DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Finanzmathematik und Risikobewertung

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 12. Oktober 2018

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Peter Albrecht, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Prof. Dr. Raimond Maurer

Aufgabe 1. *[Zahlungsströme, Versicherungs- u. Finanzmarktprodukte][15 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Grenzen Sie die Begriffe „Nominalwert“ und „Realwert“ gegeneinander ab. Geben Sie jeweils ein Beispiel an.

(b) *[5 Punkte]* Charakterisieren Sie den Zahlungsstrom, der aus Sicht eines Aktionärs aus einem Aktienengagement resultiert.

(c) *[6 Punkte]* Gegeben sei eine Einheit eines (dividendenfreien) Basisobjekts mit Kursverlauf $(S_t; 0 \leq t \leq T)$ sowie ein Long Put auf eine Einheit eines Basisobjekts mit Laufzeit T, Ausübungspreis K und Kursverlauf $(P_t; 0 \leq t \leq T)$. Ein *(1:1)-Put-Hedge* besteht aus der Kombination dieser beiden Positionen.

Wie lautet die Gewinn/Verlust-Position G_T dieses Put-Hedges zum Zeitpunkt T ? Vernachlässigen Sie dabei Zinseffekte. Stellen Sie die Gewinn/Verlust-Position in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T analytisch und grafisch dar.

Lösungsskizze:

(a) Der Terminus Realwert kann im Sinne von Sachwert oder Substanzwert verstanden werden. Darunter werden Anlageformen, wie Aktien, Immobilien oder Edelmetalle verstanden, die auf einem physischen Wert bzw. physischen Werten beruhen. Realwerte in diesem Sinne haben einen Wert „an sich“. Nominalwerte sind hingegen Tauschmittel, d. h. typischerweise Geld oder Zinstitel, die nicht immanent (Geld nach Aufgabe der Goldbindung) einen physischen Wert beinhalten, sondern nur ein Versprechen, gegen solche eingetauscht werden zu können. Realwerte sind im Gegensatz zu Nominalwerten besser gegen Inflation (Kaufkraftverluste) geschützt. Eine alternative Verwendung dieser Begriffe besteht darin, dass Realwerte in Kaufkrafttermen gemessen werden und Nominalwerte in Geldtermen (nominellen Termen).

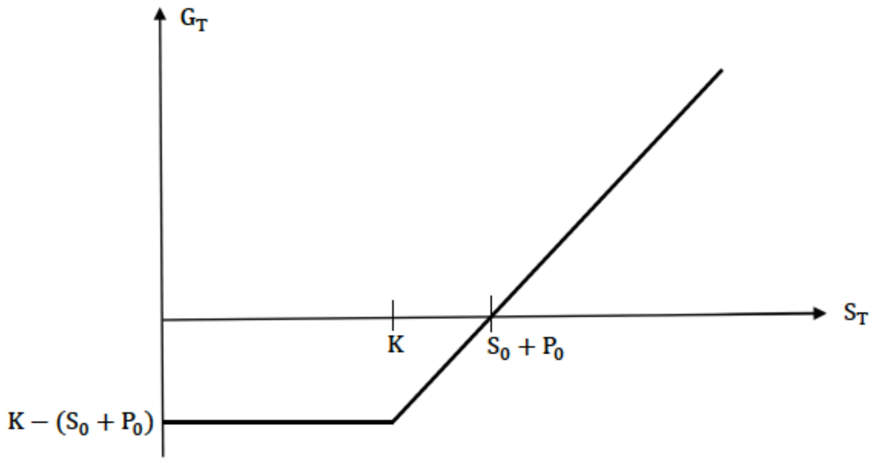
(b) Ein Investor kann (gehandelte) Aktien zum jeweiligen Kurswert erwerben und wieder veräußern. Ein Aktienengagement beginnt mit dem Erwerb der Aktie zu einem Zeitpunkt t_0 zu einem (bekannten) Preis $S_0 = s_0$ (Kaufpreis). Es folgen - in der Regel - Dividendenzahlungen der Höhe D_{t_i} zu den Zeitpunkten t_i ($i = 1, \ldots, n$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < T$) und gegebenenfalls der Verkauf der Aktie zu einem Zeitpunkt T zum Preis S_T (Verkaufskurs). Formal entspricht dies aus Sicht des Aktionärs dem Zahlungsstrom $Z = (Z_t)_{t \in \{t_0, t_1, \ldots, t_n, T\}}$ mit

- $Z_{t_0} = -s_0$,
- $Z_{t_i} = D_{t_i}$, $i = 1, \ldots, n$,
- $Z_T = S_T$.

(c) Mit $P_0 = P_0(K)$ gilt für die Gewinnposition:

$$
\begin{aligned}
G_T &= S_T - S_0 + P_T - P_0 \\
&= S_T + \max\{K - S_T, 0\} - (S_0 + P_0) \\
&= \max\{S_T, K\} - (S_0 + P_0) \\
&= \begin{cases} K - (S_0 + P_0) & \text{für } S_T \leq K, \\ S_T - (S_0 + P_0) & \text{für } S_T \geq K \end{cases}
\end{aligned}
$$

Grafische Darstellung:



Aufgabe 2. *[Individualbewertung] [12 Punkte]*

Betrachten Sie einen Investor mit exponentieller Nutzenfunktion $u(x) = -\exp(-\alpha x)$ mit Parameter $\alpha > 0$. Ferner sei X eine normalverteilte Finanzposition mit Erwartungswert $\mu(X)$ und Varianz $\sigma^2(X)$.

(a) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie für diesen Fall den Erwartungsnutzen $\mathcal{U}(X) = \mathrm{E}[u(X)]$. Ist die hieraus resultierende Präferenzordnung auf der Menge der normalverteilten Finanzpositionen konsistent zu der durch das Präferenzfunktional $\tilde{\mathcal{U}}(X) = \mathrm{E}[X] - \frac{\alpha}{2}\mathrm{Var}(X)$ induzierten Präferenzordnung? Folgern Sie, dass ein (μ, σ)-Prinzip vorliegt.

Hinweis: Für normalverteiltes X gilt $\mathrm{E}[\exp(tX)] = \exp(t\mu(X) + \frac{1}{2}t^2\sigma^2(X))$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie das zugehörige Sicherheitsäquivalent! Ist der Investor risikoavers?

(c) *[6 Punkte]* Das Nullnutzenprinzip für die Bestimmung der Risikoprämie π lautet $\mathrm{E}[u(\pi - S)] = u(0)$, wobei S den zu versichernden Schaden bezeichnet.

(i) *[3 Punkte]* Wie lautet die Nullnutzenprämie im Falle einer exponentiellen Nutzenfunktion?

(ii) *[3 Punkte]* Was impliziert das Resultat für die Prämie von $S_1 + S_2$ für zwei stochastisch unabhängige Schadenvariablen?

