Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

Grundlagen und quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 2.0
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 18.05.2018

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 8 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. P. Brühne, Prof. Dr. R. Frey
Dr. I. Merk, E. Müller
Prof. Dr. J. Wolf, A. Wolfstein

Aufgabe 1. Fallstudie – die Rolle des Chief Risk Officers ausfüllen. *[60 Punkte]*

Nehmen Sie an, dass Sie zum Chief Risk Officer (CRO) der Letzeburg Re bestellt werden, einer weltweit aktiven Rückversicherungsgruppe. Sie sind verantwortlich für das Gruppenrisikomanagement. Der Sitz der Muttergesellschaft der Gruppe, Letzeburg Re SE, befindet sich in Luxemburg. Letzeburg Re SE ist ein börsennotiertes Unternehmen. Es gibt keinen Mehrheitsaktionär. Rechtlich unabhängige Tochtergesellschaften befinden sich in Irland, Bermuda, USA und Australien. Das Prämienvolumen – rein aus Rückversicherungsgeschäft – teilt sich in 10% Leben und 90% Nichtleben, wobei 50% der Nichtlebensprämien aus nicht-proportionalem Naturgefahrengeschäft kommen. Die Hauptexponierung ist in Nordamerika (hauptsächlich Erdbeben und Wirbelstürme) und Europa (hauptsächlich Winterstürme und Überflutung). Um den Kapitalanforderungen unter Solvency II Genüge zu tun hat Letzeburg Re ein volles Internes Modell welches von der Luxemburgischen Aufsicht genehmigt wurde. Ziel bei den Ratings der Agenturen A.M. Best und Standard & Poor´s ist das jeweils zweithöchste (A+ von A.M. Best, AA von Standard and Poor´s), um attraktives Geschäft von Kunde bekommen zu können.

Ihre Hauptaufgabe ist das Erstellen und Aufrechterhalten des gruppenweiten enterprise risk management-Systems. Sie sind verantwortlich für das Interne Modell, die Aggregatkontrolle bezüglich Naturgefahren, sowie für alle Aspekte des qualitativen Risikomanagements: Regelmäßige Überprüfung der Risikostrategie, interne und externe Risikoberichterstattung und Management operationaler Risiken. Einmal pro Quartal berichten Sie über die aktuelle Lage und Änderungen seit dem letzten Bericht an das Risikokomitee, welches aus fünf Mitgliedern besteht: Sie selbst (CRO) und die vier Board-Mitglieder CEO, CFO, COO Life&Health and COO Non-life.

(a) *[8 Punkte]* Ihr CEO hat Sie gebeten, im nächsten Risikokomitee zu erklären, wie Risikomanagement zur Wertschaffung bei Letzeburg Re beiträgt, basierend auf zwei Beispielen. Bitte skizzieren Sie Ihre Antwort.

(b) *[12 Punkte]* Verschiedene Stakeholder Ihres Unternehmens haben verschiedene Bewertungsansätze. Vergleichen Sie die verschiedenen Bewertungsansätze von drei Stakeholder-Gruppen.

(c) *[8 Punkte]* Welche Möglichkeiten für konkrete Wertsteigerung für Letzeburg Re identifizieren Sie in Ihrer Rolle als CRO unter dem aktuellen Risikoprofil? Bitte schlagen Sie Ihrem Management zwei konkrete Maßnahmen vor.

(d) *[10 Punkte]* Messbarkeit von ERM Kultur:

   (i) *[4 Punkte]* Nennen Sie positive und negative Kriterien (jeweils zwei) um die ERM Kultur eines Unternehmens zu beschreiben.

(ii) *[6 Punkte]* Leiten Sie aus diesen Kriterien her, warum Quantifizierung von ERM Kultur schwierig ist, und diskutieren Sie ein pro und ein contra Argument.

(e) *[22 Punkte]* Letzeburg Re hat seit einigen Jahre Berufsunfähigkeitsgeschäft (disability) im australischen Markt geschrieben. Jetzt stellt sich heraus, dass einer der Zedenten seine Versicherten in der Schadenabwicklung unfair behandelt hat. Stellen Sie fest, welche Arten von Risiken bezüglich dieser Situation für Letzeburg Re identifiziert werden können. Führen Sie für drei wesentliche Risiken eine Risikoanalyse und -bewertung durch basierend auf dem Risikoappetit von Letzeburg Re (Sie können bezüglich dieses Risikoappetits Annahmen treffen), und wählen Sie geeignete Maßnahmen aus, um diese Risiken zu behandeln.

