



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Versicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 13.10.2018

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Unterlagen bestehen aus 17 Seiten.
- Zusätzlich zu den 17 Seiten erhalten Sie eine Formelsammlung bestehend aus 6 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Korbinian Meindl, Chris-Erik Schillinger,
Prof. Dr. Jan-Philipp Schmidt, Prof. Dr. Klaus Schröter

Aufgabe 1. [Grundlagen aktuarieller Kalkulation, Grundbegriffe zur Risikoteilung]
[6 Punkte]

Bei jeder Teilaufgabe ((a) bis (f)) ist genau eine Antwort ((i) bis (iv)) auszuwählen und auf dem Lösungsbogen zu notieren. Es genügt nicht, die Antwort auf dem Aufgabenblatt anzukreuzen.

- (a) [1 Punkt] Bei welcher Form von Franchise erstattet der Erstversicherer im Fall eines Schadens in Abhängigkeit von der Einzelschadenhöhe entweder den gesamten Schaden oder gar nichts?
- (i) Abzugsfranchise
 - (ii) Integralfranchise
 - (iii) Jahresfranchise
 - (iv) Zeitfranchise
- (b) [1 Punkt] Welcher der folgenden Begriffe beschreibt nicht denselben mathematischen Sachverhalt zur Risikoteilung wie die anderen drei Bezeichnungen?
- (i) Franchise
 - (ii) Priorität
 - (iii) Retrozession
 - (iv) Selbstbehalt
- (c) [1 Punkt] Welcher Begriff aus der Rückversicherung (kurz RV) beschreibt das Anbieten von RV-Kapazitäten und das Zeichnen von RV-Deckungen?
- (i) obligatorische Rückversicherung
 - (ii) fakultative Rückversicherung
 - (iii) aktive Rückversicherung
 - (iv) passive Rückversicherung
- (d) [1 Punkt] Welche der folgenden RV-Vertragsarten gehört zu den *proportionalen* Formen von Rückversicherung?
- (i) Schadenexzedent
 - (ii) Summenexzedent
 - (iii) Kumulschadenexzedent
 - (iv) Jahresüberschadenexzedent



(e) [1 Punkt] Wie hoch ist das *Limit* eines Schadenexzedenten 3 Mio. xs 1 Mio.?

(i) 1 Mio.

(ii) 2 Mio.

(iii) 3 Mio.

(iv) 4 Mio.

(f) [1 Punkt] Wie hoch ist der *Plafond* eines Kumulschadenexzedenten 50 Mio. xs 20 Mio.?

(i) 20 Mio.

(ii) 30 Mio.

(iii) 50 Mio.

(iv) 70 Mio.

Aufgabe 2. [Grundlagen aktuarieller Kalkulation, Äquivalenzprinzip und Nettorisikoprämie] [18 Punkte]

Betrachten Sie im Folgenden ein Versicherungsprodukt mit folgender Spezifikation:

- Versicherungsdauer $n = 2$ Jahre
- konstante vorschüssige jährliche Prämienzahlung \bar{P}
- Höhe der Versicherungsleistung $S = 20.000$ Euro
- Zinssatz für Diskontierung $r = 1\%$
- einjährige Eintrittswahrscheinlichkeit des Versicherungsfalls $q = 1\%$

Die Zahlung der Versicherungsleistung erfolgt nachschüssig am Jahresende, falls im abgelaufenen Jahr der Versicherungsfall eingetreten ist. In diesem Fall endet der Versicherungsvertrag mit Zahlung der Leistung.

- (a) [3 Punkte] Modellieren Sie für das vorliegende Produkt den Versicherungsleistungsprozess L_\bullet , indem Sie dessen einzelnen Komponenten L_0, \dots, L_n definieren. Verwenden Sie hierbei ggf. Fallunterscheidungen.
- (b) [3 Punkte] Modellieren Sie für das vorliegende Produkt den Prämienprozess P_\bullet , indem Sie dessen einzelnen Komponenten P_0, \dots, P_n definieren. Verwenden Sie hierbei ggf. Fallunterscheidungen.
- (c) [2 Punkte] Beschreiben Sie die Grundidee des versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzips in seiner einfachsten Form in einem Satz und geben Sie für diesen Sachverhalt die entsprechende Formel (ohne Berechnung ihrer Bestandteile) an.
- (d) [8 Punkte] Berechnen Sie für das vorliegende Produkt die konstante Nettorisikoprämie \bar{P} (ohne Sicherheitszuschläge) unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus den Teilen a) bis c) und runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.
- (e) [2 Punkte] Zur Verringerung der Ruinwahrscheinlichkeit des Versicherers sollen nun vorsichtigere Annahmen durch implizite Sicherheitszuschläge getroffen werden. Benennen Sie hierfür zwei geeignete Kalkulationsparameter aus den oben gegebenen Angaben und bestimmen Sie jeweils deren neuen modifizierten Wert inklusive Sicherheitszuschlag von 10%.

Hinweis: Für einen gegebenen Parameter $a = x\%$ ohne Sicherheitszuschlag ist jeweils ein neuer Parameter $\tilde{a} = y\%$ inklusive Sicherheitszuschlag anzugeben.

Aufgabe 3. [Grundlagen aktuarieller Kalkulation, Bonus-Malus-Systeme] [12 Punkte]

Betrachten Sie ein Bonus-Malus-System mit folgender Spezifikation:

- 3 Klassen: K_1 (Superbonusklasse), K_2 (Bonusklasse), K_3 (Malusklasse)
 - Prämienvektor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (70, 90, 120)$
 - Schadenanzahl N mit folgenden Wahrscheinlichkeiten
 $P(N = 0) = 0,7$ $P(N = 1) = 0,2$ $P(N = 2) = 0,1$
 - Übergangsregeln:
Nach einem schadenfreien Jahr wird der Versicherungsnehmer in der Superbonusklasse K_1 eingestuft (unabhängig von der bisherigen Klassenzugehörigkeit).
Nach einem schadenbehafteten Jahr wird der Versicherungsnehmer in Abhängigkeit von der Schadenanzahl um eine (falls $N = 1$) bzw. zwei Klassen (falls $N = 2$) herabgestuft (soweit wie möglich).
- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T der Markov-Kette, die das gegebene Bonus-Malus-System repräsentiert.
- (b) [6 Punkte] Bestimmen Sie die korrespondierende stationäre Verteilung s .
- (c) [1 Punkt] Bestimmen Sie die stationäre Prämie $\bar{\pi}$.
- (d) [2 Punkte] Schildern Sie in jeweils einem Satz zwei Aspekte, warum dem Einsatz von Markov-Ketten bei der Modellierung von Versicherungsprozessen in der Praxis Grenzen gesetzt sind.



