DAV - Prüfung 8. November 2008

Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik

Bitte geben Sie die Klausuraufgaben mit Ihren Lösungen zurück!

Aufgabe 1

Wir betrachten einen Aktiven des Alters $x < z$ mit z: Pensionsalter und $n = z - x$. Er besitzt eine Anwartschaft auf eine ab Alter z beginnende jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente R, falls er, sei es als Aktiver, sei es als Invalider, die Altersgrenze erreicht.

Seien

M: Anzahl der vollendeten Jahre bis Eintritt der Invalidität;
N: Anzahl der vollendeten Jahre bis Eintritt des Todes.

1. Beschreiben Sie die Zusage auf folgenden Mengen:

$$\{M \leq N < n\}$$
$$\{M < n \leq N\}$$
$$\{N \leq M < n\}$$
$$\{N < n \leq M\}$$
$$\{n \leq N \leq M\}$$
$$\{n \leq M \leq N\}$$

   Welche Rolle spielt M bei dieser Zusage?

2. Zeigen Sie, dass

$$B_1 = R\, v^n\, \mathrm{a}_{\overline{N-n+1|}}$$

   der Erfüllungsbetrag der Zusage ist (Übliche Konvention: $\mathrm{a}_{\overline{k|}} := 0 \quad \text{f. } k \leq 0$).

3. Drücken Sie ${}_n\check{p}_x^g := P\{N \geq n\}$ in Worten aus und begründen Sie, dass auf der Basis der Richttafeln für $x > 20$ gilt:

$${}_n\check{p}_x^g \neq {}_np_x^g$$

   Setzen Sie im Folgenden ${}_n\check{p}_x^g$ als bekannt voraus.

4. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}B_1$ und leiten Sie daraus die versicherungsmathematische Notation von $\mathcal{E}B_1$ ab.

5. Wie lautet die Zusage zu dem folgenden Erfüllungsbetrag?

$$B_2 = R_1\, v^n\; \mathrm{a}_{\overline{N-n+1}|}\; 1_{\{M \geq n\}} + R_2\, v^n\; \mathrm{a}_{\overline{N-n+1}|}\; 1_{\{M < n\}}, \quad R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$$

6. Beschreiben Sie diese Zusage auf den in Teilaufgabe 1 definierten Mengen.

7. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}B_2$ und leiten Sie daraus die versicherungsmathematische Notation von $\mathcal{E}B_2$ ab.

Aufgabe 2

Ein Unternehmen gewährt einem Mitarbeiter mit Eintrittsalter x eine Pensionszusage mit folgenden Leistungen:

- Eine Rente in Höhe von jährlich vorschüssig R ab Erreichen der Altersgrenze z;
- Nach Ablauf einer Wartezeit von k Jahren mit $0 < k < z - x$ bei vorzeitiger Invalidität eine jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente, deren Höhe sich aus der Verrentung des am Beginn des Jahres des Eintritts der Invalidität erreichten Teilwerts ergibt, wobei die Verrentung zum Ende dieses Jahres stattfindet (die erste Jahresrente wird also zum Ende des Jahres des Eintritts der Invalidität gezahlt).

1. Geben Sie explizit das versicherungsmathematische Bilanzgleichungssystem für diese Zusage in der Form

$$PV = L^{'} + FV$$

an (Hinweis: Kapitel 2, Abschnitt 4.3 des Ihnen vorliegenden Buches „Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen"). Geben Sie explizit die Größen $P, L^{'}$ und F an.

2. Geben Sie für dieses Gleichungssystem die Lösung V an, indem Sie das Gleichungssystem

$$P^{'}V = L^{'}$$

mit

$$P^{'} = P - F$$

wie in Kapitel 2, Abschnitt 4.2 des Ihnen vorliegenden Buches „Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen" beschrieben lösen (Hinweis: Geben Sie die Lösungen komponenetenweise an. Rekursionsformeln genügen!).

3. Da sich herausstellt, dass bei dieser Zusage die Invaliditätsleistungen in der Anfangszeit der Zusage sehr gering sind, wird eine „Zurechnungszeit“ derart in die Zusage eingebaut, dass bei Invalidität mindestens der Teilwert nach m Jahren mit $z - x > m > k$ gewährt wird. Stellen Sie für diese Zusage das versicherungsmathematische Bilanzgleichungssystem auf und geben Sie auch hier explizit die Größen $P, L^{'}$ und F an.

4. Geben Sie auch für dieses Gleichungssystem die Lösung V an, indem Sie das Gleichungssystem

$$P^{'}V = L^{'}$$

mit

$$P^{'} = P - F$$

ähnlich wie in Teilaufgabe 2 explizit lösen.

5. Zeigen Sie, wie bei beiden Zusagen der Teilwert zu berechnen ist, wenn der Berechtigte mit unverfallbarem Anspruch aus dem Unternehmen ausgeschieden ist.

1.

$\{M \leq N < n\}$	:	Berechtigter wird Invalide und stirbt vor Erreichen des Pensionsalters: Es wird keine Rente fällig.
$\{M < n \leq N\}$	:	Berechtigter wird vor Erreichen des Pensionsalters Invalide und stirbt nach Erreichen der Altersgrenze: Es wird eine Altersrente von jährlich R ab Pensionsalter fällig.
$\{N \leq M < n\}$	:	Aktiven Tod: Es wird keine Rente fällig.
$\{N < n \leq M\}$	:	Aktiven Tod: Es wird keine Rente fällig.
$\{n \leq N \leq M\}$	:	Berechtigter erreicht die Altersgrenze als Aktiver: Es wird eine Altersrente von jährlich R ab Pensionsalter fällig.
$\{n \leq M \leq N\}$	:	Berechtigter erreicht die Altersgrenze als Aktiver: Es wird eine Altersrente von jährlich R ab Pensionsalter fällig.

