmod 2$,
in diesem Fall ergeben sich keine weiteren stationären Punkte.

Zu b)

Die zweiten partiellen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial^2 f_n}{(\partial x)^2}(x, y) = 2 \cdot y,\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 \cdot x,\ \frac{\partial^2 f_n}{(\partial y)^2}(x, y) = (n+2) \cdot (n+1) \cdot (y-1)^n.$$

Damit ergibt sich für die Hessematrix von f im Punkt (x_1, y_1)

$$H(f_n, (x_1, y_1)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \cdot \sqrt{n+2} \\ 2 \cdot \sqrt{n+2} & (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \end{pmatrix}.$$

$H(f_n, (x_1, y_1))$ ist indefinit, also liegt im Punkt (x_1, y_1) keine lokale Extremstelle von f_n vor.

Für die Hessematrix von f im Punkt (x_2, y_2) erhält man

$$H(f_n, (x_2, y_2)) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \cdot \sqrt{n+2} \\ -2 \cdot \sqrt{n+2} & (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \end{pmatrix}.$$

$H(f_n, (x_2, y_2))$ ist indefinit, also liegt im Punkt (x_2, y_2) keine lokale Extremstelle von f_n vor.
Schließlich erhält man für die Hessematrix von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$

$$H(f_n, (0,1)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ und } \not> 0.$$

Damit läßt sich eine Entscheidung mit Hilfe der Hessematrix nicht finden.
1. Fall: $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2)$,

$$f_n(x, y) = x^2 \cdot y + (y-1)^{n+2} \geq 0 \text{ für alle } (x, y) \in U_\varepsilon(0, 1)$$

und

$$f_n(0, 1) = 0,$$

folglich besitzt die Funktion f_n für gerades $n \in \mathbb{N}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ein lokales Minimum.
2. Fall: $n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)$, es gilt

$$f_n(0, y) = (y-1)^{n+2},$$

und da mit n auch $n+2$ ungerade ist, besitzt die Funktion f_n in diesem Fall im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ kein lokales Extremum.

5. Aufgabe (12 Punkte)

Gegeben seien ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{2} < c < 1$ sowie die Zufallsvariablen X, Y mit Werten in $\{0, c, 2c\}$ bzw. $\{0, 1, 2\}$. Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ des Zufallsvektors (X, Y) an für die Werte

$$(i, j) \in \{(0, 2), (c, 0), (c, 1), (c, 2), (2c, 0), (2c, 1), (2c, 2)\}.$$

Y \ X	$i = 0$	$i = c$	$i = 2c$
$j = 0$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$j = 1$		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$j = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

a) Berechnen Sie die Randverteilung von X und den Erwartungswert $\mathbb{E}X$.

b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(Y > 1 | X > 0)$.

c) Sei $Z := \min\{X, Y\}$. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}Z$ und $\mathbb{E}Z^2$ sowie die Kovarianz $C(X, Z)$.

d) Sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Ergänzen Sie die Tabelle unter der Vorgabe, dass $\mathbb{E}Y = 1$ ist.

Lösung:

Zu a)

Es gilt

$$\mathbb{P}(X=c)=\frac{5}{12},\quad \mathbb{P}(X=2c)=\frac{1}{3},\quad \mathbb{P}(X=0)=1-\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

und

$$\mathbb{E}X=0\cdot\frac{1}{4}+c\cdot\frac{5}{12}+2c\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{12}\ c.$$

Zu b)

Es gilt

$$\mathbb{P}(Y>1|X>0)=\frac{\mathbb{P}(X>0,Y>1)}{\mathbb{P}(X>0)}=\frac{\mathbb{P}(X=c,Y=2)+\mathbb{P}(X=2c,Y=2)}{\mathbb{P}(X=c)+\mathbb{P}(X=2c)}$$
$$=\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}.$$

Zu c)