Aufgabe 4. [Schadenversicherungsmathematik, Schadenkennzahlen] [10 Punkte]

Gegeben sei ein Bestand von fünf Verträgen (= Risiken), die die folgenden Versicherungsdauern, Versicherungssummen, Jahresbeiträge und ggf. Schäden innerhalb eines (vergangenen) Kalenderjahres aufweisen:

Risiko	Vertragsdauer		Vers.- summen	Jahres- beitrag	Schadenhöhen	
	von ...	bis ...			Erster	Zweiter
1	01.01.	31.12.	300	6	5	
2	01.01.	31.03.	240	16		
3	01.01.	31.12.	200	13	10	20
4	01.04.	31.12.	320	20		
5	01.01.	31.12.	200	4	2	3

Berechnen Sie die folgenden Schadenkennzahlen dieses Bestandes:

- (a) [3 Punkte] die Schadenhäufigkeit,
- (b) [2 Punkte] den Schadenbedarf und
- (c) [2 Punkte] den Schadensatz.
- (d) [3 Punkte] Beurteilen Sie die Profitabilität dieses Bestandes (grob) durch eine geeignete Kennzahl.



Aufgabe 5. [Schadenversicherungsmathematik, Tarifierung, Risiko- und Tarifmerkmale, Marginalfaktorenmodelle] [22 Punkte]

- (a) [5 Punkte] Warum werden in der Schadenversicherungsmathematik nicht alle signifikanten Risikomerkmale für die Tarifierung herangezogen?
- (b) [5 Punkte] Erläutern Sie den allgemeinen Ansatz von Marginalfaktorenmodellen im Rahmen der Tarifierung für den Spezialfall von genau zwei Tarifmerkmalen.
- c) [12 Punkte] Erläutern und unterscheiden Sie die beiden folgenden speziellen Ausgleichsverfahren der Tarifierung (für genau zwei Merkmale):
- (i) [6 Punkte] das Verfahren von Bailey und Simon,
 - (ii) [6 Punkte] das Marginalsummenverfahren.

Geben Sie dabei auch die jeweiligen Zielfunktionen bzw. Zielsetzungen an.



Aufgabe 6. [Schadenversicherungsmathematik, Reservierungsverfahren] [22 Punkte]

Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2014 bis 2017 die beobachteten Schadenstände $S_{i,k}$ für die Abwicklungsjahre 0 bis 3 sowie die Prämieinnahmen π_i :

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k				Prämie π_i
	0	1	2	3	
2014	200	350	400	420	500
2015	300	500	620		860
2016	240	445			490
2017	380				900

Hinweis: Geben Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle gerundet an.

- (a) [6 Punkte] Schätzen Sie die Reserven für 2016 und 2017 mit dem Chain-Ladder-Verfahren.
- (b) [10 Punkte] Schätzen Sie die Reserve (nur) für 2017 mit dem Additiven Verfahren unter Verwendung der Prämien als Volumenmaße.
- (c) [6 Punkte] Was ist das Bornhuetter-Ferguson-Prinzip? Beantworten Sie die Frage unabhängig von der obigen Tabelle.



Aufgabe 7. [Personenversicherungsmathematik, Leistungsbarwerte] [10 Punkte]

Wir betrachten im allgemeinen Bevölkerungsmodell der Personenversicherungsmathematik eine zum Vertragsbeginn x -jährige Person der Hauptgesamtheit bezüglich der h Ereignisse auftreten können, die zu Leistungsansprüchen oder Leistungsanspartschaften führen.

- (a) [7 Punkte] Der Barwert einer ungewissen Verpflichtung gegenüber dieser Person zu Vertragsbeginn lässt sich bekanntlich in folgender Form darstellen:

$${}_0B_x^L := \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x \cdot {}_k \widehat{L}_x$$

Geben Sie die formelmäßige Definition der ${}_k \widehat{L}_x$ in dieser Darstellung an und erläutern Sie die Bedeutung der in der Formel dort vorkommenden Ausdrücke.

- (b) [3 Punkte] Wir betrachten nun den Fall einer einfachen Ordnung mit nur einer Ausscheideursache „Tod“. Geben Sie für folgende Verpflichtungen die Barwerte (unter Anwendung der Summendarstellung aus (a)) einer zum Betrachtungszeitpunkt x -jährigen Person an:

- Verpflichtung zur Zahlung einer sofort beginnenden, lebenslänglich laufenden, jährlich vorschüssig zahlbaren Rente des Jahresbetrags 1
- Verpflichtung zur Zahlung eines Todesfallkapitals der Höhe 1 nach $m + 1$ Jahren ($m \in \mathbb{N}_0$) bei Tod nach m vollendeten Jahren

Wie lautet die übliche versicherungsmathematische Bezeichnung für diese Barwerte?



Aufgabe 8. [Personenversicherungsmathematik, Rückstellungen] [21 Punkte]

(a) [9 Punkte] Die retrospektive Reserve ${}_mV_x^{retro}$ ist definiert durch:

$${}_mV_x^{retro} := \frac{1}{v^m \cdot {}_m p_x} \left({}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m-1} v^k \cdot {}_k p_x \cdot ({}_k \hat{P}_x - {}_k \hat{L}_x) \right), \quad m = 0, 1, \dots$$

Wir setzen hierbei voraus, dass ${}_m p_x \neq 0$ gilt.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, dass gilt:

$${}_mV_x^{retro} + {}_m \hat{P}_x = {}_m \hat{L}_x + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x^{retro}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Hinweis: Führen Sie $v^{m+1} \cdot {}_{m+1} p_x \cdot {}_{m+1}V_x^{retro}$ in eine Darstellung in Abhängigkeit von ${}_mV_x^{retro}$ über.

(b) [9 Punkte] Die prospektive Reserve ${}_mV_x^{pro}$ ist definiert durch:

$${}_mV_x^{pro} = {}_mB_x^L - {}_mB_x^P = \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_{x+m} \cdot ({}_{m+k} \hat{L}_x - {}_{m+k} \hat{P}_x), \quad m = 0, 1, \dots$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, dass gilt:

$${}_mV_x^{pro} - {}_mV_x^{retro} = \frac{1}{v^m \cdot {}_m p_x} \cdot ({}_0V_x^{pro} - {}_0V_x^{retro})$$

Hinweis: Führen Sie $v^m \cdot {}_m p_x \cdot {}_mV_x^{retro}$ in eine Darstellung in Abhängigkeit von ${}_0V_x^{pro}$ und ${}_mV_x^{pro}$ über.

(c) [3 Punkte] Erläutern Sie die Bedeutung der Größen ${}_0V_x^{pro}$ und ${}_0V_x^{retro}$.



Aufgabe 9. *[Personenversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen] [5 Punkte]*

- (a) *[3 Punkte]* Stellen Sie den grundsätzlichen Unterschied zwischen Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung und 2. Ordnung dar.
- (b) *[2 Punkte]* Erläutern Sie an den Beispielen einer lebenslangen Todesfallversicherung und einer sofort beginnenden lebenslang laufenden Rentenversicherung, wie sich die Anwendung von Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung und 2. Ordnung auf die Anzahl der erwarteten Todesfälle innerhalb eines einjährigen Betrachtungszeitraums auswirkt.