$\Longrightarrow$

Keine Rente auf $\{M \leq N < n\} \cup \{N \leq M < n\} \cup \{N < n \leq M\} = \{N < n\}$

Rente auf $\{M < n \leq N\} \cup \{n \leq N \leq M\} \cup \{n \leq M \leq N\} = \{N \geq n\}$

Bei dieser Zusage spielt also M keine Rolle.

2. Da die Realisierungen von N durch $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben sind, sind durch $Rv^n \, \mathrm{a}_{\overline{k-n+1}|}$, $k \in \mathbb{N}_0$, die Realisierungen von $B_1 = Rv^n \, \mathrm{a}_{\overline{N-n+1}|}$ gegeben. Auf $\{N < n\}$ sind sie daher 0. Auf $\{N \geq n\}$, falls also $k \geq n$, stellt $\mathrm{a}_{\overline{k-n+1}|}$ den finanzmathematischen Barwert einer jährlich vorschüssig $n+1$-mal zahlbaren Zeitrente von jährlich Betrag 1 dar, mithin $Rv^n \, \mathrm{a}_{\overline{k-n+1}|}$ den finanzmathematischen Barwert einer um n Jahre aufgeschobenen jährlich $n+1$-mal jährlich vorschüssig zahlbaren Zeitrente dar, also die Realisierungen einer Anwartschaft auf eine ab Alter $z = x+n$ beginnend jährlich im voraus zahlbaren Leibrente R.

3. Es gilt:

${}_n\check{p}_x^g$	:	Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, die Altersgrenze z zu erreichen, sei es, als Aktiver, sei es als Invalide.
${}_np_x^g$	:	Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person des Gesamtbestandes, die Altersgrenze z zu erreichen.

Da sich der Gesamtbestand aus Aktiven und Invaliden zusammensetzt und auf der Basis der Richttafeln die Sterblichkeit des Invalidenbestandes über der Sterblichkeit des Aktivenbestandes liegt, folgt, dass der Gesamtbestand, der sich aus 20-jährigen Aktiven entwickelt (Gesamtbestand der Richttafeln), eine höhere Sterblichkeit aufweist als der "Gesamtbestand", der sich aus Aktiven des Alters $x > 20$ entwickelt.

Mithin gilt sogar:

$$ {}_n\check{p}_x^g > {}_np_x^g $$

4.

$$ B_1 = Rv^n \sum_{k=0}^{N-n} v^k = Rv^n \sum_{k\geq 0} v^k \, 1_{\{N-n\geq k\}} = Rv^n \sum_{k\geq 0} v^k \, 1_{\{N\geq n+k\}} $$

$\Longrightarrow$

$$ \begin{aligned} \mathcal{E}B_1 &= Rv^n \sum_{k\geq 0} v^k \, P\{N \geq n+k\} = Rv^n \, P\{N \geq n\} \sum_{k\geq 0} v^k \, \underbrace{P\{N \geq n+k \,|\, N \geq n\}}_{{}_kp_z^r} \\ &= Rv^n \, {}_n\check{p}_x^g \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_z^r \\ &= Rv^n \, {}_n\check{p}_x^g \, \mathrm{a}_z^r \end{aligned} $$

5. Anwartschaft auf eine ab Alter z beginnende jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente. Erreicht er die Altersgrenze als Aktiver, so wird eine Altersrente von R_1 fällig, erreicht er die Altersgrenze als Invalide, so wird eine Altersrente von R_2 fällig.

6.

$\{M \leq N < n\}$	:	Berechtigter wird Invalide und stirbt vor Erreichen des Pensionsalters: Es wird keine Rente fällig.
$\{M < n \leq N\}$	:	Berechtigter wird vor Erreichen der Altersgrenze Invalide und stirbt nach Erreichen der Altersgrenze: Es wird eine Altersrente von jährlich R_2 ab Pensionsalter fällig.
$\{N \leq M < n\}$	:	Aktiven Tod: Es wird keine Rente fällig.
$\{N < n \leq M\}$	:	Aktiven Tod: Es wird keine Rente fällig.
$\{n \leq N \leq M\}$	:	Berechtigter erreicht die Altersgrenze als Aktiver: Es wird eine Altersrente von jährlich R_1 ab Pensionsalter fällig.
$\{n \leq M \leq N\}$	:	Berechtigter erreicht die Altersgrenze als Aktiver: Es wird eine Altersrente von jährlich R_1 ab Pensionsalter fällig.

7.

$$\mathcal{E}B_2 = \overbrace{R_1\, v^n\, \mathcal{E}[\mathrm{a}_{\overline{N-n+1}|}\; 1_{\{M\geq n\}}]}^{b_1} + \overbrace{R_2\, v^n\, \mathcal{E}[\mathrm{a}_{\overline{N-n+1}|}\; 1_{\{M<n\}}]}^{b_2}$$