Lösungsskizze:

(a) Mit dem Hinweis berechnet man

$$\mathcal{U}(X) = -\mathrm{E}[\exp(-\alpha X)] = -\exp(-\alpha\mu(X) + \tfrac{1}{2}\alpha^2\sigma^2(X)) = u(\mu(X) - \tfrac{\alpha}{2}\sigma^2(X)).$$

Es gilt $u'(x) = \alpha e^{-\alpha x} > 0$, d. h. u ist streng monoton wachsend und damit wird dieselbe Präferenzordnung induziert wie bei $\tilde{\mathcal{U}}(X) = \mu(X) - \frac{\alpha}{2}\sigma^2(X)$. Insbesondere gilt $\tilde{\mathcal{U}}(X) = H(\mu(X), \sigma(X))$ für die Funktion $H(x, y) = x - \frac{\alpha}{2}y^2$. Folglich handelt es sich um ein (μ, σ)-Prinzip.

(b) Das Sicherheitsäquivalent ist gegeben durch

$$s(X) = u^{-1}(\mathrm{E}[u(X)]) = u^{-1}(u(\mu(X) - \tfrac{\alpha}{2}\sigma^2(X))) = \mu(X) - \tfrac{\alpha}{2}\sigma^2(X).$$

Wegen $s(X) < \mu(X)$ ist der Investor risikoavers.

(c) (i) Die Bedingung für die Nullnutzenprämie π im Falle einer exponentiellen Nutzenfunktion lautet

$$\mathrm{E}[-\exp(-\alpha(\pi - S))] = -\exp(-\alpha \cdot 0) = -1.$$

Hieraus folgt $\exp(-\alpha\pi)\mathrm{E}[\exp(\alpha S)] = 1$, und dies führt insgesamt zum sogenannten Exponentiellen Prämienprinzip

$$\pi(S) = \tfrac{1}{\alpha} \ln \mathrm{E}[\exp(\alpha S)].$$

(ii) Mit der stochastischen Unabhängigkeit von S_1 und S_2 folgt

$$\mathrm{E}[e^{a(S_1+S_2)}] = \mathrm{E}[e^{aS_1} \cdot e^{aS_2}] = \mathrm{E}[e^{aS_1}] \cdot \mathrm{E}[e^{aS_2}],$$

und dies impliziert

$$\begin{aligned} \pi(S_1+S_2) &= \tfrac{1}{a}\ln(\mathrm{E}[e^{aS_1}] \cdot \mathrm{E}[e^{aS_2}]) \\ &= \tfrac{1}{a}(\ln \mathrm{E}[e^{aS_1}] + \ln \mathrm{E}[e^{aS_2}]) \\ &= \pi(S_1) + \pi(S_2). \end{aligned}$$

Für stochastisch unabhängige Schadenvariablen ist das Nullnutzenprinzip für die exponentielle Nutzenfunktion somit additiv.

Aufgabe 3. *[Grundprinzipien der Finanzmathematik in Einperiodenmodellen] [27 Punkte]*

(a) *[15 Punkte]* Gegeben sei das einperiodige Finanzmarktmodell mit zwei möglichen Szenarien ω_1, ω_2 ($P[\{\omega_1\}] = P[\{\omega_2\}] = 0,5$), in dem die zwei primären Finanztitel „Sparbuch“ und „Aktie“ die folgende Wertentwicklung besitzen:

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 2} \\
\boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 2}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 16} \\
\boxed{S_0^1 = 5} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \boxed{S_1^1(\omega_2) = \ \ 8}
\end{tikzcd}
$$

(i) *[4 Punkte]* Weisen Sie nach, dass das Marktmodell arbitrage-frei und vollständig ist. Geben Sie das risikoneutrale Maß explizit an.

(ii) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den arbitrage-freien Preis C_0 für den Contingent Claim C_1 mit $C_1(\omega_1) = 12$, $C_1(\omega_2) = 4$ durch risikoneutrale Bewertung.

(iii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die Replikationsstrategie für diesen Contingent Claim sowie das erforderliche Anfangsinvestment. Was stellen Sie fest?

(iv) *[5 Punkte]* Wird hingegen der Preis des Contingent Claims C_1 als diskontierter Erwartungswert $\mathrm{E}_P[C_1/S_1^0]$ der diskontierten Auszahlung unter dem „statistischen“ Maß P berechnet, so lässt das erweiterte Marktmodell Arbitrage zu. Geben Sie eine Arbitragestrategie an und berechnen Sie Ihren Gewinn.

(b) *[12 Punkte]* Betrachten Sie nun das Finanzmarktmodell mit drei möglichen Szenarien $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ($P[\{\omega_i\}] > 0$ für $i = 1, 2, 3$):

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 2} \\
\boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 2} \\
 & \boxed{S_1^0(\omega_3) = 2}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 16} \\
\boxed{S_0^1 = 5} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^1(\omega_2) = \ \ 8} \\
 & \boxed{S_1^1(\omega_3) = \ \ 8}
\end{tikzcd}
$$

(i) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass dieses Finanzmarktmodell unvollständig ist.

(ii) *[2 Punkte]* Charakterisieren Sie die Menge der replizierbaren Contingent Claims.

(iii) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie die Menge der arbitrage-freien Preise für den Contingent Claim C_1 definiert durch $C_1(\omega_1) = 24$, $C_1(\omega_2) = 16$, $C_1(\omega_3) = 8$. Ist C_1 replizierbar?

Lösungsskizze:

(a) (i) Die Gewichte $q_i := Q[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2$, eines risikoneutralen Maßes Q sind bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathrm{E}_Q\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = q_1\frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1) + q_2\frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2) \quad \text{bzw. konkret} \quad 5 = 8q_1 + 4q_2$$

und die Nebenbedingung $q_1 + q_2 = 1$. Damit folgt zunächst

$$5 = 8q_1 + 4(1 - q_1) = 4q_1 + 4$$

und entsprechend $q_1 = \frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{3}{4}$.

Folglich existiert genau ein risikoneutrales Maß für das gegebene Marktmodell. Nach den Fundamentalsätzen bestehen Arbitragefreiheit (Existenz) und Vollständigkeit (Eindeutigkeit).

(ii) Gemäß risikoneutraler Bewertungsformel gilt

$$C_0 = S_0^0 \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right] = 6q_1 + 2q_2 = 3.$$

(iii) Für die Replikationsstrategie ϑ muss gelten

$$C_1(\omega) = V_1^\vartheta(\omega) = \vartheta^0 S_1^0(\omega) + \vartheta^1 S_1^1(\omega), \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Hieraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \vartheta^0 2 + \vartheta^1 16 &= 12, \\ \vartheta^0 2 + \vartheta^1\ 8 &= \ 4, \end{aligned}$$

dessen Lösung gegeben ist durch $\vartheta^0 = -2$, $\vartheta^1 = 1$. Die Replikationsstrategie besteht also im Kauf einer Aktie und der Kreditaufnahme von 2. Das hierfür erforderliche Anfangskapital beträgt

$$V_0^\vartheta = -2S_0^0 + 1S_0^1 = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 3$$

und entspricht dem eindeutigen arbitrage-freien Preis C_0 des Contingent Claims C_1.