Aufgabe 10. [Lebensversicherungsmathematik, Rekursive Ansätze zur Prämienberechnung] [10 Punkte]

Bitte verwenden Sie die folgenden Sterbewahrscheinlichkeiten für (a) und (b):

Alter x	55	56	57	58	59	60	61	62	63
q_x^{Unisex} (in Promille)	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0

- (a) [3 Punkte] Berechnen Sie die Bruttoprämie für eine einjährige Risikolebensversicherung mit Versicherungssumme 100.000 Euro für einen 60-jährigen Mann mit dem rekursiven Ansatz. Der Rechnungszins beträgt 0,9 %, die jährlichen Kostenzuschläge betragen $\beta = 3\%$ (Bezugsgröße: Bruttobeitrag) und $\gamma = 0,1$ Promille (Bezugsgröße: Versicherungssumme). Rechnungsmäßige Abschlusskosten fallen nicht an. Die Versicherungssumme wird im Todesfall am Jahresende gezahlt.
- (b) [4 Punkte] Erweitern Sie den Ansatz aus Teilaufgabe (a) für eine zweijährige Risikolebensversicherung für einen 60-jährigen Mann mit dem rekursiven Ansatz und berechnen Sie die konstante jährliche Bruttoprämie (vorschüssige Zahlung).
- (c) [3 Punkte] Wie lautet das Äquivalenzprinzip in üblicher versicherungsmathematischer Notation für die zweijährige Risikolebensversicherung aus Teilaufgabe (b)?



Aufgabe 11. *[Lebensversicherungsmathematik, Überschussquellen, Überschussbeteiligung] [8 Punkte]*

- (a) *[4 Punkte]* Warum entstehen in der Lebensversicherung Überschüsse? Nennen Sie die Überschussquellen und die möglichen bilanziellen Zuweisungsformen des Rohüberschusses.
- (b) *[4 Punkte]* Erklären Sie das Vorgehen zur Beteiligung der Versicherungsnehmer am Überschuss in der Lebensversicherung und gehen Sie auf die möglichen Verwendungsformen der zugeteilten Überschüsse ein.



Aufgabe 12. [Pensionsversicherungsmathematik, Bevölkerungsmodell] [9 Punkte]

Stellen Sie für das in der Pensionsversicherungsmathematik (z.B. in den Richttafeln 2005 G) verwendete Bevölkerungsmodell eines Aktivenbestandes mit zwei vorzeitigen Ausscheideursachen die Hauptgesamtheit, die Nebengesamtheiten (unter Berücksichtigung von Witwen/Witwer) sowie die Übergänge zwischen den Gesamtheiten graphisch dar und geben Sie die Bezeichnung der einjährigen Verbleibe- und Übergangswahrscheinlichkeiten an.

Hinweis: Es sind jeweils nur die einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten anzugeben, die einen unmittelbaren Übergang von einer Gesamtheit in eine andere Gesamtheit beschreiben.



Aufgabe 13. *[Pensionsversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen] [9 Punkte]*

- (a) *[5 Punkte]* Stellen Sie anhand von zwei Rechnungsgrundlagen dar, dass die steuerliche Bewertung der Pensionsverpflichtungen gemäß § 6a EStG in der Regel nicht dem Grundsatz einer besten Schätzung genügt und beschreiben Sie die Folge für die Gewinn- und Verlustrechnung der Unternehmen im derzeitigen Marktumfeld.
- (b) *[4 Punkte]* Stellen Sie kurz dar, warum die für die Berechnung der Deckungsrückstellung einer regulierten Pensionskasse verwendeten Rechnungsgrundlagen in der Regel nicht dem Grundsatz einer besten Schätzung genügen und geben Sie zwei konkrete Beispiele für Abweichungen der Rechnungsgrundlagen vom Prinzip einer besten Schätzung an.



Aufgabe 14. *[Krankenversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen] [8 Punkte]*

- (a) *[2 Punkte]* Erläutern Sie Besonderheiten bei der Festlegung des Rechnungszin-
ses in der privaten Krankenversicherung.
- (b) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die Vorgehensweise bei der Bestimmung von Sterbe-
wahrscheinlichkeiten in der privaten Krankenversicherung.
- (c) *[2 Punkte]* Was ist bei der Festlegung von Kostenzuschlägen zu beachten?



Aufgabe 15. [Krankenversicherungsmathematik, Kalkulation] [10 Punkte]

Eine 25-jährige Person möchte eine private Krankenversicherung abschließen. Das Unternehmen kalkuliert den betrachteten Tarif mit einem Grundkopfschaden in Höhe von 1.500 Euro, einem Rechnungszins von 2,75 %, einmaligen Abschlusskosten in Höhe von 50 % des Bruttobeitrags, laufenden Kosten in Höhe von 600 Euro und einem proportionalen Zuschlag in Höhe von 12 %.

Die weiteren relevanten Rechnungsgrundlagen sind in der folgenden Tabelle zu finden:

Alter x	q_x	w_x	l_x	k_x	A_x	\ddot{a}_x
21	0,000393	0,1409	100.000	0,7092	17.358,91	10,30553
22	0,000411	0,1038	85.871	0,7081	19.498,18	11,13468
23	0,000415	0,0855	76.922	0,7071	21.146,75	11,62482
24	0,000398	0,0846	70.313	0,7068	22.578,28	11,94309
25	0,000380	0,0930	64.337	0,7073	24.163,69	12,28853
26	0,000359	0,1030	58.329	0,7091	26.183,04	12,79363
27	0,000333	0,1038	52.300	0,7122	28.785,40	13,51484
28	0,000311	0,0943	46.854	0,7173	31.789,68	14,35369
29	0,000296	0,0802	42.421	0,7248	34.856,13	15,15472
30	0,000288	0,0700	39.006	0,7352	37.735,10	15,81720

Unterstellen Sie in allen Aufgaben unveränderte Rechnungsgrundlagen und kalkulieren Sie ohne Übertragungswerte.

- (a) [5 Punkte] Kalkulieren Sie für die Person sowohl die Netto- als auch die Brutto-
prämie des Vertrags. Wie hoch sind die Zillmerkosten?
- (b) [5 Punkte] Nach zwei Jahren kommt es zu einer Beitragsanpassung. Bitte geben Sie hierfür die Äquivalenzgleichung des Vertrags an (ohne konkrete Werte zu berechnen). Erläutern Sie alle Größen, die in der Äquivalenzgleichung vorkommen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

(a): (ii), (b): (iii), (c): (iii), (d): (ii), (e): (iii), (f): (iv)

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

(a) Versicherungsleistungsprozess (ein Punkt für jede richtige Komponente)

$$L_0 = 0$$
$$L_1 = \begin{cases} 20.000 & \text{bei Eintritt des Leistungsfalls im 1. Jahr,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$L_2 = \begin{cases} 20.000 & \text{bei Eintritt des Leistungsfalls im 2. Jahr,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Prämienprozess (ein Punkt für jede richtige Komponente)

$$P_0 = \bar{P}$$
$$P_1 = \begin{cases} 0 & \text{bei Eintritt des Leistungsfalls im 1. Jahr,} \\ \bar{P} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$P_2 = 0$$

(c) Versicherungsmathematisches Äquivalenzprinzip (je ein Punkt für Satz und Formel)

Der erwartete Barwert der Prämienzahlungen entspricht gerade dem erwarteten Barwert der Leistungen.

$$E(P) = E(L)$$

(d) Nettorisikoprämie (für jeden nachfolgenden Formelblock jeweils zwei Punkte)
Die Erwartungswerte aus Teil (c) lassen sich als wahrscheinlichkeitsgewichtete diskontierte Summen berechnen:

$$E(P) = \sum_{t=0}^2 w_t \cdot D(t) \cdot P_t \quad \text{und} \quad E(L) = \sum_{t=0}^2 q_t \cdot D(t) \cdot L_t \quad \text{mit} \quad D(t) = \frac{1}{1,01^t}$$