$$\begin{aligned}
\text{NR.: } v^n\, \mathrm{a}_{\overline{N-n+1}|}\; 1_{\{M\geq n\}} &= v^n \sum_{k=0}^{N-n} v^k\; 1_{\{N\geq n\}}\; 1_{\{M\geq n\}} = \sum_{k=n}^{N} v^k\; 1_{\{N\geq n\}}\; 1_{\{M\geq n\}} \\
&= \sum_{k\geq n} v^k\; 1_{\{k\leq N\}}\; 1_{\{N\geq n\}}\; 1_{\{M\geq n\}} \\
&= \sum_{k\geq n} v^k\; 1_{\{N\geq k\}}\; 1_{\{M\geq n\}}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
b_1 &= R_1\, \mathcal{E} \sum_{k\geq n} v^k\; 1_{\{N\geq n,\, M\geq n\}} \\
&= R_1 \sum_{k\geq n} v^k \underbrace{P\{N\geq k, M\geq n\}}_{P\{N\geq k\,|\, M\geq n\}\, P\{M\geq n\}} \\
&= R_1\, P\{M\geq n\} \sum_{k\geq n} v^k \underbrace{P\{N\geq k,\, |\, M\geq n\}}_{P\{N\geq k, N\geq n\,|\, M\geq n\}} \\
&= R_1\, P\{M\geq n\}\, P\{N\geq n\,|\, M\geq n\} \sum_{k\geq n} v^k \underbrace{P\{N\geq k,\, |\, N\geq n, M\geq n\}}_{P\{N-n\geq k-n\,|\, N\geq n, M\geq n\}} \\
&= R_1 \underbrace{\underbrace{P\{M\geq n\}\, P\{N\geq n|M\geq n\}}_{P\{N\geq n, M\geq n\}}}_{{}_np_x^a}\; v^n \sum_{k\geq 0} v^k \underbrace{P\{N-n\geq k\,|\, N\geq n, M\geq n\}}_{{}_kp_z^r} \\
&= R_1\, v^n\, {}_np_x^a \sum_{k\geq 0} v^k\, {}_kp_z^r \\
&= R_1\, v^n\, {}_np_x^a\; \mathrm{a}_z^r \;=\; R_1\; \mathrm{a}_x^{aA}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 = R_2\, v^n\, \mathcal{E}\, [\, \mathrm{a}_{\overline{N-n+1}|}\; \underbrace{1_{\{M<n\}}}_{=1-1_{\{M\geq n\}}}\,] &= R_2\, v^n\, \mathcal{E}\, [\mathrm{a}_{\overline{N-n+1}|}] - R_2\, v^n\, \mathcal{E}\, [\mathrm{a}_{\overline{N-n+1}|}\, 1_{\{M\geq n\}}] \\
&= R_2\, v^n\, {}_n\check{p}_x^g\; \mathrm{a}_z^r \;-\; R_2\, v^n\, {}_np_x^a\, \mathrm{a}_z^r \\
&= R_2\, v^n\, \left({}_n\check{p}_x^g -\; {}_np_x^a\right)\; \mathrm{a}_z^r
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}B_2 &= R_1\, v^n\, {}_np_x^a\; \mathrm{a}_z^r \;+\; R_2\, v^n\, \left({}_n\check{p}_x^g -\; {}_np_x^a\right)\; \mathrm{a}_z^r \\
&= v^n[R_2\; {}_n\check{p}_x^g - \;+ (R_1 - R_2)\, {}_np_x^a]\, \mathrm{a}_z^r
\end{aligned}$$

1. Leistungsvektor $L = L^{'} + F\,V$ (mit $n = z - x$):

$$\begin{aligned} {}_jL_x &= 0 \quad \text{f.} \quad j < k \\ &= v\,p^{ai}_{x+j}\ {}_jV_x \quad \text{f.} \quad k \le j < n^1 \\ &= R\,\mathrm{a}^r_z \quad \text{f.} \quad j = n \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} {}_jL^{'}_x &= 0 \quad \text{f.} \quad j < n \\ &= R\,\mathrm{a}^r_z \quad \text{f.} \quad j = n \end{aligned}$$

Versicherungsmathematisches Bilanzgleichungssystem: $P\,V = L^{'} + F\,V$, in Komponenten:

$$\begin{aligned} {}_jV_x + {}_jf_x\,P_x &= v\,p^{a}_{x+j}\ {}_{j+1}V_x \quad \text{f.} \quad j < k \\ &= v\,p^{ai}_{x+j}\ {}_jV_x + v\,p^{a}_{x+j}\ {}_{j+1}V_x \quad \text{f.} \quad k \le j < n \\ &= R\,\mathrm{a}^r_z \quad \text{f.} \quad j = n \end{aligned}$$

mit:

$$L^{'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ R\mathrm{a}^r_z \end{pmatrix}$$

$$FV = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p^{ai}_{x+k}\ {}_kV_x \\ \vdots \\ p^{ai}_{x+j}\ {}_jV_x \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & vp^{ai}_{x+k} & & \mathbf{0} & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & vp^{ai}_{x+j} & & \\ & & & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & vp^{ai}_{x+n-1} & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{pmatrix} P_x \\ {}_1V_x \\ \vdots \\ {}_kV_x \\ \vdots \\ jV_x \\ \vdots \\ {}_nV_x \end{pmatrix}}_{V}$$

[1]Es wird auch $v\,i_{x+j}\ {}_jV_x$ voll anerkannt! Die Näherung für p^{ai}_x lautet nach den Richttafeln: $p^{ai}_x = i_x\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+\frac{1}{2}}$

$$
P \quad = \quad \begin{pmatrix}
{}_0f_x & -vp_x^a & & & & & & & \\
\cdot & 1 & \cdot & & & & & & \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & & & & \\
\cdot & & & \cdot & \cdot & & \text{\Large 0} & & \\
{}_jf_x & & & & 1 & -vp_{x+j}^a & & & \\
\cdot & & & & & \cdot & & & \\
\cdot & & & & & & \cdot & \cdot & \\
\cdot & & \text{\Large 0} & & & & & \cdot & -vp_{x+n-1}^a \\
{}_nf_x & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{mit} \quad {}_jf_x \quad &= \quad 1 \quad \text{f.} \quad j < n \\
&= \quad 0 \quad \text{f.} \quad j = n
\end{aligned}
$$

2.