(iv) Unter dem statistischen Maß P gilt $C_0^P := \mathrm{E}_P[C_1/S_1^0] = 4$. Wäre dies der Preis des Contingent Claims C_1, so könnte man zum Zeitpunkt 0 eine Einheit von C_1 zum Preis $C_0^P = 4$ verkaufen, die Absicherungsstrategie ϑ für C_1 zum Preis $C_0 = 3$ implementieren und das freie Kapital $C_0^P - C_0 = 1$ in das Sparbuch investieren. Diese Strategie ist zum Zeitpunkt 0 kostenneutral. Im Zeitpunkt 1 muss nun die durch den Verkauf des Contingent

Claims eingegangene Zahlungsverpflichtung C_1 erfüllt werden, die Absicherungsstrategie liefert das Endvermögen C_1 und die Anlage im Sparbuch bringt den Ertrag $S_1^0(C_0^P - C_0) = 2$. Netto bleibt also für jedes Szenario der risikofreie Gewinn 2, d. h. ein Preis $C_0^P = 4$ ist nicht konsistent mit der Abwesenheit von Arbitrage.

(b) (i) Unvollständigkeit kann durch die konkrete Angabe eines nicht replizierbaren Contingent Claims gezeigt werden, z. B.

$$C_1(\omega_1) = 24, C_1(\omega_2) = 16, C_1(\omega_3) = 8.$$

Sie folgt jedoch nach dem 2. Fundamentalsatz auch aus der Existenz verschiedener risikoneutraler Maße Q. Diese sind im vorliegenden Beispiel mit Gewichten $q_i = Q[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2, 3$, bestimmt durch

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathrm{E}_Q\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = q_1\frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1) + q_2\frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2) + q_3\frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_3).$$

und die Nebenbedingung $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Durch Einsetzen der Werte im konkreten Modell ergibt sich

$$5 = \frac{16}{2}q_1 + \frac{8}{2}q_2 + \frac{8}{2}q_3 = \frac{16}{2}q_1 + (1 - q_1)\frac{8}{2}.$$

Es folgt $q_1 = \frac{1}{4}$ und $q_2 + q_3 = \frac{3}{4}$. Jede Aufteilung $q_2(\alpha) = \frac{3}{4}\alpha$, $q_3(\alpha) = \frac{3}{4}(1 - \alpha)$ mit $\alpha \in (0, 1)$ definiert ein risikoneutrales Maß Q_α. Das Finanzmarktmodell ist unvollständig.

(ii) Replizierbar sind alle Contingent Claims der Form

$$C_1 = \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1.$$

Allen anderen Contingent Claims sind nicht replizierbar.

(iii) Für den Contingent Claim C_1 berechnet man unter dem risikoneutralen Maß Q_α, $\alpha \in (0, 1)$, den arbitrage-freien Preis

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha} &= S_0^0\left(q_1\frac{C_1(\omega_1)}{S_1^0} + q_2(\alpha)\frac{C_1(\omega_2)}{S_1^0} + q_3(\alpha)\frac{C_1(\omega_3)}{S_1^0}\right) \\ &= 1\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{24}{2} + \frac{3}{4}\alpha\cdot\frac{16}{2} + \frac{3}{4}(1-\alpha)\cdot\frac{8}{2}\right) \\ &= 6 + 3\alpha. \end{aligned}$$

Dieser hängt explizit von $\alpha \in (0, 1)$ ab. Man erhält die Menge der arbitrage-freien Preise $\mathcal{C}_0 = (6, 9)$, also ein ganzes Preisintervall. Der Claim ist nicht replizierbar, da anderenfalls der eindeutige arbitrage-freie Preis den Kosten der Replikation entspricht.

Bemerkung: In unvollständigen Finanzmarktmodellen besteht die Zweiteilung:

1. Der Contingent Claim C_1 ist replizierbar genau dann, wenn er einen eindeutigen arbitrage-freien Preis C_0 besitzt. Dieser entspricht den Kosten der perfekten Replikation.

2. Ist C_1 nicht replizierbar, so gilt $C_0^{\mathrm{inf}} < C_0^{\mathrm{sup}}$ und die Menge der arbitrage-freien Preise bildet das offene Intervall

$$\left(C_0^{\mathrm{inf}}, C_0^{\mathrm{sup}}\right) = \left(\inf_{Q\in\mathcal{Q}} S_0^0 \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right], \sup_{Q\in\mathcal{Q}} S_0^0 \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right]\right),$$

   wobei $\mathcal{Q}$ die Menge der risikoneutralen Maße bzw. der äquivalenten Martingalmaße bezeichnet.

Aufgabe 4. *[Zinsen, Zinsprodukte, Sensitivitäten (Duration, Konvexität)] [32 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Ein Aktuar erwartet zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3$ Zahlungsverpflichtungen in Höhe von $L_1 = 50$ Millionen €, $L_2 = 60$ Millionen € und $L_3 = 70$ Millionen €. Am Markt werden die folgenden Standardbonds gehandelt (die Kurse beziehen sich jeweils auf einen Nennwert von 100 €).

	Kurs	Restlaufzeit	Nominalzins	Yield to Maturity
Bond 1	108,00	1	10,00%	1,85%
Bond 2	105,00	2	5,00%	2,41%
Bond 3	100,00	3	2,00%	2,00%

(i) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie, ausgehend von den drei Standardbonds, die Spot Rates $\{r_0^z(1), r_0^z(2), r_0^z(3)\}$ (zusammengesetzte Verzinsung) in $t = 0$ für Zerobonds mit den Laufzeiten 1, 2 und 3 Jahre.

(ii) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie die Stückzahlen $\{N_1, N_2, N_3\}$ eines Portfolios P aus den drei Standardbonds so, dass die Zahlungsverpflichtungen exakt gedeckt sind! Welches ist der Wert des Portfolios P? (Vernachlässigen Sie dabei Ganzzahligkeitsüberlegungen!)

(b) *[8 Punkte]* Es seien die Zerobondpreise in $t = 0$ für verschiedene Laufzeiten gegeben:

$$P(0,1) = 0,8850,\ P(0,2) = 0,7973,\ P(0,3) = 0,7382,\ P(0,4) = 0,7098.$$

(i) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie die in $t = 0$ gültige Forward Rate (Terminzins) für eine Anlage von $t = 2$ bis $t = 3$ bei stetiger Verzinsung.

(ii) *[3 Punkte]* Berechnen Sie den Wert eines Payer-Swaps mit Nennwert 100 €, festem Zinssatz $0,03$ und Zahlungszeitpunkten $1, 2, 3, 4$ zum Zeitpunkt 0.

Hinweis: Für Zeitpunkte $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ $(T_i - T_{i-1} = \delta)$ ist der Wert $\Pi^p(t)$ eines Payer-Swaps in $t \leq T_0$ mit festem Zinssatz r, Nennwert N und Zahlungszeitpunkten $T_1, \ldots, T_n$ gegeben durch die Formel

$$\Pi^p(t) = N\left(P(t,T_0) - P(t,T_n) - r\delta\sum_{i=1}^{n} P(t,T_i)\right).$$

Diese Preisformel involviert neben N, r und dem Zeitinkrement nur die Preise von Nullkuponanleihen $P(t,\cdot)$ mit Nennwert 1 zum Zeitpunkt t zu verschiedenen Maturitäten.

(iii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie die 4-jährige Swap-Rate zum Zeitpunkt 0.

Hinweis: Die Swap-Rate entspricht dem festen Zinssatz, für den der Payer-Swap fair ist, d. h. den Wert 0 besitzt.