($t = 0, 1, 2$)

Dabei beschreiben w_t und q_t jeweils die Wahrscheinlichkeit einer positiven Prämien- bzw. Leistungszahlung zum Zeitpunkt t ($t = 0, 1, 2$), also hier

$$w_0 = 1 \quad w_1 = 1 - q = 0,99 \quad w_2 = 0$$
$$q_0 = 0 \quad q_1 = q = 0,01 \quad q_2 = (1 - q) \cdot q = 0,99 \cdot 0,01 = 0,0099$$

Somit ergeben sich folgende Schritte zur Berechnung durch Einsetzen der entsprechenden Werte in die Formeln:

$$E(P) = 1 \cdot 1 \cdot \bar{P} + 0,99 \cdot \frac{1}{1,01} \cdot \bar{P} + 0 = \bar{P} \cdot \left(1 + \frac{0,99}{1,01}\right)$$
$$E(L) = 0 + 0,01 \cdot \frac{1}{1,01} \cdot S + 0,0099 \cdot \frac{1}{1,01^2} \cdot S = S \cdot \left(\frac{0,01}{1,01} + \frac{0,0099}{1,0201}\right)$$

Das versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip liefert aufgelöst nach \bar{P} schließlich:

$$\bar{P} = 20.000 \cdot \frac{\left(\frac{0,01}{1,01} + \frac{0,0099}{1,0201}\right)}{\left(1 + \frac{0,99}{1,01}\right)} \approx 20.000 \text{ Euro} \cdot 0,00990099 \approx 198,02 \text{ Euro}$$

- (e) modifizierte Parameter inklusive Sicherheitszuschlag (jeweils ein Punkt für jeden richtigen Parameter; die weiteren Hinweise dienen lediglich der Erläuterung und werden für die volle Punktzahl nicht benötigt)

Der Diskontzinssatz r und die Eintrittswahrscheinlichkeit des Versicherungsfalls q sind geeignete Größen:

$$\begin{aligned} r = 0,01 & \Rightarrow \tilde{r} = 0,01 \cdot 0,9 = 0,009 = 0,9\% \\ q = 0,01 & \Rightarrow \tilde{q} = 0,01 \cdot 1,1 = 0,011 = 1,1\% \end{aligned}$$

Ein Abschlag auf den Zins erhöht die Sicherheit. Ein Zuschlag auf die Eintrittswahrscheinlichkeit erhöht die Sicherheit.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3

- (a) Übergangsmatrix (3 Punkte, ein Punkt für jede korrekte Zeile der Matrix; die Herleitung dient hier lediglich der Erläuterung; für die volle Punktzahl genügt es, die Matrix anzugeben)

Die gegebenen Übergangsregeln U lauten formal:

$$\begin{array}{lll} U(1, 0) = 1 & U(1, 1) = 2 & U(1, 2) = 3 \\ U(2, 0) = 1 & U(2, 1) = 3 & U(2, 2) = 3 \\ U(3, 0) = 1 & U(3, 1) = 3 & U(3, 2) = 3 \end{array}$$

Für die einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten $t(i, j)$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) folgt:

$$\begin{array}{ll} t(1, 1) = P(N = 0) = 0,7 & t(1, 2) = P(N = 1) = 0,2 \\ t(2, 1) = P(N = 0) = 0,7 & t(2, 2) = 0 \text{ (kein Übergang möglich)} \\ t(3, 1) = P(N = 0) = 0,7 & t(3, 2) = 0 \text{ (kein Übergang möglich)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t(1, 3) = P(N = 2) = 0,1 \\ t(2, 3) = P(N = 1) + P(N = 2) = 0,3 \\ t(3, 3) = P(N = 1) + P(N = 2) = 0,3 \end{array}$$

Dies entspricht folgender Übergangsmatrix:

$$T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}$$

- (b) stationäre Verteilung (6 Punkte)

Die stationäre Verteilung s ergibt sich aus der Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lllll} 0,7 \cdot s_1 & + 0,7 \cdot s_2 & + 0,7 \cdot s_3 & = s_1 & \text{(I)} \\ 0,2 \cdot s_1 & & & = s_2 & \text{(II)} \\ 0,1 \cdot s_1 & + 0,3 \cdot s_2 & + 0,3 \cdot s_3 & = s_3 & \text{(III)} \\ s_1 & + s_2 & + s_3 & = 1 & \text{(IV)} \end{array}$$

Einsetzen von (II) in (III) und Umformungen liefern:

$$0,1 \cdot s_1 + 0,06 \cdot s_1 = 0,7 \cdot s_3 \Leftrightarrow s_3 = \frac{16}{70} \cdot s_1$$

Einsetzen in Gleichung (IV) ergibt:

$$s_1 + \frac{14}{70} \cdot s_1 + \frac{16}{70} \cdot s_1 = 1 \Leftrightarrow \frac{100}{70} \cdot s_1 = 1 \Leftrightarrow s_1 = 0,7$$

$$\Rightarrow s_2 = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14 \text{ und } s_3 = \frac{16}{70} \cdot \frac{70}{100} = 0,16$$

(c) stationäre Prämie (1 Punkt)

$$\bar{\pi} = s_1 \cdot \pi_1 + s_2 \cdot \pi_2 + s_3 \cdot \pi_3 = 0,7 \cdot 70 + 0,14 \cdot 90 + 0,16 \cdot 120 = 80,8$$

(d) Grenzen der Modellierung mit Markov-Ketten (2 Punkte, ein Punkt für jeden korrekten Antwortsatz; die Beispiele in Klammer dienen hier nur der Erläuterung und werden für die volle Punktzahl nicht benötigt)

Hinweis: Hier sind verschiedene Antworten möglich, z. B.

- Annahme der Markov-Eigenschaft in Praxis teils kritisch.
- Zur Modellierung komplexerer Sachverhalte sind teils sehr viele Zustände erforderlich.
- Erreichen des Gleichgewichtszustands im zeitlichen Verlauf in Praxis teils fraglich (z. B. zunehmende Ansammlung von Risiken in günstigster SF-Klasse in der Kraftfahrtversicherung).
- Bonus-Malus-Systeme weichen in der Praxis von der Reinform des Markov-Modells teils stark ab (z. B. durch diverse unternehmensspezifische Sondereinstufungsmöglichkeiten beim SF-Klassensystem in der Kraftfahrtversicherung).

Hinweis: Beispiele sind nicht gefordert.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4

- (a) [3 Punkte] Die durchschnittliche Anzahl der Verträge (= Jahreseinheiten) ergibt sich hier als

$$n_0 = 1 + 0,25 + 1 + 0,75 + 1 = 4,$$

da zwei der fünf Verträge nicht das volle Jahr im Bestand versichert waren. Wegen der insgesamt $N = 5$ Schäden ergibt sich die

$$\text{Schadenhäufigkeit} = H = \frac{N}{n_0} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Dabei ist es unerheblich, dass je zwei der drei Schäden durch das gleiche Risiko (3 bzw. 5) verursacht wurden.