$$
P^{'} \quad = \quad P - F = \begin{pmatrix}
{}_0f_x & -vp_x^a & & & & & & \\
\cdot & 1 & \cdot & & & & & \\
\cdot & & 1 & \cdot & & & \text{\Large 0} & \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & & & 1 - vp_{x+k}^{ai} & -vp_{x+k}^a & & \cdot & \\
\cdot & & & & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \text{\Large 0} & & 1 - vp_{x+j}^{ai} & -vp_{x+j}^a & & \\
\cdot & & & & & \cdot & \cdot & \\
\cdot & & & & & & 1 - vp_{x+n-1}^{ai} & -vp_{x+n-1}^a \\
{}_nf_x & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
P_0^{'} \quad = \quad \begin{pmatrix}
1 & -vp_x^a & & & & & & \\
0 & 1 & \cdot & & & & & \\
\cdot & & 1 - vp_{x+k}^{ai} & -vp_{x+k}^a & & \text{\Large 0} & & \\
\cdot & & & & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & 1 - vp_{x+j}^{ai} & -vp_{x+j}^a & & \\
\cdot & & \text{\Large 0} & & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & & & & & & 1 - vp_{x+n-1}^{ai} & -vp_{x+n-1}^a \\
0 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$P_0^{'}B^{'} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -vp_x^a & & & & & \\ & 1 & \cdot & & 0 & & \\ & & 1-vp_{x+k}^{ai} & -vp_{x+k}^a & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & 1-vp_{x+j}^{ai} & -vp_{x+j}^a & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & 0 & & & 1-p_{x+n-1}^{ai} & -vp_{x+n-1}^a & \\ & & & & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_0B_x^{'} \\ \vdots \\ {}_kB_x^{'} \\ \vdots \\ {}_jB_x^{'} \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} {}_0L_x^{'} \\ \vdots \\ {}_kL_x^{'} \\ \vdots \\ {}_jL_x^{'} \\ \vdots \\ {}_vL_x^{'} \end{pmatrix} = L^{'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ R\,\mathrm{a}_z^r \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} {}_nB_x^{'} &= {}_nL_x^{'} = R\,\mathrm{a}_z^r \quad \text{f.} \quad j = n \\ (1 - vp_{x+j}^{ai})\,{}_jB_x^{'} - vp_{x+j}^a\,{}_{j+1}B_x^{'} &= {}_jL_x^{'} = 0 \quad \text{f.} \quad k \le j < n \qquad (*) \\ {}_jB_x^{'} - vp_{x+j}^a\,{}_{j+1}B_x^{'} &= {}_jL_x^{'} = 0 \quad \text{f.} \quad 0 \le j < k \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} {}_jB_x^{'} &= {}_nL_x^{'} = R\,\mathrm{a}_z^r & \text{f.} \quad j = n \\ &= \frac{vp_{x+j}^a\,{}_{j+1}B_x^{'}}{1 - vp_{x+j}^{ai}} & \text{f.} \quad k \le j < n \\ &= vp_{x+j}^a\,{}_{j+1}B_x & \text{f.} \quad 0 \le j < k \end{aligned}$$

Wg. $P_0^{'}\,\mathrm{a} = f$ (gleiche Koeffizientenmatrix wie $P_0^{'}B^{'}$) und $f \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{a}_x &= 0 \\ {}_j\mathrm{a}_x &= \frac{1 + vp_{x+j}^a\,{}_{j+1}\mathrm{a}_x}{1 - vp_{x+j}^{ai}} \quad \text{f.} \quad k \le j < n \qquad (**) \\ &= 1 + vp_{x+j}^a\,{}_{j+1}\mathrm{a}_x \quad \text{f.} \quad 0 \le j < k \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$A' = \begin{pmatrix} {}_0\mathrm{a}_x & & & & \\ {}_0\mathrm{a}_x & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \text{\Large 0} & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & \text{\Large 0} & & & \ddots \\ {}_n\mathrm{a}_x & & & & & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline & 1 & & & \\ \mathrm{a} & & \ddots & & \text{\Large 0} \\ & & & \ddots & \\ & & \text{\Large 0} & & 1 \end{array}\right)$$

mit $P_0^{'}\mathrm{a} = f$. Denn:

$$P_0^{'}A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & -vp_x^a & & & & & \\ \cdot & 1 & & \cdot & & \text{\Large 0} & \\ \cdot & & 1-vp_{x+k}^{ai} & -vp_{x+k}^{a} & & & \\ \cdot & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \text{\Large 0} & & & & 1-vp_{x+n-1}^{ai} & -vp_{x+n-1}^{a} \\ \cdot & & & & & & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|cccc} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline & 1 & & & \\ \mathrm{a} & & \ddots & & \text{\Large 0} \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|cccccc} & -vp_x^a & & & & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & & & \\ & & 1-vp_{x+k}^{ai} & -vp_{x+k}^{a} & & \text{\Large 0} & \\ f & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \text{\Large 0} & & & & 1-vp_{x+n-1}^{ai} & -vp_{x+n-1}^{a} \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) = P^{'}$$

Damit besteht die Lösung für Aufgabe 2.2:

1. $P_0^{'}B^{'} = L^{'}$ mit Rekursionsformeln (*) f. $B^{'}$;
2. $P_0^{'}\mathrm{a} = f$ mit Rekursionsformeln (**) für a; damit:

$$A^{'} = \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & & 0 \\ \hline & 1 & & \\ \mathrm{a} & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

3. V aus $AV = B'$; in Komponenten:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{{}_0B_x^{'}}{{}_0\mathrm{a}_x} \\ {}_jV_x &= {}_jB_x^{'} - \frac{{}_0B_x^{'}}{{}_0\mathrm{a}_x}\,{}_j\mathrm{a}_x \quad j = 0, 1, ..., n \end{aligned}$$

3. F stellt sich im Unterschied zu 1 wie folgt dar:

$$FV = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ vp^{ai}_{x+k}\ {}_mV_x \\ \vdots \\ vp^{ai}_{x+m}\ {}_mV_x \\ vp^{ai}_{x+m+1}\ {}_{m+1}V_x \\ \vdots \\ vp^{ai}_{x+n-1}\ {}_{n-1}V_x \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ & & 0 & & & 0 & & & \\ & & & 0 & & vp^{ai}_{x+k} & & & \\ & & & & 0 & \vdots & & & \\ & & & & & vp^{ai}_{x+m} & & & \\ & & & & & 0 & vp^{ai}_{x+m+1} & & \\ & & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & \mathbf{0} & & & \vdots & & & vp^{ai}_{x+n-1} \\ & & & & & 0 & & & & 0 \end{pmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{pmatrix} P_x \\ {}_1V_x \\ \vdots \\ {}_kV_x \\ \vdots \\ {}_mV_x \\ \vdots \\ {}_nV_x \end{pmatrix}}_{V}$$