(c) *[14 Punkte]* Gegeben sei eine Anleihe mit 2 Perioden Restlaufzeit, einem Kupon von 6% und einem Nennwert von $N = 100$. Am Markt bestehe eine flache Zinsstrukturkurve mit einem Zinsniveau von 5%.

Wie hoch ist der faire Kurs der Anleihe unter diesen Bedingungen? Wie verändert sich der faire Kurs der Anleihe approximativ, wenn das Zinsniveau auf 5, 5% steigt? Verwenden Sie zur Approximation einerseits die absolute Duration DUR^A alleine und andererseits absolute Duration DUR^A und absolute Konvexität CONV^A. Welche Höhe nimmt der korrekte faire Kurs der Anleihe unter der veränderten Zinsstruktur an? Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Lösungsskizze:

(a) (i) Die Spot Rate $r_0^z(1)$ kann direkt aus der Tabelle abgelesen werden, es gilt: $r_0^z(1) = 0,0185$. Die weiteren Spot-Rates können schrittweise aus den Kursen P_2, P_3 der Standardbonds mit den Restlaufzeiten 2, 3 berechnet werden:

- Es gilt
$$P_2 = 105 = 5(1,0185)^{-1} + 105(1 + r_0^z(2))^{-2}.$$
Hieraus resultiert: $r_0^z(2) = 0,0242$.

- Ferner gilt:
$$P_3 = 100 = 2(1,0185)^{-1} + 2(1,0242)^{-2} + 102(1 + r_0^z(3))^{-3}.$$
Hieraus resultiert: $r_0^z(3) = 0,0199$.

Die Spot Rates belaufen sich somit auf $\{1,85\%; 2,42\%; 1,99\%\}$.

(ii) Zunächst ist N_3 auf Basis von Bond 3 zu bestimmen. Es muss gelten:
$$102N_3 = 70\,\text{Millionen}.$$
Hieraus resultiert $N_3 = 686.274,51$.

Weiter gilt
$$105N_2 + 2N_3 = 60\,\text{Millionen}.$$
Hieraus resultiert: $N_2 = 558.356,68$.

Schließlich gilt
$$110N_1 + 5N_2 + 2N_3 = 50\,\text{Millionen}.$$
Hieraus resultiert: $N_1 = 416.687,89$.

Der Wert des Portfolios beläuft sich damit auf
$$P = 108N_1 + 105N_2 + 100N_3 = 172,2572\,\text{Millionen}.$$

(b) (i) Die gesuchte Forward Rate ist gegeben durch

$$f_0^s(2,3) = -(\log P(0,3) - \log P(0,2)) = 0,0770.$$

(ii) Gemäß Hinweis ergibt sich in unserem Fall sich wegen $P(t,t) = 1$ der Wert

$$\Pi^p(0) = 100\left(1 - P(0,4) - 0,03\sum_{i=1}^{4} P(0,i)\right) = 19,6291.$$

(iii) Die 4-jährige Swap-Rate in $t = 0$ ist gegeben durch

$$r_0^{swap}(4) = \frac{1 - P(0,4)}{\sum_{i=1}^{4} P(0,i)} = 0,093.$$

(c) Die Zahlungsreihe des Bonds ist gegeben durch $\{6, 106\}$. Bezeichnet $P(r)$ den Preis des Bonds bei flachem Periodenzins r, so gilt:

$$\begin{aligned} P(r) &= 6(1+r)^{-1} + 106(1+r)^{-2} \\ P'(r) &= -6(1+r)^{-2} - 212(1+r)^{-3} \\ P''(r) &= 12(1+r)^{-3} + 636(1+r)^{-4} \end{aligned}$$

Damit folgt:

- Fairer Preis bei einem Zinsniveau von 5%:

$$P(0,05) = 6(1,05)^{-1} + 106(1,05)^{-2} = 101,8594.$$

- Fairer Preis (korrekte Berechnung) bei einem Zinsniveau von 5,5%:

$$P(0,055) = 6(1,055)^{-1} + 106(1,055)^{-2} = 100,9232.$$

- Approximation durch die absolute Duration:

$$P(r+\Delta r) \approx P(r) - \mathrm{DUR}^A(r)\Delta r \quad \text{mit } \mathrm{DUR}^A(r) = -P'(r)$$

Für $r = 0,05$, $\Delta r = 0,005$ berechnet man $\mathrm{DUR}^A(0,05) = 188,5757$ und erhält damit die Approximation

$$\begin{aligned} P(0,055) &\approx P(0,05) - \mathrm{DUR}^A(0,05) \cdot 0,005 \\ &= 101,8594 - 188,5757 \cdot 0,005 = 100,9165 \end{aligned}$$

- Approximation durch die absolute Duration und absolute Konvexität:

  $$P(r+\Delta r) \approx P(r) - \mathrm{DUR}^A(r)\Delta r + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{CONV}^A(r)(\Delta r)^2 \quad \text{mit } \mathrm{CONV}^A(r) = P''(r)$$

  Für $r = 0,05$, $\Delta r = 0,005$ berechnet man $\mathrm{CONV}^A(0,05) = 533,6048$ und erhält damit die Approximation

  $$\begin{aligned} P(0,055) &\approx P(0,05) - \mathrm{DUR}^A(0,05)\cdot 0,005 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{CONV}^A(0,05)\cdot(0,005)^2 \\ &= 101,8594 - 188,5757\cdot 0,005 + \tfrac{1}{2}\cdot 533,6048\cdot(0,005)^2 \\ &= 100,9232 \end{aligned}$$

  Folgerung (Vergleich mit korrekter Bewertung): Durch Verwendung von absoluter Duration und Konvexität erhöht sich die Approximationsqualität.

Aufgabe 5. *[Bewertung von Aktienderivaten im Binomialmodell] [25 Punkte]*

Betrachten Sie das zweiperiodige Binomialmodell, in dem für die Aktie ein Startpreis von 200 € sowie pro Periode eine prozentuale Aufwärtsbewegung von 30% und eine prozentuale Abwärtsbewegung von 20% unterstellt wird. Der einperiodige Zinssatz für die sichere Kapitalanlage bzw. -aufnahme betrage bei flacher Zinsstruktur $r =$ 5%.

(a) *[5 Punkte]* Überprüfen Sie zunächst, dass das so spezifizierte Binomialmodell arbitrage-frei ist. Geben Sie - sofern existent - das äquivalente Martingalmaß explizit an.

(b) *[2 Punkte]* Stellen Sie die Entwicklung des Aktienkurses S_0, S_1, S_2 von $t = 0$ bis $t = 2$ für alle Szenarien $\omega \in \Omega = \{(y_1, y_2) : y_i \in \{d, u\}\}$ dar !

(c) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie anhand der risikoneutralen Bewertungsformel den arbitrage-freien Preis einer zweiperiodigen Europäischen Put-Option auf die betrachtete Aktie mit Ausübungspreis 220 € zu den Zeitpunkten $t = 0, 1$ in den einzelnen Knoten.

(d) *[10 Punkte]* Betrachten Sie nun eine Anleihe („Bull-Anleihe") mit den folgenden Modalitäten. Die Laufzeit beträgt 2 Jahre, der Nennwert 100.000, es erfolgen keine laufenden Zinszahlungen. Weist die Aktie in $t = 2$ im Vergleich zu $t =$ 0 einen Wertzuwachs aus, so erhält der Käufer der Anleihe zusätzlich zum Nennwert einen Bonus in Höhe von 10% der nicht-annualisierten (positiven) Rendite $(S_2 - S_0)/S_0$.