- (b) [2 Punkte] Wegen

$$S = \text{Gesamtschaden} = 5 + 10 + 20 + 2 + 3 = 40$$

gilt für den Schadenbedarf

$$SB = \frac{S}{n_0} = \frac{40}{4} = 10.$$

- (c) [2 Punkte] Für den Schadensatz ist noch die durchschnittliche kumulierte Versicherungssumme zu bestimmen:

$$\begin{aligned} v &= 300 \cdot 1 + 240 \cdot 0,25 + 200 \cdot 1 + 320 \cdot 0,75 + 200 \cdot 1 \\ &= 300 + 60 + 200 + 240 + 200 \\ &= 1.000 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den Schadensatz

$$SS = \frac{S}{v} = \frac{40}{1.000} = 4 \% = 40 \text{ ‰}.$$

- (d) [3 Punkte] Die Profitabilität (Ertragskraft) kann etwa durch die Schadenquote bewertet werden. Für diese sind die verdienten Beiträge des Jahres zu berechnen:

$$\begin{aligned} b &= 6 \cdot 1 + 16 \cdot 0,25 + 13 \cdot 1 + 20 \cdot 0,75 + 4 \cdot 1 \\ &= 6 + 4 + 13 + 15 + 4 \\ &= 42. \end{aligned}$$

Folglich beträgt die Schadenquote

$$SQ = \frac{S}{b} = \frac{40}{42} \approx 95,2\%$$

Bedenkt man, dass diese Kennzahl – im Gegensatz zur *Combined Ratio* – die Kosten des Versicherungsver- und -betriebs noch nicht berücksichtigt, scheint die Profitabilität in diesem Bestand eher gering zu sein.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5

(a) [5 Punkte] Aus den folgenden potenziellen Gründen werden Risikomerkmale ggf. nicht als Tarifmerkmal verwendet:

- **Aufsichtsrecht:** Das Diskriminierungsverbot untersagt die Verwendung bestimmter Merkmale wie Nationalität, ethnische Herkunft etc. und (seit Dezember 2012) Geschlecht;
- **Multikollinearität:** Bei Verwendung von mehr als einem Tarifmerkmal ist anzustreben, dass die ausgewählten Tarifmerkmale stochastisch unabhängig sind. Die andernfalls vorliegende Multikollinearität führt zu Verzerrungen bei Schätzern für die Modellparameter und bei Konfidenzintervallen;
- **Kausalität:** Aus geschäftspolitischen Gründen ist es erforderlich, dass der Einfluss des Merkmals auf die Schadenaufwendungen (weitgehend) plausibel ist.

(b) [5 Punkte] Marginalfaktormodelle setzen für jede Ausprägung ($k = 1, \dots, n_i$) jedes Tarifierungsmerkmals ($i = 1, \dots, r$) einen sogenannten Marginalfaktor $u_{k,i}$ an. Diese Faktoren repräsentieren den (mittleren) multiplikativen Effekt der Ausprägung auf die Nettorisikoprämie einer Tarifzelle.

Für den Fall $r = 2$ ergeben sich die Nettorisikoprämien in Tarifzelle (i, j) als die Produkte

$$b_{i,j} = \bar{s}b \cdot u_{i,1} \cdot u_{j,2} ,$$

wobei $\bar{s}b$ der Schadenbedarfsdurchschnitt ist. Die konkrete – meist nicht eindeutige – Festlegung der Marginalfaktoren erfolgt dadurch, dass die Prämien = Produkte $b_{i,j}$ möglichst gut an die vorliegenden Daten = Schadenbedarfe vergangener Perioden (durch Ausgleichsverfahren) angepasst werden.

(c) [12 Punkte] Spezielle Ausgleichsverfahren der Tarifierung

(i) [6 Punkte] Verfahren von Bailey und Simon

- Orientierung an der Abstandsfunktion des χ^2 -Tests;
- Marginalfaktoren $x_i := u_{i,1}, i = 1, \dots, p$, und $y_j := u_{j,2}, j = 1, \dots, q$, derart, dass die Summe

$$L(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q) := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \frac{(s_{i,j} - v_{i,j} \cdot \bar{s}b \cdot x_i \cdot y_j)^2}{v_{i,j} \cdot \bar{s}b \cdot x_i \cdot y_j}$$

der gewichteten quadratischen Abstände zwischen den beobachteten Gesamtschäden $s_{i,j}$ und den volumengewichteten Nettorisikoprämien $v_{i,j} \cdot b_{i,j} = v_{i,j} \cdot \bar{s}b \cdot x_i \cdot y_j$ über alle Zellen minimiert wird. $v_{i,j}$ sind die Volumenmaße der Tarifzellen.

- Die Lösungen ergeben sich – nach Nullsetzen der partiellen Ableitungen von L – als ein $(p + q)$ -dimensionales System nichtlinearer Fixpunktgleichungen, dessen Lösung iterativ erfolgt. Die Lösungen sind nicht eindeutig bestimmt, nur deren Produkte.
- Verfahren von Bailey und Simon reagiert wegen der Berücksichtigung quadratischer Abstände empfindlich auf Ausreißer in den einzelnen Tarifzellen und überschätzt systematisch den beobachteten Gesamtschaden.
- Es wurde von 1962 bis zur Deregulierung 1994 zur Tarifierung in der deutschen Kraftfahrtversicherung eingesetzt.

(ii) [6 Punkte] Verfahren von Marginalsummenverfahren

- Ansatz: Für jede Ausprägung eines der beiden Merkmale sollen die kumulierten Nettorisikoprämien mit den kumulierten Gesamtschäden übereinstimmen. Die Grundlage der Bestimmung der Marginalfaktoren sind somit die folgenden Marginalsummengleichungen:

$$\sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot b_{i,j} = \overline{sb} \cdot x_i \cdot \sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot y_j \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^q s_{i,j} = s_{i\bullet} \quad , i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{i=1}^p v_{i,j} \cdot b_{i,j} = \overline{sb} \cdot y_j \cdot \sum_{i=1}^p v_{i,j} \cdot x_i \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^p s_{i,j} = s_{\bullet j} \quad , j = 1, \dots, q.$$

- Auch hier ergeben sich die Lösungen als ein $(p + q)$ -dimensionales System nichtlinearer Fixpunktgleichungen und nur iterativ. Die Lösungen sind wiederum nicht eindeutig bestimmt, nur deren Produkte.
- Das Marginalsummenverfahren ist weniger ausreißerempfindlich, also robuster. Der beobachtete Gesamtschaden wird exakt angenommen, also nicht überschätzt.
- Das Marginalsummenverfahren wird vom GDV seit 1995 zum Ausgleich von Schadentafeln eingesetzt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6

(a) [6 Punkte] Für die Schätzer der Chain-Ladder-Faktoren gilt

$$\hat{\varphi}_3^{\text{CL}} := \frac{S_{2014,3}}{S_{2014,2}} = \frac{420}{400} = 1,05$$

$$\hat{\varphi}_2^{\text{CL}} := \frac{S_{2014,2} + S_{2015,2}}{S_{2014,1} + S_{2015,1}} = \frac{400 + 620}{350 + 500} = \frac{1.020}{850} = 1,20$$

$$\hat{\varphi}_1^{\text{CL}} := \frac{S_{2014,1} + S_{2015,1} + S_{2016,1}}{S_{2014,0} + S_{2015,0} + S_{2016,0}} = \frac{350 + 500 + 445}{200 + 300 + 240} = \frac{1.295}{740} = 1,75$$