P und $L^{'}$ sind im Vergleich zu 1 unverändert. Versicherungstechnisches Bilanzgleichungssystem: $PV = L^{'} + FV$

4.

$$P^{'} = P - F = \begin{pmatrix} {}_0f_x & -vp^a_x & & & & & & & \\ \cdot & 1 & & & & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & 1 & -vp^a_{x+k} & -vp^{ai}_{x+k} & & \mathbf{0} & \\ \cdot & & & & 1 & \cdot & & & \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & & & 1 - vp^{ai}_{x+m} & -vp^a_{x+m} & & \\ \cdot & & & & & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & & & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \mathbf{0} & & & & \cdot & & 1 - vp^{ai}_{x+n-1} & vp^a_{x+n-1} \\ \cdot & & & & & & & & 1 \\ {}_nf_x & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$P^{'}_0 B^{'} = \begin{pmatrix} 1 & -vp^a_x & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & -vp^{ai}_{x+k} & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \mathbf{0} & & \\ & & & 1 - vp^{ai}_{x+m} & -vp^a_{x+m} & & & \\ & \mathbf{0} & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & 1 - vp^{ai}_{x+n-1} & -vp^a_{x+n-1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_0B^{'}_x \\ \vdots \\ {}_kB^{'}_x \\ \vdots \\ {}_mB^{'}_x \\ \vdots \\ {}_nB^{'}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \mathrm{Ra}^r_z \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} {}_nB_x &= R\mathrm{a}^r_z \\ (1 - vp^{ai}_{x+j})\ {}_jB^{'}_x - vp^a_{x+j}\ {}_{j+1}B^{'}_x &= 0 \\ \Longrightarrow \qquad {}_jB^{'}_x &= \frac{vp^a_{x+j}\ {}_{j+1}B^{'}_x}{1 - vp^{ai}_{x+j}} \quad \text{für}\, m \le j < n \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} {}_jB_x^{'} - vp_{x+j}^a\ {}_{j+1}B_x^{'} - vp_{x+j}^{ai}\ {}_mB_x^{'} & = & 0 \\ \Longrightarrow \qquad {}_jB_x^{'} & = & vp_{x+j}^a\ {}_{j+1}B_x^{'} + vp_{x+j}^{ai}\ {}_mB_x^{'} \end{array}\right\} \quad \text{f.} \quad k \le j < m \qquad (+)$$

$${}_jB_x^{'} = vp_{x+j}^a\ {}_{j+1}B_x^{'} \qquad \text{f.} \quad 0 \le j < k$$

Analog:

$$P_0^{'}\mathrm{a} = f, \qquad \text{mit} \quad \mathrm{a} \quad = \begin{pmatrix} {}_0\mathrm{a}_x \\ {}_1\mathrm{a}_x \\ \vdots \\ \vdots \\ {}_n\mathrm{a}_x \end{pmatrix}:$$

$$\begin{array}{rcll} {}_n\mathrm{a}_x & = & 0 & \\ {}_j\mathrm{a}_x & = & \dfrac{1 + vp_{x+j}^a\ {}_{j+1}\mathrm{a}_x}{1 - vp_{x+j}^{ai}} & \text{f.} \quad m \le j < n \\ {}_j\mathrm{a}_x & = & 1 + vp_{x+j}^a\ {}_{j+1}\mathrm{a}_x + vp_{x+j}^{ai}\ {}_m\mathrm{a}_x & \text{f.} \quad k \le j < m \qquad (++) \\ {}_j\mathrm{a}_x & = & 1 + vp_{x+j}^a\ {}_{j+1}\mathrm{a}_x & \text{f.} \quad 0 \le j < k \end{array}$$

$$A^{'} = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & & \text{\Large 0} \\ \mathrm{a} & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & 1 \end{array}\right)$$

Denn:

$$P_0^{'}A^{'} = \left(\begin{array}{c|cccccc} & -vp_x & & & & & \\ & 1 & \cdot & -vp_{x+k}^a & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \text{\Large 0} & \\ P_0^{'}\mathrm{a} & & & 1 - vp_{x+m}^{ai} & -vp_{x+m}^a & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & 1 - vp_{x+n-1}^{ai} & -vp_{x+n-1}^a \\ & & & \text{\Large 0} & & & 1 \end{array}\right) A' = P'$$

$$f$$

Damit Lösung:

$$\left.\begin{array}{lll} {}_jB_n^{'} & \text{gemäß} & (+) \\ {}_j\mathrm{a}_x & \text{gemäß} & (++) \\ {}_jV_x & = {}_jB_x^{'} & -\frac{{}_0B_x^{'}}{{}_0\mathrm{a}_x}\ {}_j\mathrm{a}_x \end{array}\right\} \quad j = 0, 1, ..., n$$

$$P_x = \frac{{}_0B_x^{'}}{{}_0\mathrm{a}_x}$$

5. Bei Ausscheiden mit unverfallbarem Anspruch nach $\hat{m}$ Jahren ist als Teilwert $\frac{\hat{m}}{n}\,{}_jB_x$ mit $n = z - x$ einzustellen, $\hat{m} \leq j < n$

   ${}_jB_x$ berechnet sich aus den Komponeten von V gemäß

$$ {}_jB_x = {}_jV_x + P_x\, \mathrm{a}^a_{x+j} $$

   mit

$$ \mathrm{a}^a_u = \sum_{i=0}^{z-u-1} v^i\, {}_ip^a_u \quad \text{(Aktivenbarwert)} $$

Klausur Spezialwissen PensVM 2008

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Sie sollen als Aktuar eines größeren Versorgungswerkes Ausscheidewahrscheinlichkeiten für das Bevölkerungsmodell der Pensionsversicherungsmathematik festlegen.