Bestimmen Sie den Marktwert der Bull-Anleihe durch (direkte) Duplikation des Rückzahlungsprofils der Anleihe !

Lösungsskizze:

(a) „Down"-Faktor $d = 0,8$, „Up"-Faktor $u = 1,3$ und Zins $r = 0,05$ erfüllen die Bedingung $d < 1 + r < u$. Dies sichert die Existenz (genau) eines äquivalenten Martingalmaßes Q und damit insbesondere die Arbitragefreiheit des vorliegenden Binomialmodells.

Die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten unter Q sind gegeben durch

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = 0,5$$

für eine Aufwärtsbewegung sowie durch $1 - q = 0,5$ für eine Abwärtsbewegung der Aktie. Damit gilt

$$Q[\{\omega\}] = (1 - q)^{2 - N(\omega)} q^{N(\omega)},$$

wobei $N(\omega)$ für $\omega \in \Omega = \{(y_1, y_2) : y_i \in \{d, u\}\}$ die Anzahl der Aufwärtsbewegungen bezeichnet.

Bemerkung: Die Formel für q ergibt sich aus der Bedingung

$$S_0 = \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{1+r}S_1\right] = \tfrac{1}{1+r}(uS_0q + dS_0(1-q)).$$

Eine explizite Herleitung ist nicht erforderlich.

(b) Der Kursverlauf der Aktie ist gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{S_2 = u^2S_0 = 338} \\
 & \boxed{S_1 = uS_0 = 260} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\boxed{S_0 = 200} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{S_2 = udS_0 = 208} \\
 & \boxed{S_1 = dS_0 = 160} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \boxed{S_2 = d^2S_0 = 128}
\end{tikzcd}$$

(c) Aus dem obigen Kursverlauf der Aktie ist die Auszahlung der Put-Option in $t = 2$ ablesbar:

$$C_2(\omega) = (220 - S_2(\omega))^+ = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 12 & \text{für } \omega = (u,d) \text{ und } \omega = (d,u), \\ 92 & \text{für } \omega = (d,d). \end{cases}$$

Es sei V_t der arbitrage-freie Preis der Put-Option zum Zeitpunkt t, $t = 0,1,2$. Dann gilt $V_2 = C_2$, und man berechnet rekursiv

$$\begin{aligned}
V_1((u,\cdot)) &= \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{1+r}V_2|\mathcal{F}_1\right](u,\cdot) = \tfrac{1}{1+r}[V_2((u,u))q + V_2((u,d))(1-q)] \\
&= \tfrac{1}{1{,}05}[12 \cdot 0,5] = \tfrac{120}{21}, \\
V_1((d,\cdot)) &= \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{1+r}V_2|\mathcal{F}_1\right](d,\cdot) = \tfrac{1}{1+r}[V_2((d,u))q + V_2((d,d))(1-q)] \\
&= \tfrac{1}{1{,}05}[12 \cdot 0,5 + 92 \cdot 0,5] = \tfrac{1040}{21}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
V_0 &= \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{1+r}V_1\right] = \tfrac{1}{1+r}[V_1((u,\cdot))q + V_1((d,\cdot))(1-q)] \\
&= \tfrac{1}{1{,}05}\left[\tfrac{120}{21} \cdot 0,5 + \tfrac{1040}{21} \cdot 0,5\right] \approx 26,3039.
\end{aligned}$$

(d) Die Bull-Anleihe zahlt einen Bonus auf den Nennwert nur im Falle einer positiven Wertentwicklung der Aktie in $t = 2$, also in den Szenarien (u,u), (u,d), (d,u). Im Szenario (d,d) wird keine Bonuszahlung fällig. Für die Rückzahlung der Bull-Anleihe gilt dann:

- (u,u): $100.000(1 + 0,1 \cdot ((1,3)^2 - 1)) = 106.900$
- (u,d): $100.000(1 + 0,1 \cdot (1,3 \cdot 0,8 - 1)) = 100.400$

- (d, u): $100.000(1 + 0,1 \cdot (0,8 \cdot 1,3 - 1)) = 100.400$
- (d, d): 100.000

Die Berechnung der Stückzahlen x in der Aktie und y im Sparbuch mit Wertentwicklung $(1; 1 + r; (1 + r)^2) = (1; 1,05; 1,1025)$ erfolgt in jedem Knoten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$t = 1, \omega = (u, \cdot)$:

$$\begin{aligned} 338x &+ 1,1025y = 106.900 \\ 208x &+ 1,1025y = 100.400 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = 50$, $y = 81.632,6531$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_1((u, \cdot)) = 260x + 1,05y = 98.714,2857.$$

$t = 1, \omega = (d, \cdot)$:

$$\begin{aligned} 208x &+ 1,1025y = 100.400 \\ 128x &+ 1,1025y = 100.000 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = 5$, $y = 90.122,4490$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_1((d, \cdot)) = 160x + 1,05y = 95.428,5714.$$

$t = 0$:

$$\begin{aligned} 260x &+ 1,05y = 98.714,2857 \\ 160x &+ 1,05y = 95.428,5714 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = 32,8571$, $y = 85.877,5510$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_0 = 200x + y = 92.448,9796.$$

Dies ist der arbitrage-freie Preis der Bull-Anleihe.

Aufgabe 6. *[Value at Risk, Anwendung von Risikomaßen zur Bestimmung des erforderlichen Risikokapitals] [23 Punkte]*

(a) *[2 Punkte]* Definieren Sie für eine Finanzposition X (formal: Zufallsvariable über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) den Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$. Interpretieren Sie den Value at Risk als Kapitalanforderung.

(b) *[5 Punkte]* Geben Sie zwei wesentliche Kritikpunkte des Value at Risk an. Illustrieren Sie einen dieser Kritikpunkte anhand eines Beispiels.

(c) *[3 Punkte]* Zeigen Sie, dass für eine normalverteilte Finanzposition X mit Varianz $\sigma^2(X)$ der Value at Risk die Form

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = \mathrm{E}[-X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma(X)$$

besitzt, wobei Φ^{-1} die Quantilfunktion der Standardnormalverteilung ist.

(d) *[10 Punkte]* Die Solvabilitätskapitalanforderung (SCR) unter Solvency II wird durch den Mean Value at Risk $\mathrm{SCR}(E_1) = \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1 - \mathrm{E}[E_1])$ zum Niveau $0,005$ der Basiseigenmittel E_1 im Einjahreshorizont definiert.

(i) *[2 Punkte]* Zeigen Sie, dass das so definierte SCR kein monetäres Risikomaß darstellt.

(ii) *[8 Punkte]* Gegeben seien zwei gemeinsam normalverteilte Finanzpositionen X, Y mit Korrelation ρ. Zeigen Sie mithilfe von (c), dass in diesem Fall die Anwendung der Wurzelformel zur Aggregation mathematisch korrekt auf das SCR der Position $X + Y$ führt und sich das SCR subadditiv verhält. Wie schätzen Sie allgemein die Anwendbarkeit der Wurzelformel zur Risikoaggregation ein?