Für die Prädiktoren der Chain-Ladder-Endschadenstände gilt somit

$$\hat{S}_{2016,3}^{\text{CL}} := S_{2016,1} \cdot \hat{\varphi}_2^{\text{CL}} \cdot \hat{\varphi}_3^{\text{CL}} = 445 \cdot 1,20 \cdot 1,05 = 560,7$$

und

$$\hat{S}_{2017,3}^{\text{CL}} := S_{2017,0} \cdot \hat{\varphi}_1^{\text{CL}} \cdot \hat{\varphi}_2^{\text{CL}} \cdot \hat{\varphi}_3^{\text{CL}} = 380 \cdot 1,75 \cdot 1,20 \cdot 1,05 = 837,9$$

Für die Chain-Ladder-Reserven ergibt sich daraus:

$$R_{2016}^{\text{CL}} := \hat{S}_{2016,3}^{\text{CL}} - S_{2016,1} = 560,7 - 445 = 115,7$$

$$R_{2017}^{\text{CL}} := \hat{S}_{2017,3}^{\text{CL}} - S_{2017,0} = 837,9 - 380 = 457,9$$

(b) [10 Punkte] Für die Schätzer der Endschadenstände im Additiven Verfahren sind zunächst aus den Schadenständen durch Differenzenbildung die Zuwächse $Z_{i,k}$ zu ermitteln. Man erhält:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k			
	0	1	2	3
2014	200	150	50	20
2015	300	200	120	
2016	240	205		
2017	380			

Daraus ergeben sich die folgenden Schätzer der Schadenquotenzuwächse

$$\hat{\zeta}_1^{\text{AD}} := \frac{Z_{2014,1} + Z_{2015,1} + Z_{2016,1}}{\pi_{2014} + \pi_{2015} + \pi_{2016}} = \frac{150 + 200 + 205}{500 + 860 + 490} = \frac{555}{1.850} = 0,30$$

$$\hat{\zeta}_2^{\text{AD}} := \frac{Z_{2014,2} + Z_{2015,2}}{\pi_{2014} + \pi_{2015}} = \frac{50 + 120}{500 + 860} = \frac{170}{1.360} = 0,125$$

$$\hat{\zeta}_3^{\text{AD}} := \frac{Z_{2014,3}}{\pi_{2014}} = \frac{20}{500} = 0,04$$

und weiter der folgende Schätzer für den Endschadenstand des Anfalljahres 2017:

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{2017,3}^{\text{AD}} &:= S_{2017,0} + \pi_{2017} \cdot (\widehat{\zeta}_1^{\text{AD}} + \widehat{\zeta}_2^{\text{AD}} + \widehat{\zeta}_3^{\text{AD}}) \\ &= 380 + 900 \cdot (0,3 + 0,125 + 0,04) = 380 + 900 \cdot 0,465 = 798,5\end{aligned}$$

($\widehat{\zeta}_0^{\text{AD}}$ wird nicht benötigt.) Für die Reserve beim Additiven Verfahren ergibt sich daraus

$$R_{2017}^{\text{AD}} := \widehat{S}_{2017,3}^{\text{AD}} - S_{2017,0} = 798,5 - 380 = 418,5$$

(c) [6 Punkte] Das Bornhuetter-Ferguson-Prinzip entspricht dem folgenden Ansatz:

$$\widehat{S}_{i,k} = S_{i,n-i} + (\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}) \cdot \widehat{\alpha}_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad k = n-i, \dots, n.$$

Das Prinzip besagt, dass sich die Prädiktoren $\widehat{S}_{i,k}$ der künftigen (nicht beobachtbaren) Schadenstände aus den aktuellen (beobachtbaren) Schadenständen $S_{i,n-i}$ sowie aus

- Schätzern $\widehat{\gamma}_k$ für die künftigen Quoten und
- Schätzern $\widehat{\alpha}_i$ für die Endschadenstände der Anfalljahre $i = (0), 1, \dots, n$

ergeben. Unterschiedliche Ansätze zur Schätzung dieser beiden Komponenten führen zu bekannten Varianten der Verfahren der Schadenreservierung.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7

(a) [7 Punkte] ${}_k\widehat{L}_x$ kann ganz allgemein dort dargestellt werden durch:

$${}_k\widehat{L}_x := {}_kL_x^{(0)} + \sum_{i=1}^h {}_kL_x^{(i)} \cdot q_{x+k}^{(i)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Bezeichnungen:

- ${}_kL_x^{(0)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch Erreichen des Alters $x + k$ in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf den Jahresbeginn ($k = 0, 1, \dots$)
- ${}_kL_x^{(i)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch Ausscheiden aus der Ursache i im Jahr $(x + k, x + k + 1]$ verursacht werden, soweit sie nicht durch ${}_kL_x^{(0)}$ erfasst sind, diskontiert auf den Jahresbeginn ($k = 0, 1, \dots$)
- $q_x^{(i)}$: Wahrscheinlichkeit einer x -jährigen Person der Hauptgesamtheit innerhalb des Intervalls $(x, x + 1]$ aufgrund der Ursache i auszuschneiden

(b) [3 Punkte]

- Barwert ${}_0B_x^L$ der Verpflichtung zur Zahlung einer sofort beginnenden, lebenslänglich laufenden, jährlich vorschüssig zahlbaren Rente:

$${}_0B_x^L = \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x \cdot {}_k\widehat{L}_x.$$

Dabei ist ${}_k\widehat{L}_x = 1$.

Die übliche versicherungsmathematische Bezeichnung für diesen Barwert lautet \ddot{a}_x .

- Barwert der Verpflichtung zur Zahlung eines Todesfallkapitals:

$${}_0B_x^L = \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x \cdot {}_k\widehat{L}_x.$$

Dabei ist ${}_k\widehat{L}_x = v \cdot q_{x+k}$.

Die übliche versicherungsmathematische Bezeichnung für diesen Barwert lautet A_x .

Lösungshinweise zu Aufgabe 8

(a) [9 Punkte] Für die retrospektive Reserve gilt

$$\begin{aligned} v^{m+1} \cdot {}_{m+1}p_x \cdot {}_{m+1}V_x^{retro} &= {}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^m v^k \cdot {}_k p_x \cdot ({}_k \hat{P}_x - {}_k \hat{L}_x) = \\ &= {}_0V_x^{retro} + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} v^k \cdot {}_k p_x \cdot ({}_k \hat{P}_x - {}_k \hat{L}_x)}_{v^m \cdot {}_m p_x \cdot {}_m V_x^{retro}} + v^m \cdot {}_m p_x \cdot ({}_m \hat{P}_x - {}_m \hat{L}_x) \end{aligned}$$

Und somit gilt:

$$v^m \cdot {}_m p_x \cdot v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x^{retro} = v^m \cdot {}_m p_x \cdot {}_m V_x^{retro} + v^m \cdot {}_m p_x \cdot ({}_m \hat{P}_x - {}_m \hat{L}_x)$$