3.1. Wie gehen Sie an diese Aufgabe heran?

3.2. Worauf müssen Sie bei der Auswahl von statistischem Beobachtungsmaterial achten?

3.3. Wie gehen Sie bei der Ermittlung von Ausscheidehäufigkeiten vor, wenn neben der auszuwertenden Ausscheideursache weitere Bestandseinflüsse (Zugänge und Abgänge) das Beobachtungsmaterial beeinflussen?

3.4. Welche Aspekte sind bei der Aufbereitung der ausgewerteten Häufigkeiten im Hinblick auf ihre Verwendung als Schätzer für Ausscheidewahrscheinlichkeiten zu beachten?

zu 3.1

Die Herleitung von Ausscheidewahrscheinlichkeiten erfolgt in sieben Schritten

a) Festlegung der benötigten Wahrscheinlichkeiten

Vorgegeben ist das Bevölkerungsmodell der Pensionsversicherungsmathematik mit seinen Haupt- und Nebengesamtheiten, Ausscheideursachen und zulässigen Übergänge. Die Pensionsversicherungsmathematik unterscheidet die Hauptgesamtheit der Aktiven von den Nebengesamtheiten der Invaliden, Altersrentner und Witwen. Die in diesem einfachen Modell relevanten Ausscheideursachen für Aktive sind die Aktivensterblichkeit, die Invalidität und das Ausscheiden wegen Erreichens der Altersgrenze. Für Invalide werden die Invalidensterblichkeit und das Ausscheiden aus der Gesamtheit der Invaliden wegen Erreichens der Altersgrenze berücksichtigt. Bei Rentnern und Witwen ist nur eine Ausscheideursache, die Sterblichkeit, vorgesehen.

Übergänge bestehen vom Aktivenbestand zum Invaliden-, Altersrentner- und Witwenbestand, vom Invalidenbestand zum Altersrentner- und Witwenbestand und vom Altersrentnerbestand zum Witwenbestand.

Für die Anwendung des skizzierten einfachen Bevölkerungsmodells werden folgende Wahrscheinlichkeiten benötigt.

- Sterblichkeit der Aktiven
- Invalidisierung von Aktiven
- Sterblichkeit von Invaliden
- Sterblichkeit von Rentnern
- Vorhandensein und Alter von Hinterbliebenen
- Sterblichkeit von Hinterbliebenen

b) Beschaffung von Ausgangsmaterial

Die Herleitung von Wahrscheinlichkeiten für die Ausscheideursachen im jeweiligen Bevölkerungsmodell erfordert eine Quantifizierung und eine Analyse der Einflüsse und Abhängigkeiten für die einzelnen Ausscheideursachen. Eine wichtige Rolle spielen dabei Beobachtungen der einzelnen Ausscheideursachen in Kollektiven, die demjenigen, dem der Berechtigte angehört, möglichst ähnlich sind. Unter diesem Aspekt gilt es, geeignetes Ausgangsmaterial zu beschaffen.

c) Auswertung und Plausibilitätsprüfung des Ausgangsmaterials

Aus dem Ausgangsmaterial werden Ausscheidehäufigkeiten für die in Frage kommenden Ausscheideursachen in den einzelnen Risikoklassen (z.B. in Abhängigkeit von Alter und Geschlecht) innerhalb der jeweiligen Gesamtheiten ermittelt.

An die Auswertung schließt sich eine Plausibilitätsprüfung an. Diese beziehen sich zunächst auf Mängel in den zur Verfügung stehenden Daten (Erfassungsfehler, Unvollständigkeit der Daten). Sondereinflüsse auf das Beobachtungsmaterial können in den Leistungs- oder Zugangsbedingungen für die beobachteten Bestände liegen.

d) Bereinigung von Zufallseinflüssen

Statistische Ausgleichsverfahren und Tests können zur Eliminierung von Zufallseinflüssen herangezogen werden.

e) Projektivität

Vorliegendes Beobachtungsmaterial enthält lediglich historische Daten. Es beschreibt nicht die voraussichtliche künftige Entwicklung der Zahlungsströme des zu bewertenden Kollektivs. Es besteht lediglich die mehr oder weniger begründete Hoffnung, dass aus dem Beobachtungsmaterial zufrieden stellende Schätzwerte für die künftige Entwicklung abgeleitet werden können. Nach der Bereinigung von Zufallseinflüssen lassen sich im Material ggf. Entwicklungstrends erkennen. Für die Ableitung zutreffender Wahrscheinlichkeiten kommt es darauf an, diese Trends zu extrapolieren.

f) abschließende Glättung

Durch die Extrapolation kann ggf. eine nochmalige Glättung der abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten erforderlich werden. Hierfür stehen mechanische Ausgleichsverfahren zur Verfügung.

g) Konsitenzprüfung

Die festgelegten Wahrscheinlichkeiten müssen im Modell der Pensionsversicherungsmathematik dem zwischen der Gesamtsterblichkeit, der Invalidensterblichkeit, der Aktivensterblichkeit und der Invalidisierungswahrscheinlichkeit bestehenden Zusammenhang erfüllen. Dieser Sachverhalt ist daher zu überprüfen. Ist die Konsistenz nicht gegeben, sind die Wahrscheinlichkeiten ggf. noch zu bereinigen.

zu 3.2.

Ideal sind Informationen über das Verhalten der Mitglieder der Risikoklasse, der der Berechtigte angehört, im Hinblick auf die gesuchte Ausscheideursache. Zu beachten ist zunächst die Definition der Ausscheideursache. Bei Sterblichkeit ist die Entscheidung weniger problematisch als z.B. bei Invalidität, weil die Definition der Invalidität weniger eindeutig ist als die des Todes.

Zu lösen ist die Problematik der Abgrenzung der geeigneten Risikoklasse (eindeutige Zuordnung, entsprechend differenziertes Material, hinreichende Größe, Merkmale der Risikoklasse). Eine Pensionsverpflichtung ist u.a. abhängig vom Alter, Geschlecht, Dienstalter, von der Dauer der Invalidität, vom Familienstand, von den Lebensgewohnheiten, vom Versicherungsträger (besser: von der Art der Tätigkeit), von der Branche, der Region und vom Zeitablauf (Geburtsjahr).