(e) *[3 Punkte]* Leiten Sie für die Finanzposition $X := -S$ eines Versicherers, die durch einen zu den Parametern μ und σ^2 lognormalverteilten Jahresgesamtschaden S induziert wird, eine Berechnungsformel für den Value at Risk her.

Hinweis: Sie können die Regeln zur Quantiltransformation anwenden.

Lösungsskizze:

(a) Der Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ einer Finanzposition X ist definiert durch

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} : P[X + m < 0] \leq \lambda\}.$$

Er entspricht dem kleinsten Geldbetrag, den man zu X hinzufügen muss, sodass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes kleiner oder gleich λ ausfällt:

(b) Der Value at Risk hat zwei wesentliche Schwächen:

(A) Extreme Verluste, die nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit auftreten, werden vom V@R völlig ausgeblendet. Unternehmen, die Risiken ausschließlich auf Basis von V@R messen, können folglich keine adäquaten Strategien für den Umgang mit Extremereignissen entwickeln.

(B) Das Risikomaß V@R ist im Allgemeinen nicht subadditiv. Daher kann V@R ökonomisch sinnvolle Diversifikation bestrafen.

<u>Beispiel zu (A):</u>

Der V@R zum Parameter $0,01$ ordnet den zwei Finanzpositionen

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,99, \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,01, \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,99, \\ -10^{10} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,01, \end{cases}$$

jeweils die Risikokennziffer -1 zu, obwohl natürlich die Position X_2 mit einem wesentlich höheren Risiko als X_1 behaftet ist.

<u>Beispiel zu (B):</u>

Es seien zwei stochastisch unabhängige Finanzpositionen X_1, X_2 gegeben:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,5, \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,5, \end{cases} \qquad (i = 1,2)$$

Für diese beträgt der Value at Risk zum Parameter $0,5$ jeweils -1. Für die aggregierte Finanzposition ergibt sich

$$X_1 + X_2 = \begin{cases} 2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,25, \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,5, \\ -2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,25. \end{cases}$$

Deren Value at Risk zum Parameter $0,5$ beträgt 0. Damit gilt jedoch

$$\mathrm{V@R}_{0,5}(X_1 + X_2) > \mathrm{V@R}_{0,5}(X_1) + \mathrm{V@R}_{0,5}(X_2).$$

(Bemerkung: Es war nur ein Beispiel anzugeben.)

(c) Für die Normalverteilung (stetige Verteilung) ist der Value at Risk bestimmt durch

$$\lambda = P[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0].$$

Hierbei gilt

$$P[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0] = P\left[\frac{X - \mathrm{E}[X]}{\sigma(X)} \leq \frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathrm{E}[X]}{\sigma(X)}\right] = \Phi\left(\frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathrm{E}[X]}{\sigma(X)}\right),$$

da die normierte Zufallsvariable $(X - \mathrm{E}[X])/\sigma(X)$ standardnormalverteilt ist. Dies liefert

$$\Phi^{-1}(\lambda) = \frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathrm{E}[X]}{\sigma(X)}$$

und damit nach Umformen die Behauptung.

(d) (i) Für die Definition $\mathrm{SCR}(E_1) = \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1 - \mathrm{E}[E_1])$ gilt für jedes $m \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{SCR}(E_1 + m) = \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1 + m - \mathrm{E}[E_1 + m]) = \mathrm{SCR}(E_1).$$

Damit erfüllt SCR nicht die Eigenschaft der Cash-Invarianz ($\rho(X + m) = \rho(X) - m$) und ist somit <u>kein</u> monetäres Risikomaß.

(ii) Da X, Y gemeinsam normalverteilt sind, ist auch die aggregierte Position $X + Y$ normalverteilt. Mit Teilaufgabe (c) gilt daher

$$\begin{aligned}\mathrm{SCR}(X) &= \mathrm{V@R}_{0,005}(X - \mathrm{E}[X]) = -\Phi^{-1}(0,005)\sigma(X),\\ \mathrm{SCR}(Y) &= \mathrm{V@R}_{0,005}(Y - \mathrm{E}[Y]) = -\Phi^{-1}(0,005)\sigma(Y),\\ \mathrm{SCR}(X+Y) &= \mathrm{V@R}_{0,005}(X + Y - \mathrm{E}[X+Y]) = -\Phi^{-1}(0,005)\sigma(X+Y).\end{aligned}$$

d. h. die SCRs entsprechen bis auf einen positiven Faktor $-\Phi^{-1}(0,005)$ der Standardabweichung der Finanzpositionen. Nach elementarer Stochastik gilt ferner (unabhängig von den Verteilungen)

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Dies impliziert nach Multiplikation mit $-\Phi^{-1}(0,005)$ erstens

$$\mathrm{SCR}(X+Y) = \sqrt{(\mathrm{SCR}(X))^2 + (\mathrm{SCR}(Y))^2 + 2\rho\mathrm{SCR}(X)\mathrm{SCR}(Y)},$$

d. h. die Aggregation des Risikokapitals per Wurzelformel ist im Normalverteilungskontext mathematisch korrekt. Zweitens folgt

$$\mathrm{SCR}(X+Y) \leq \sqrt{(\mathrm{SCR}(X))^2 + (\mathrm{SCR}(Y))^2 + 2\mathrm{SCR}(X)\mathrm{SCR}(Y)} = \mathrm{SCR}(X)+\mathrm{SCR}(Y),$$

d. h. das SCR ist im Normalverteilungskontext auch subadditiv.

Die Wurzelformel liefert eine mathematisch korrekte Aggregation für gemeinsam normalverteilte Risiken (bzw. allgemeiner elliptische Verteilungen). Bei abweichenden Randverteilungen der Risiken (speziell: schiefe Verteilungen, heavy tails) oder Abhängigkeiten (speziell: Tailabhängigkeiten) ist die Wurzelformel mathematisch hingegen nicht korrekt.

(e) Es gilt $X = -S = -\exp(Y)$ für eine zu den Parameter (μ, σ^2) normalverteilte Zufallsvariable Y. Mit Teilaufgabe (c) und der Quantiltransformation folgt

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = -q_X(\lambda) = \exp(q_Y(1-\lambda)) = \exp(\mathrm{V@R}_\lambda(-Y)) = \exp(\mu - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma).$$

(Bemerkung: Man kann auch analog zu Teilaufgabe (c) direkt argumentieren.)

Aufgabe 7. *[Axiomatische Theorie der Risikomaße, Average Value at Risk] [16 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Das entropische Risikomaß zum Parameter $\gamma > 0$ ist für eine Finanzposition X mit $\mathrm{E}[e^{-\gamma X}] < \infty$ gegeben durch

$$e_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}[e^{-\gamma X}].$$

Überprüfen Sie anhand der definierenden Eigenschaften, dass e_γ ein monetäres, konvexes Risikomaß ist.

Hinweis: Für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $X \in L^p, Y \in L^q$ gilt die Hölder'sche Ungleichung:

$$\mathrm{E}[|XY|] \leq \mathrm{E}[|X|^p]^{1/p}\mathrm{E}[|Y|^q]^{1/q}.$$

(b) *[4 Punkte]* Geben Sie allgemein die Form der robusten Darstellung eines konvexen Risikomaßes an. Interpretieren Sie diese Darstellung.