Mit ${}_m p_x \neq 0$ folgt:

$${}_m V_x^{retro} + {}_m \hat{P}_x = {}_m \hat{L}_x + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x^{retro}, \quad m = 0, 1, \dots$$

(b) [9 Punkte] Es gilt:

$$\begin{aligned} v^m \cdot {}_m p_x \cdot {}_m V_x^{retro} &= {}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m-1} v^k \cdot {}_k p_x \cdot ({}_k \hat{P}_x - {}_k \hat{L}_x) \\ &= {}_0V_x^{retro} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x \cdot ({}_k \hat{P}_x - {}_k \hat{L}_x)}_{-{}_0V_x^{pro}} - \sum_{k \geq m} v^k \cdot {}_k p_x \cdot ({}_k \hat{P}_x - {}_k \hat{L}_x) \\ &= {}_0V_x^{retro} - {}_0V_x^{pro} + v^m \cdot {}_m p_x \underbrace{\sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_{x+m} \cdot ({}_{m+k} \hat{L}_x - {}_{m+k} \hat{P}_x)}_{{}_m V_x^{pro}} \\ \Rightarrow \quad {}_m V_x^{pro} - {}_m V_x^{retro} &= \frac{1}{v^m \cdot {}_m p_x} \cdot ({}_0V_x^{pro} - {}_0V_x^{retro}) \end{aligned}$$

(c) [3 Punkte] ${}_0V_x^{pro}$ stellt den Betrag dar, der zum Beginn des Vertrags vorhanden sein muss, um die zukünftigen Leistungen unter Berücksichtigung der zukünftigen Prämien rechnermäßig leisten zu können.

${}_0V_x^{retro}$ ist das eingesetzte tatsächliche Anfangskapital.

Lösungshinweise zu Aufgabe 9

- (a) [3 Punkte] Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung sind diejenigen Werte, die einer erwarteten Entwicklung der betrachteten Größe entsprechen. Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung unterscheiden sich dadurch, dass sie besonders vorsichtig gewählt werden und damit aus Unternehmenssicht mehr Sicherheit bieten, dass die zugesagten Leistungen zukünftig erfüllt werden können.
- (b) [2 Punkte] Bei einer lebenslangen Todesfallversicherung ist die Anzahl der erwarteten Todesfälle im einjährigen Betrachtungszeitraum auf Grundlage von Sterbewahrscheinlichkeiten 1. Ordnung höher als auf Basis von Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung.

Bei einer lebenslang laufenden Rentenversicherung ist die Anzahl der erwarteten Todesfälle im einjährigen Betrachtungszeitraum auf Basis der Sterbewahrscheinlichkeiten 1. Ordnung niedriger als auf Basis von Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung.

Lösungshinweise zu Aufgabe 10

(a) [3 Punkte] Es ist ${}_1V_{60} = 0$ und

$${}_0V_{60} = q_{60} \cdot 100.000 \cdot v + {}_1p_{60} \cdot v \cdot {}_1V_{60} - P \cdot (1 - \beta) + \gamma \cdot 100.000$$

Da keine Abschlusskosten erhoben werden, gilt ${}_0V_{60} = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= q_{60} \cdot 100.000 \cdot v + {}_1p_{60} \cdot v \cdot {}_1V_{60} - P \cdot (1 - \beta) + \gamma \cdot 100.000 \\ &= 0,0045 \cdot 100.000 \cdot \frac{1}{1,009} + 0,9955 \cdot \frac{1}{1,009} \cdot 0 - P \cdot (1 - 0,03) \\ &\quad + 100.000 \cdot 0,0001 \\ &= 445,99 - P \cdot 0,97 + 10 \end{aligned}$$

Die Bruttoprämie beträgt also: $P = 470,09$ Euro.

(b) [4 Punkte] Für eine Risikolebensversicherung mit zweijähriger Laufzeit gilt:
 ${}_2V_{60} = 0$ und

$${}_1V_{60} = q_{61} \cdot 100.000 \cdot v + {}_1p_x \cdot v \cdot {}_2V_{60} - P \cdot (1 - \beta) + 100.000 \cdot \gamma$$

Außerdem ergibt sich rekursiv:

$$\begin{aligned} {}_0V_{60} &= q_{60} \cdot 100.000 \cdot v + {}_1p_x \cdot v \cdot {}_1V_{60} - P \cdot (1 - \beta) + 100.000 \cdot \gamma \\ &= q_{60} \cdot 100.000 \cdot v + {}_1p_x \cdot v \cdot (q_{61} \cdot 100.000 \cdot v \\ &\quad + {}_1p_x \cdot v \cdot {}_2V_{60} - P \cdot (1 - \beta) + 100.000 \cdot \gamma) - P \cdot (1 - \beta) + 100.000 \cdot \gamma \end{aligned}$$

Einsetzen der bekannten Werte und Umformungen ergibt schließlich:

$$P = 497,75 \text{ Euro}$$

(c) [3 Punkte] Das Äquivalenzprinzip in aktuarieller Notation lautet:

$$100.000 \cdot {}_2A_{60} + \beta \cdot P \cdot \ddot{a}_{60:\overline{2}} + \gamma \cdot S \cdot \ddot{a}_{60:\overline{2}} = P \cdot \ddot{a}_{60:\overline{2}}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 11

- (a) [4 Punkte] Da alle Rechnungsgrundlagen zum Zeitpunkt der Tarifikalkulation vorsichtig angesetzt werden, ist davon auszugehen, dass bei einer erwarteten Entwicklung der Sterbefälle, der Kosten und der Kapitalanlage (aufgrund der Sicherheitszuschläge in den einzelnen Rechnungsgrundlagen) Überschüsse entstehen. Die möglichen Überschussquellen sind das „Ergebnis aus überrechnungsmäßigen Zinsen“, das „Risikoergebnis“ und das „übrige Ergebnis“, welches das Abschlusskosten- und Verwaltungskostenergebnis enthält.

Der Rohüberschuss kann wie folgt bilanziell verwendet werden:

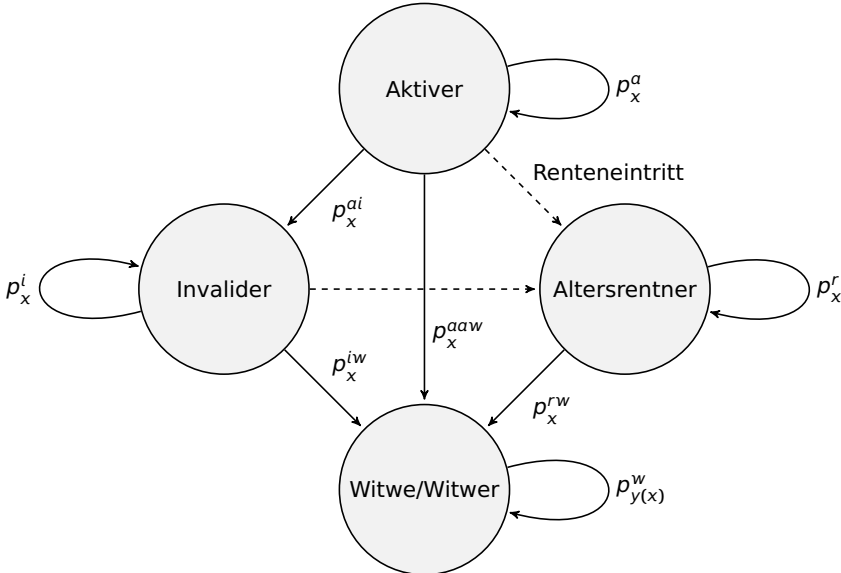
- Zuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung (RfB)
 - Direktgutschrift
 - Jahresüberschuss des Lebensversicherungsunternehmens
- (b) [4 Punkte] Der Vorstand eines Lebensversicherungsunternehmens beschließt zum Jahresende auf Vorschlag des Verantwortlichen Aktuars die Überschussdeklaration für das Folgejahr bzw. die Überschussanteilssätze, die für die Lebensversicherungsverträge im Folgejahr gültig sind. Dabei ist zwischen laufenden Überschussanteilen (diese werden den Verträgen unwiderruflich gutgeschrieben) und den Schlussüberschussanteilen (inkl. einer ggf. deklarierten Mindestbeteiligung an den Bewertungsreserven) zu unterscheiden. Für die Schlussüberschussanteile wird eine Teilrückstellung innerhalb der RfB gebildet (Schlussüberschussanteilfonds).