Entscheidend ist die Bedeutung der einzelnen Merkmale für die Ausprägung des Risikos. Hier ist die Einschätzung des Problems durch den Aktuar gefordert. In der Regel wird die Abhängigkeit vom Alter und Geschlecht beachtet. Hinsichtlich der Invalidisierung macht eine Differenzierung nach gewerblicher oder nicht gewerblicher Tätigkeit Sinn. Die Fluktuation ist in der Regel stark dienstzeitabhängig.

Die Grenzen der aktuariellen Aktivitäten liegen in dem zur Verfügung stehenden oder zu beschaffenden Ausgangsmaterial. Diese Grenzen sind oft schnell erreicht. Ein weiteres Problem bei einer Differenzierung nach mehreren Merkmalen entsteht dann, wenn die Besetzung der Risikoklassen zu klein wird.

Die Ergebnisse gestatten zunächst die Herleitung einer Periodentafel (Basistafel). Geht die Differenzierung nach dem Geburtsjahr in die Herleitung ein, so lässt sich eine Generationentafel herleiten.

zu 3.3.

Der Idealzustand für die Ermittlung von Ausscheidehäufigkeiten ist ein geschlossener Bestand, der nur aus der beobachteten Ursache verlassen wird._ Hier ist eine genaue Messung der Häufigkeiten unmittelbar möglich.
Sei B der Bestand der untersuchten Risikoklasse am Beginn der Beobachtungsperiode, T die in der Periode beobachteten realisierten Risiken hinsichtlich der jeweiligen Ausscheideursache. Dann ist

$q = \frac{T}{B}$ die Häufigkeit, mit der ein Mitglied des Bestandes innerhalb der beobachteten Periode ausgeschieden ist.

Sind neben der beobachteten Ausscheideursache weitere Bestandsveränderungen durch Zu- und Abgänge vorhanden, dann bietet sich an,

entweder ein Zurückführen auf Idealfall durch Zerlegung der Beobachtungsperiode $\prod = \prod_1 + \ldots + \prod_n$, so dass in den Teilperioden $\prod_\nu$ keine sonstigen Bestandsveränderungen auftreten. Herleitung von Ausscheidehäufigkeiten q_ν für die Teilperioden wie im Idealfall, nämlich

$$q_n = \frac{T_n}{B_n}$$

und Verknüpfung gemäß

$$q = 1 - \prod_{v=0}^{n} (1 - q_v)$$

oder nach der hierfür bekannten klassischen Methode der Mittelung des Bestandes vorzugehen. Seien BA der Bestand am Beginn, BE der Bestand am Ende der Beobachtungsperiode und T die realisierten Risiken innerhalb der Beobachtungsperiode, dann gilt

$$q = \frac{2 \cdot T}{BA + BE + T}$$

zu 3.4.

Bei der Aufbereitung der ausgewerteten Häufigkeiten sind ggf. Anpassungen an die Bestandsverhältnisse des zu bewertenden Bestandes vorzunehmen. Soweit die gewünschte Sicherheit in den Bewertungen nicht im Bewertungsverfahren durch entsprechende Sicherheitszu- oder abschläge hergestellt wird, kommt eine Korrektur der Häufigkeiten in Betracht. Die vorliegenden Häufigkeiten sind, sofern es sich um partielle Häufigkeiten handelt, noch in die im Bevölkerungsmodell der Personenversicherungsmathematikj benötigten globalen Häufigkeiten umzurechnen.

Weisen die ausgewerteten Häufigkeiten erkennbare Trends auf, so sind diese zu extrapolieren (Projektivität). Dies wirft zwei Fragen auf: erstens diejenige nach der Extrapolationsmethode und zweitens diejenige nach dem Extrapolationszeitraum. Allgemeine Erkenntnisse über die jeweils richtige Extrapolationsmethode sind wegen der Natur der Sache nicht zu erwarten. Hier ist die verantwortungsvolle Entscheidung des Aktuars erforderlich. Anhaltspunkte können Entwicklungen in vergleichbaren Kollektiven oder das nach Extrapolation ggf. hinausgeschobene Endalter der Sterbetafel sein.

Diese Problematik besteht im übrigen sowohl bei Generationen- als auch bei Periodensterbetafeln. Generationentafeln berücksichtigen nach Konstruktion, dass die Sterbewahrscheinlichkeit eine vom Alter und Geburtsjahrgang abhängige Größe ist. Das sagt aber nicht, dass die in einer Generationentafel verwendete Extrapolationsmethode zutreffend ist. Auch Generationentafeln sind daher regelmäßig zu kontrollieren und zu überarbeiten. Möglicherweise ist bei Beschränkung der Betrachtung auf einen Jahrgang ihre Anwendung gegenüber einer Periodentafel zu bevorzugen.

Aufgabe 4 (30 Punkte)

Ein Unternehmen, das betriebliche Altersversorgung einführen möchte, engagiert Sie als beratenden Aktuar. Das Leistungsangebot soll Alters-, Invaliditäts- und Hinterbliebenenleistungen umfassen.

4.1. Beschreiben Sie Ihr aktuarielles Dienstleistungsangebot im Hinblick auf die Absicht des Unternehmens, betriebliche Altersversorgung einzuführen.

4.2. Das Handelsrecht verlangt eine Bewertung von Anwartschaften nach Art des „vernünftigen Kaufmanns“. Welche Bewertungsmethoden schlagen Sie als Aktuar vor und welche Eigenschaften haben diese?

4.3. Welche Empfehlung geben Sie im Hinblick auf die aktuarielle Methode zur Berücksichtigung der betrieblichen Altersversorgung in der Kostenrechnung des Unternehmens?