(c) *[8 Punkte]* Eine gängige Alternative zum Value at Risk ist der Tail Value at Risk.

(i) *[2 Punkte]* Geben Sie die formale Definition des Tail Value at Risk an. Interpretieren Sie die Definition, insbesondere mit Blick auf eine der Kernschwächen des Value at Risk.

(ii) *[6 Punkte]* Berechnen Sie zum Niveau $0,15$ den Value at Risk und den Tail Value at Risk für die Finanzposition X, deren Verlustvariable $L = -X$ die folgende Verteilungsfunktion besitzt:

$$F_L(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 0,8 & \text{für } 0 \leq x < 3, \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$

Was stellen Sie fest?

Lösungsskizze:

(a) Nachzuweisen sind drei Eigenschaften:

(A) *Inverse Monotonie:* $X \leq Y$ f. s. $\Rightarrow e_\gamma(X) \geq e_\gamma(Y)$

(B) *Cash-Invarianz:* Für $m \in \mathbb{R}$ gilt $e_\gamma(X + m) = e_\gamma(X) - m$.

(C) *Konvexität:* Für Finanzpositionen X, Y und $\alpha \in (0, 1)$ gilt

$$e_\gamma(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha e_\gamma(X) + (1 - \alpha)e_\gamma(Y).$$

zu (A): Es gilt $e^{-\gamma X} \geq e^{-\gamma Y}$ für $\gamma > 0$. Aufgrund der Monotonie des Erwartungswerts und der Funktion $x \mapsto \frac{1}{\gamma} \ln x$ folgt die Behauptung.

zu (B): Es gilt

$$e_\gamma(X+m) = \frac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}[e^{-\gamma(X+m)}] = \frac{1}{\gamma} \ln(\mathrm{E}[e^{-\gamma X}]e^{-\gamma m}) = e_\gamma(X) - m$$

zu (C):

$$\begin{aligned} e_\gamma(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= \frac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}[e^{-\gamma(\alpha X + (1-\alpha)Y)}] = \frac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}[e^{-\gamma\alpha X} e^{-\gamma(1-\alpha)Y}] \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \ln \left[\mathrm{E}[(e^{-\gamma\alpha X})^{1/\alpha}]^\alpha \mathrm{E}[(e^{-\gamma(1-\alpha)Y})^{1/(1-\alpha)}]^{1-\alpha} \right] \\ &= \alpha \frac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}[e^{-\gamma X}] + (1-\alpha) \frac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}[e^{-\gamma Y}] \\ &= \alpha e_\gamma(X) + (1-\alpha) e_\gamma(Y). \end{aligned}$$

(b) Die robuste Darstellung konvexer Risikomaße für eine Menge $\mathcal{X}$ von Finanzpositionen ist gegeben durch

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \{\mathrm{E}_Q[-X] - \alpha^{\min}(Q)\},$$

wobei $\mathcal{M}_1$ die Familie aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{X}$ bezeichnet, $\mathrm{E}_Q[\cdot]$ den Erwartungswert unter dem Maß $Q \in \mathcal{M}_1$ symbolisiert und die sogenannte (minimale) Straffunktion (penalty function) $\alpha^{\min} : \mathcal{M}_1 \to (-\infty, \infty]$ durch

$$\alpha^{\min}(Q) := \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \mathrm{E}_Q[-X].$$

gegeben ist. Hierbei repräsentieren die Maße $Q \in \mathcal{M}_1$ mögliche probabilistische Modelle, die entsprechend der Straffunktion α mehr oder weniger ernst genommen werden. Die Kapitalanforderung $\rho(X)$ wird als „worst-case“ des pönalisierten erwarteten Verlustes $\mathrm{E}_Q[-X]$ über alle Modelle $Q \in \mathcal{M}_1$ berechnet.

(c) (i) Der Tail Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ ist definiert durch

$$\mathrm{TV@R}_\lambda(X) := \mathrm{E}[-X \mid -X > \mathrm{V@R}_\lambda(X)].$$

Er entspricht somit dem bedingten erwarteten Verlust gegeben, dass der Verlust $-X$ den Value at Risk $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ überschreitet, und besitzt somit eine klare ökonomische Interpretation. Insbesondere werden - im Gegensatz zum Value at Risk - Verluste im Tail gemessen.

(ii) Der Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ einer Finanzposition X ist definiert durch

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} : P[X+m<0] \leq \lambda\}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt nun $P[X+x<0] = P[-X>x] = 1 - F_L(x)$, d. h.

$$P[X+x<0] = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0, \\ 0,2 & \text{für } 0 \leq x < 3, \\ \frac{1}{x^2} & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$

Wegen $1/(3)^2 < 0,15$ folgt hieraus nach Definition $\mathrm{V@R}_{0,15}(X) = 3$.

Mit der Definition des Tail Value at Risk berechnet man

$$\begin{aligned}\mathrm{TV@R}_{0,15}(X) &= \mathrm{E}[-X \mid -X > \mathrm{V@R}_{0,15}(X)] \\ &= \frac{1}{P[-X > 3]} \int_3^\infty x \frac{2}{x^3}\, dx \\ &= \frac{1}{1/9} \cdot \left[-\frac{2}{x} \right]_3^\infty = 6.\end{aligned}$$

Es gilt $\mathrm{TV@R}_{0,15}(X) > \mathrm{V@R}_{0,15}(X)$, da der Tail Value at Risk per definitionem das Risiko jenseits des Value at Risk misst.

Aufgabe 8. *[Markowitz-Ansatz, effiziente Portfolios, Kritikpunkte am Markowitz-Ansatz] [19 Punkte]*

(a) *[15 Punkte]* Gegeben sei ein Markowitz-Basismodell mit drei riskanten Finanztiteln, deren Renditen R_1, R_2, R_3 unkorreliert sind und identische Renditevarianzen der Höhe 10 besitzen. Die Renditeerwartungswerte der Finanztitel seien gegeben durch $\mathrm{E}[R_1] = 2$, $\mathrm{E}[R_2] = 1$ und $\mathrm{E}[R_3] = 3$. Es gibt keine Leerverkaufsbeschränkungen.

(i) *[12 Punkte]* Berechnen Sie mithilfe eines Lagrange-Ansatzes die Investmentgewichte der varianzminimalen Portfolios, die Menge der effizienten Portfolios sowie die Gleichung des effizienten Rands.

(ii) *[3 Punkte]* Visualisieren Sie Ihre Berechnungsergebnisse in einer Graphik.

(b) *[4 Punkte]* Nennen Sie zwei grundsätzliche Kritikpunkte am Markowitz-Ansatz.

Lösungsskizze:

(a) (i) Es seien x_1, x_2, x_3 die Investmentgewichte für die drei Finanztitel. Die Lagrange-Funktion (Formulierung 2) zur Bestimmung des effizienten Randes lautet

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, \lambda) &= t(2x_1 + x_2 + 3x_3) \\ &- \frac{1}{2}(10x_1^2 + 10x_2^2 + 10x_3^2) - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1). \end{aligned}$$

Die Lagrange-Gleichungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= 2t - 10x_1 - \lambda = 0 &\Rightarrow\quad & x_1 = \tfrac{1}{10}(2t - \lambda) \\ L_{x_2} &= t - 10x_2 - \lambda = 0 &\Rightarrow\quad & x_2 = \tfrac{1}{10}(t - \lambda) \\ L_{x_3} &= 3t - 10x_3 - \lambda = 0 &\Rightarrow\quad & x_3 = \tfrac{1}{10}(3t - \lambda) \\ L_\lambda &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen der Lösungen der ersten drei Gleichungen in die vierte ergibt:

$$6t - 3\lambda = 10$$

Hieraus folgt $\lambda = 2t - \frac{10}{3}$. Dies führt zu

$$x_1 = \tfrac{1}{3}, x_2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10}t, x_3 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10}t,$$

den Investmentgewichten der Minimum-Varianz-Portfolios.