Die zugeteilten Überschussanteile können wie folgt verwendet werden:

- Sofortverrechnung (mit dem Beitrag)
- Verzinsliche Ansammlung
- Bonusbildung zur Erhöhung der Versicherungsleistungen
- Auszahlung
- Anlage in einem Investmentfonds

Lösungshinweise zu Aufgabe 12

[9 Punkte]



Lösungshinweise zu Aufgabe 13

- (a) [5 Punkte] Bei der Berechnung der Rückstellung für eine unmittelbare Pensionsverpflichtung in der Steuerbilanz ist ein Rechnungszins von 6 % zwingend vorgeschrieben. Gerade im aktuellen Niedrigzinsumfeld genügt dieser Zinssatz nicht mehr dem Grundsatz einer besten Schätzung. Ferner dürfen entgegen dem Prinzip einer besten Schätzung künftige Erhöhungen von Bemessungsgrundlagen (also z.B. Gehalts- und Rententrends) in die Rückstellungsberechnung nur einbezogen werden, wenn sie zum Bewertungsstichtag dem Grunde und der Höhe nach feststehen.

Das aktuelle Marktumfeld ist von einer andauernden Niedrigzinsphase geprägt. Die steuerlich zulässige Bewertung führt in diesem Marktumfeld i. d. R. zu einer deutlichen Unterbewertung der Pensionsverpflichtungen im Vergleich zum handelsrechtlichen Wertansatz. Damit zahlt das Unternehmen Steuern auf fiktive Gewinne, was zu einem erhöhten Steueraufwand und damit zu einem geringeren Gewinn der Unternehmen führt.

- (b) [4 Punkte] Für die Berechnung der Deckungsrückstellung einer regulierten Pensionskasse sind Rechnungsgrundlagen nach dem Prinzip einer besten Schätzung nicht ausreichend. Vielmehr sind die Rechnungsgrundlagen ausreichend vorsichtig zu wählen, um eine dauernde Erfüllbarkeit der zugesagten Leistungen zu gewährleisten.

Konkrete Beispiele für Abweichungen der Rechnungsgrundlagen von Prinzip der besten Schätzung sind:

- Ansatz von Sicherheitszu- oder -abschlägen (je nach zugesagter Leistungsart) bei biometrischen Rechnungsgrundlagen zur Berücksichtigung des Änderungs-, Irrtums- und Zufallsrisikos
- Bei der Bestimmung eines aktuariell angemessenen Rechnungszinses wird von den erwarteten Kapitalerträgen ein Sicherheitsabschlag vorgenommen

Lösungshinweise zu Aufgabe 14

- a) [2 Punkte] Der Rechnungszins i ist in der Krankenversicherung durch 3,5 % nach oben begrenzt (§ 4 KVAV). Bei einer Vielzahl an Tarifen liegt der Rechnungszins aktuell unterhalb von 3,5 %. Maßgeblich für die Festlegung des Rechnungszinses sind der Aktuarielle Unternehmenszins AUZ sowie eine Abschätzung zukünftiger AUZ-Werte. Der AUZ soll eine Rendite widerspiegeln, die mit hoher Wahrscheinlichkeit im Folgejahr vom unternehmensindividuellen Kapitalanlagebestand nicht unterschritten wird.
- b) [4 Punkte] Jährlich erarbeitet eine Arbeitsgruppe der DAV eine Sterbetafel für die private Krankenversicherung. Die Methodik zur Festlegung umfasst dabei die folgenden Schritte:
- (i) Schätzung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten
 - (ii) Ausgleich der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten
 - (iii) Bestimmung des Trends
 - (iv) Berücksichtigung eines Sicherheitsabschlags in den Sterbewahrscheinlichkeiten
 - (v) Projektion
 - (vi) Vergleich mit Vorjahreswerten und ggf. Anpassung
- c) [2 Punkte] Für Erwachsene dürfen in Kostentarifen (Ausnahme: Ausbildungstarife) lediglich altersunabhängige Kostenzuschläge eingerechnet werden (§ 8 KVAV). (Ausnahme: Zillmerung und Zuschlag für Basistarif und Standardtarif. Außerdem ist es auch zulässig, einen beitragsproportionalen Zuschlag zu erheben, der sich nur auf die aktuelle Tarifprämie zum ursprünglichen Eintrittsalter bezieht.) Daher werden die laufenden Zuschläge α_u , α_m , β , und ρ in einen absoluten jährlichen Zuschlag γ umgerechnet (sogenannter Stückkostenzuschlag).

Lösungshinweise zu Aufgabe 15

(a) [5 Punkte] Die Nettoprämie beträgt:

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{24.163,69}{12,28853} = 1.966,36.$$

Die Bruttoprämie ergibt sich zu:

$$B_{25} = \frac{P_{25} + \gamma}{1 - \Delta - \alpha_{25}^Z / \ddot{a}_{25}} = \frac{1.966,36 + 600}{1 - 0,12 - 0,5/12,28853} = 3.057,70.$$

Damit ergeben sich Zillmerkosten in Höhe von:

$$\frac{\alpha_{25}^Z \cdot B_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{50\% \cdot 3.057,70}{12,28853} = 124,41.$$

(b) [5 Punkte] Die Äquivalenzgleichung lautet:

$$V_{27}^a(B^a) + B^n \cdot \ddot{a}_{27}^n = A_{27}^n + \Delta^n \cdot B^n \cdot \ddot{a}_{27}^n + \gamma^n \cdot \ddot{a}_{27}^n + \alpha' \cdot (B^n - B^a)$$

Die einzelnen Größen haben folgende Bedeutung:

- 27 ist das erreichte Alter
- Werte, die mit den Rechnungsgrundlagen vor Änderung kalkuliert sind, haben einen Index a
- Werte, die mit den geänderten Rechnungsgrundlagen kalkuliert sind, haben einen Index n
- der alte Beitrag ist B^a und der neue Beitrag ist B^n
- $V_{27}(B^a)$ bezeichnet hier die Rückstellung zum Alter 27 mit den Rechnungsgrundlagen vor Änderung