Es ist $Z\in\{0,c,1,2c\}$ und

$$\mathbb{P}(Z=c)=\mathbb{P}(X=c,Y=1)+\mathbb{P}(X=c,Y=2)\ =\ \tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{6}\ =\ \tfrac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(Z=1)=\mathbb{P}(X=2c,Y=1)\ =\ \tfrac{1}{6},$$
$$\mathbb{P}(Z=2c)=\mathbb{P}(X=2c,Y=2)\ =\ \tfrac{1}{12},$$
$$\mathbb{P}(Z=0)=1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{12}\ =\ \tfrac{1}{2}.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}Z=0\cdot\tfrac{1}{2}+c\cdot\tfrac{1}{4}+1\cdot\tfrac{1}{6}+2c\cdot\tfrac{1}{12}\ =\ \tfrac{5c+2}{12},$$
$$\mathbb{E}Z^2=c^2\cdot\tfrac{1}{4}+1\cdot\tfrac{1}{6}+4c^2\cdot\tfrac{1}{12}\ =\ \tfrac{7c^2+2}{12}$$

und

$$\mathbb{E}[XZ]=\textstyle\sum_{i=0,c,2c}\sum_{j=0,c,1,2c} i\cdot j\ \mathbb{P}(X=i,Z=j)$$
$$=c^2\ \mathbb{P}(X=c,Z=c)+c\ \mathbb{P}(X=c,Z=1)+2c^2\ \mathbb{P}(X=c,Z=2c)$$
$$+2c^2\ \mathbb{P}(X=2c,Z=c)+2c\ \mathbb{P}(X=2c,Z=1)+4c^2\ \mathbb{P}(X=2c,Z=2c)$$
$$=c^2\ \mathbb{P}(Z=c)+2c\ \mathbb{P}(Z=1)+4c^2\ \mathbb{P}(Z=2c)=\tfrac{7c^2+4c}{12}$$

sowie

$$C(X,Z)=\mathbb{E}[XZ]-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Z=\tfrac{7c^2+4c}{12}-\tfrac{13c}{12}\cdot\tfrac{5c+2}{12}=\tfrac{19c^2+22c}{144}.$$

Zu d)

Es gilt

$$1=\mathbb{E}Y=0\cdot\mathbb{P}(Y=0)+1\cdot\mathbb{P}(Y=1)+2\cdot\mathbb{P}(Y=2)$$

also

$$\mathbb{P}(Y=1)=1-2\mathbb{P}(Y=2)\ =\ 1-2\cdot\frac{1}{3}\ =\ \frac{1}{3}.$$

Somit erhalten wir

$$\mathbb{P}(X=0,Y=1)=\mathbb{P}(Y=1)-\mathbb{P}(X=c,Y=1)-\mathbb{P}(X=2c,Y=1)$$
$$=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{6}\ =\ \tfrac{1}{12}$$

und

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0)\ =\ \frac{1}{12}.$$

6. Aufgabe (10 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, seien stochastisch unabhängig mit gleicher Dichte

$$f_\vartheta(x) \;=\; \frac{1}{\vartheta^2} \cdot x \cdot e^{-x/\vartheta}, \qquad x > 0,$$

wobei $\vartheta > 0$ ein unbekannter Parameter ist.

a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}_\vartheta X_1$ und $\mathbb{E}_\vartheta X_1^2$.

b) Zeigen Sie: $\hat{\vartheta}_n(x_1, \ldots, x_n) := \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$ ist ein Maximum-Likelihood-Schätzwert für ϑ bei gegebenen Daten $x_1, \ldots, x_n > 0$.

c) Zeigen Sie: $\hat{\vartheta}_n$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ.

d) Bestimmen Sie die Varianz $V_\vartheta(\hat{\vartheta}_n)$ des Maximum-Likelihood-Schätzers. Ist die Schätzfolge $(\hat{\vartheta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konsistent für ϑ?