Für die Erwartung und Varianz dieser Portfolios berechnet man:

$$\begin{aligned} \mu_t &= 2 + 0,2t \quad \text{bzw.} \quad t = 5\mu - 10 \\ \sigma_t^2 &= 0,2t^2 + \tfrac{10}{3} = 5\mu^2 - 20\mu + \tfrac{70}{3}. \end{aligned}$$

Damit ist die Menge der effizienten Portfolios gegeben durch

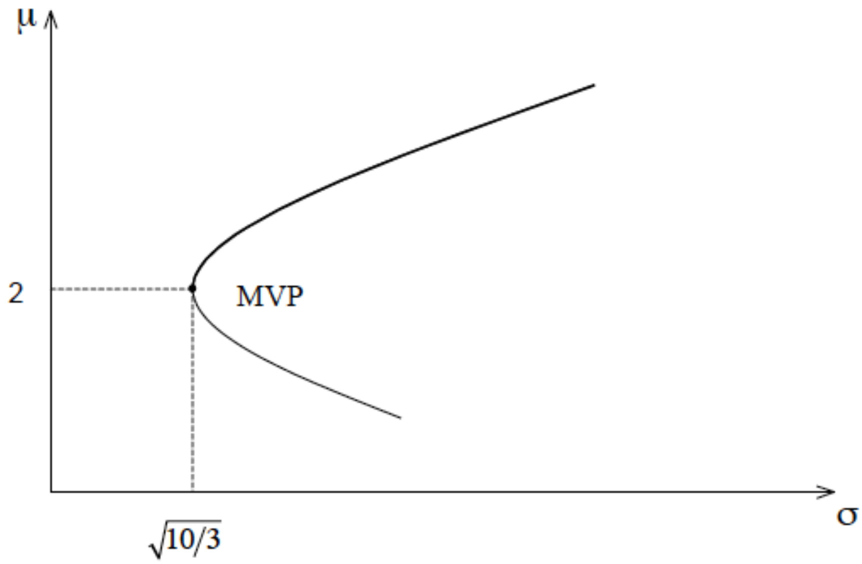
$$M^* = \{(\sigma, \mu) : \sigma^2 = 0,2t^2 + \tfrac{10}{3}, \mu = 2 + 0,2t, t \geq 0\}.$$

Die Gleichung des effizienten Randes ergibt sich als

$$\mu = 2 + \sqrt{0,2(\sigma^2 - \tfrac{10}{3})}$$

und entspricht dem oberen Ast der Kurve $\mu = 2 \pm \sqrt{0,2(\sigma^2 - \frac{10}{3})}$.

(ii) Die resultierende Kurve der Minimum-Varianz-Portfolios ist in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



(b) Wesentliche Probleme und Kritikpunkte des Markowitz-Ansatzes lassen sich unter folgenden „Überschriften“ zusammenfassen:

- *Standardabweichung als Risikomaß:* Das Markowitz-Basismodell beruht auf dem Risikomaß Standardabweichung, die Abweichungen symmetrisch misst. In der Anwendungspraxis treten jedoch häufig schiefe Verteilungen auf, denen die Standardabweichung als Risikomaß nicht gerecht wird.
- *Praxisferne analytische Lösungen:* Optimierte Portfolios besitzen oftmals extreme Allokationen.
- *Fehlende Robustheit:* Die Optimierung ist sehr sensitiv bezüglich der Inputdaten. Die Variation der Inputdaten ergibt z. T. strukturell völlig andere Portfolios.
- *Größenordnung bei der Parameterschätzung:* Bei n Einzeltiteln sind $n(n+1)/2$ Einträge der Kovarianzmatrix zu schätzen.

(Bemerkung: Es waren nur zwei Kritikpunkte zu benennen.)

Aufgabe 9. *[Gleichgewichtspreise auf der Basis des CAPM] [11 Punkte]*

Im Rahmen der CAPM-Modellwelt seien die beiden Wertpapierportfolios mit den Renditen R_1 und R_2 gemäß der Wertpapiermarktlinie korrekt bewertet. Es gilt:

$$\mathrm{E}[R_1] = 0,15 \qquad \beta_1 = 0,5$$
$$\mathrm{E}[R_2] = 0,25 \qquad \beta_2 = 1,5.$$

(a) *[3 Punkte]* Wie lautet die Wertpapiermarktlinie?

(b) *[2 Punkt]* Wie hoch ist unter den vorstehenden Voraussetzungen im CAPM-Gleichgewicht die erwartete Rendite eines Wertpapierportfolios mit einem Betafaktor in Höhe von 3?

(c) *[3 Punkte]* Unterstellen Sie, dass auf dem Markt ein Wertpapierportfolio mit einer erwarteten Rendite von 15% und einem Betafaktor von 1,2 existiert. Weist dieses Wertpapierportfolio eine Gleichgewichtsrendite auf?

(d) *[3 Punkte]* Unterstellen Sie nun, dass für die Standardabweichung des Marktportfolios $\sigma(R_M) = 0,5$ gilt und dass das Portfolio mit der Rendite R_2 Erwartungswert-Varianz-optimal ist. Berechnen Sie die Standardabweichung von R_2.

Lösungsskizze:

(a) Aus der Gleichung für die Wertpapiermarktlinie ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0,15 &= r_0 + 0,5[\mathrm{E}[R_M] - r_0] \\ 0,25 &= r_0 + 1,5[\mathrm{E}[R_M] - r_0] \end{aligned}$$

Hieraus resultiert zunächst $\mathrm{E}[R_M] - r_0 = 0,1$ und weiter $r_0 = 0,1$ sowie $\mathrm{E}[R_M] = 0,2$.

(b) Durch Einsetzen in die Wertpapiermarktlinie mit den aus (a) bekannten Parametern ergibt sich

$$\mathrm{E}[R] = 0,1 + 3(0,1) = 0,4.$$

(c) Bei einem Beta von 1,2 ergibt sich im CAPM-Gleichgewicht

$$\mathrm{E}[R] = 0,1 + 1,2(0,1) = 0,22.$$

Relativ zur Gleichgewichtsrendite weist das Portfolio mithin eine zu geringe erwartete Rendite auf.

(d) Die Menge aller optimalen Portfolios R ist gegeben durch die Kapitalmarktlinie

$$\mathrm{E}[R] = r_0 + \frac{\mathrm{E}[R_M] - r_0}{\sigma(R_M)}\sigma(R) = 0,1 + \tfrac{0,1}{0,5}\sigma(R).$$

Dies impliziert

$$\sigma(R_2) = 5(\mathrm{E}[R_2] - 0,1) = 5 \cdot 0,15 = 0,75.$$