4.4. Welche Größenordnungen von Personalkosten, Rentenlast, Rückstellung und Aufwand erwarten das Unternehmen langfristig, wenn das Niveau der zugesagten Altersrenten bei etwa 8 % der letzten Bezüge vor Eintritt des Versorgungsfalles liegt?

zu 4.1.

Der Aktuar kann durch Prognoserechnungen den Einfluss der betrieblichen Altersversorgung auf wesentliche wirtschaftliche Kenngrößen des Unternehmens beschreiben. Auf der Zahlungsebene sind dies die Beiträge an externe Versorgungsträger oder die Zahlungsbelastung aus Versorgungsleistungen und die Verwaltungskosten (inkl. PSV-Beiträge), auf der Erfolgsebene der Aufwand (Beitrags-/bzw. Rentenlast, Verwaltungskosten und ggf. Rückstellungsveränderung), in der Bilanz die Entwicklung der Rückstellung. Neben diesen unmittelbaren Wirkungen können zusätzlich die mittelbaren nachsteuerlichen Wirkungen auf die Liquidität und das Eigenkapital beschrieben werden. Geeignete Kennzahlen, wie die Spur der betrieblichen Altersversorgung (Wirkung der betrAV an eine Generation von Berechtigten auf das Eigenkapital) sowie eine Analyse des Beharrungszustandes runden das Angebot des Aktuars ab. Mit diesen Instrumenten kann der Dotierungsrahmen beschrieben, die Wahl des Durchführungsweges begleitet und die Effizienz der betrieblichen Altersversorgung im Vergleich zu beispielsweise höheren Barlöhnen gemessen werden. Weitere Unterstützung bietet der Aktuar bei der Gestaltung und Verhandlung des Leistungsplanes und der Kommunikation in die Belegschaft. Für die Zeit nach der Einführung bietet er seine Hilfe hinsichtlich der Bewertung der Pensionsverpflichtungen für den Jahresabschluss, die Kostenrechnung und – bei Bedarf – der Unternehmensbewertung an.

zu 4.2.

Als Bewertungsmethoden stehen Verfahren zur Verfügung, die eine Gleichverteilung des Aufwands bewirken. Hierzu gehören das „klassische“ Teilwertverfahren im Sinne von § 6a Abs. 3 EStG, das modifizierte Teilwertverfahren oder auch (mit Einschränkungen) das Gegenwartswertverfahren. Daneben stehen Verfahren zur Verfügung, die zunächst eine Zuordnung oder Verteilung der Verpflichtung auf den Verlauf der Dienstzeit vornehmen und dann jeweils den Stand der Verpflichtung am Bewertungsstichtag bewerten. Hierzu gehören die PUC-Methode, das m/n-Barwertverfahren oder die Methode des Barwerts der erreichten Anwartschaft. Barwertverfahren bieten sich insbesondere an, wenn eine eindeutige Zuordnung von Teilen der Verpflichtung auf bestimmte Abschnitte der Dienstzeit bereits in der Pensionszusage vorgegeben ist (zum Beispiel bei beitragsorientierten Leistungszusagen oder Besitzstandskomponenten). PUC-Methode und m/n-Barwert führen im Vergleich zum Teilwertverfahren zu einer Verschiebung von Aufwand auf spätere Dienstjahre. Das Handelsrecht gibt künftig (vgl. BilMoG) eigenständige Vorgaben zum Rechnungszins und verlangt die Einbeziehung von Trends, auch wenn diese nur dem Grunde nach vorgesehen sind.

zu 4.3.

Für die Kostenrechnung empfiehlt sich bei externen Durchführungswegen in der Regel der Ansatz der tatsächlich gezahlten Prämien. Bei der internen Pensionszusage oder pauschal dotierten Unterstützungskasse ist der Ansatz einer fiktiven Bruttoprämie mit einem realistischen Zins (kalkulatorischer Zins für die Nutzung von Kapital oder unterstellte Zinserwartung der Arbeitnehmer auf „gestundeten“ Arbeitslohn) und unter Berücksichtigung von Trends. Es bietet sich an, die Kosten der betrieblichen Altersversorgung als v.H.-Satz des Barlohnes anzusetzen und dabei ggf. unterschiedliche Personengruppen bei unterschiedlichen Zusagen getrennt zu betrachten.

zu 4.4.

Die Personalkosten betragen bei einem Realzins von 3 % etwa 1 % für Rentenzusagen in Höhe von jeweils 0,1 % pro Dienstjahr. Bei einer im Durchschnitt erreichbaren Dienstzeit von 30 bis 40 Jahren führt ein Steigerungsbetrag von 0,27 bis 0,20 % zu dem vorgegeben Rentenniveau von 8 %. Der Personalkostensatz beträgt daher zwischen 2,0 und 2,7 % der Löhne. Bei einem Realzins von nur 2 % erhöhen sich die Sätze um etwa ein Drittel.

Die Rentenlast erreicht im Beharrungszustand etwa 2/3 x 8 % = 5,3 % der Löhne, wenn die Renten wie die Löhne steigen. Bleibt die Rentensteigerung um einen Prozentpunkt jährlich hinter der Lohnentwicklung zurück, so reduziert sich der Satz auf 90 %, d.h. auf etwa 4,8 % der Löhne.

Die steuerliche Rückstellung erreicht bei einem Rentenniveau von 8 % etwa 80 % der Lohnsumme. Die handelsrechtliche Rückstellung dürfte künftig eine Größenordnung von 120 % der Lohnsumme erreichen.

Der Aufwand setzt sich zusammen aus der Rentenlast und der Rückstellungsveränderung, wobei die Rückstellungsveränderung langfristig der Lohnsteigerungsrate auf die Rückstellung entspricht, da die Relation aus Rückstellung und Lohnsumme konstant bleibt. Bei einer Lohnsteigerungsrate von 2,5 %, einer Rentensteigerungsrate von 1,5 % und einer handelsrechtlichen Rückstellung von 120 % der Lohnsumme ergibt sich ein Aufwand von 4,8 % + 2,5 % x 120 % = 7,8 %.