Lösung:

Zu a)

1. Lösungsweg: $\Gamma(\alpha, \beta)$ hat den Erwartungswert α/β und die Varianz α/β^2, also hier mit $\alpha = 2$ und $\beta = 1/\vartheta$

$$\mathbb{E}_\vartheta X_1 \;=\; 2\vartheta, \quad V_\vartheta(X_1) \;=\; 2\vartheta^2.$$

2. Lösungsweg: Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta X_1 &= \int_0^\infty x \cdot f_\vartheta(x) dx \;=\; \frac{1}{\vartheta^2} \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x/\vartheta} dx \\
&= \frac{1}{\vartheta^2} \left[0 + 2\vartheta \int_0^\infty x \cdot e^{-x/\vartheta} dx \right] \;=\; \frac{2}{\vartheta} \left[0 + \vartheta \int_0^\infty e^{-x/\vartheta} dx \right] = 2\vartheta, \\
\mathbb{E}_\vartheta X_1^2 &= \frac{1}{\vartheta^2} \int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x/\vartheta} dx \\
&= \frac{1}{\vartheta^2} \left[0 + 3\vartheta \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x/\vartheta} dx \right] \\
&= \frac{3}{\vartheta} \cdot 2\vartheta^3 \;=\; 6\vartheta^2.
\end{aligned}$$

Zu b)

Wir erhalten wegen der stochastischen Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_n$ die zu maximierende Log-Likelihood-Funktion

$$\begin{aligned}
\log L_x(\vartheta) &= \log \prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i) \\
&= -2n \log \vartheta + \sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{1}{\vartheta} \sum_{i=1}^n x_i
\end{aligned}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ aus dem Stichprobenraum $(0, \infty)^n$. Für die Ableitung erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\vartheta} \log L_x(\vartheta) &= -\frac{2n}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{i=1}^n x_i \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0 \\
&\iff \vartheta \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i.
\end{aligned}$$

Somit ist $\hat{\vartheta}_n(x) := \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$ Stelle eines absoluten Maximums von $L_x(\vartheta)$, und $\hat{\vartheta}_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$ ist ein Maximum-Likelihood-Schätzer von ϑ.
Alternativ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \log L_x(\hat{\vartheta}_n) &= \frac{2n}{\hat{\vartheta}_n^2} - \frac{2}{\hat{\vartheta}_n^3} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \frac{1}{\hat{\vartheta}_n^3} \left(2n\hat{\vartheta}_n - 2 \sum_{i=1}^n x_i \right) \\ &= \frac{1}{\hat{\vartheta}_n^3} \left(\sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i \right) < 0. \end{aligned}$$

Für $\vartheta \to 0$ und $\vartheta \to \infty$ gilt $\log L_x(\vartheta) \to -\infty$.
Zu c)
Wegen a) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\vartheta \hat{\vartheta}_n &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} X_i \\ &= \frac{1}{2n}\, n\, 2\vartheta = \vartheta. \end{aligned}$$

Somit ist $\hat{\vartheta}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ.
Zu d)
Wegen der Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_n$ und

$$V_\vartheta(X_1) = \mathbb{E}_\vartheta X_1^2 - (\mathbb{E}_\vartheta X_1)^2 = 2\vartheta^2$$

gilt

$$\begin{aligned} V_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) &= V_\vartheta \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{4n^2} V_\vartheta \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{4n^2} \sum_{i=1}^n V_\vartheta(X_i) = \frac{1}{4n^2}\, n\, 2\vartheta^2 = \frac{\vartheta}{2n}. \end{aligned}$$

Ferner gilt wegen der Erwartungstreue von $\hat{\vartheta}_n$ und der Tschebyschev-Ungleichung für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\hat{\vartheta}_n - \vartheta| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(|\hat{\vartheta}_n - E_\vartheta \hat{\vartheta}_n| \geq \varepsilon) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} V_\varepsilon(\hat{\vartheta}_n) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\vartheta}{2n} \to 0 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Somit ist die Schätzfolge $(\hat{\vartheta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konsistent für ϑ.