Aufgabe 2. Risikomaße und Modellierung. *[30 Punkte]*

(a) *[8 Punkte]* Betrachten Sie eine Verlustvariable X mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\sqrt{x}\right), \quad x \geq 0.$$

(i) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie das Risikomaß $\mathrm{V\alpha R}_{0.99}(X)$.

(ii) *[6 Punkte]* Berechnen Sie die mittlere Überschreitung von X über die Schwelle 20.

Hinweis. $\int x^2 \exp(-x)\,dx = \exp(-x)\left(-x^2 - 2x - 2\right)$

(b) *[22 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen setzt ein Bayesianisches Modell ein, um einen Sachversicherungsvertrag zu pricen. Es trifft die folgenden Annahmen.

- Die Schadenhöhe X, gegeben den Wert θ des unbekannten Parameters Θ, wird als $LN(\theta, \sigma^2)$-verteilt angenommen.
- Auf Basis eines externen Datenpools wird als a-priori Verteilung des Parameters Θ die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$ angesetzt.

Hinweis. Die Lognormalverteilung $LN(\theta, \sigma^2)$ hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0,$$

und den Erwartungswert $\exp(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)$.

(i) *[8 Punkte]* Zeigen Sie, dass die a-posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung x_0, die Normalverteilungsdichte mit den Parametern

$$\tau_P^2 = \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1} = \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2},$$
$$\mu_P = \frac{\tau_P^2}{\tau^2}\cdot\mu + \frac{\tau_P^2}{\sigma^2}\cdot\ln(x_0)$$

ist.

(ii) *[2 Punkte]* Geben Sie ein Integral an, das die Vorhersageverteilung von X, gegeben x_0 festlegt.
Hinweis. Die Aufgabenstellung beinhaltet **nicht** die Berechnung des Integrals.

(iii) *[4 Punkte]* Die Vorhersageverteilung aus ii) stellt sich als $LN(\mu_P, \sigma^2+\tau_P^2)$ heraus. Ihr Expected Shortfall ist gegeben durch

$$\mathrm{ES}_\alpha(X|x_0) = \frac{\exp\left(\mu_P + 0.5(\sigma^2+\tau_P^2)\right)}{1-\alpha}\cdot\Phi\left(\sqrt{\sigma^2+\tau_P^2} - \Phi^{-1}(\alpha)\right),$$

wobei Φ die Standardnormalverteilungsfunktion bezeichnet. Diskutieren Sie, inwieweit $\mathrm{ES}_\alpha(X|x_0)$ das Parameterrisiko berücksichtigt.

(iv) *[8 Punkte]* Infolge sich verändernder Rechtssprechung erwartet das Versicherungsunternehmen einen Schadenanstieg. Um diesen Anstieg in der Prämienkalkulation zu antizipieren, bittet das Unternehmen einen unabhängigen Experten, den künftigen Erwartungswert des Parameters Θ einzuschätzen. Gegeben die Experteneinschätzung $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$, führt das Unternehmen eine analoge Bayesianische Analyse durch, wobei es annimmt, dass die Experteneinschätzung δ, gegeben $\Theta = \theta$, $\mathcal{N}(\theta, \kappa^2)$-verteilt ist. Die Bayesianische Analyse, die die letzte Beobachtung x_0 und die neue Experteneinschätzung δ_0 einbezieht, liefert als aktualisierte a-posteriori Verteilung von Θ die Normalverteilung mit den Parametern

$$\tau_P^2 = \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\kappa^2}\right)^{-1},$$
$$\mu_P = \frac{\tau_P^2}{\tau^2}\cdot\mu + \frac{\tau_P^2}{\sigma^2}\cdot\ln(x_0) + \frac{\tau_P^2}{\kappa^2}\cdot\delta_0.$$

Das Unternehmen zieht daraufhin die aktualisierte Vorhersageverteilung für die Prämienkalkulation heran. Kommentieren Sie die Modellannahmen und entwickeln Sie einen Vorschlag, wie Ihre Kritikpunkte abgestellt werden können.

Aufgabe 3. Extremwerttheorie. *[15 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Nennen Sie zwei Beispiele von high severity/low frequency events im aktuariellen Risikomanagement. Diskutieren Sie kurz die Probleme beim Umgang mit derartigen Ereignissen. Warum kann EVT bei der Messung der mit high severity/low frequency events verbundenen Risiken hilfreich sein?

(b) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die peaks over threshold (POT) Methode in der Extremwerttheorie und die Grundidee des zugehörigen tail-Schätzers. Zur Erinnerung: der POT tail Schätzer ist durch den folgenden Ausdruck gegeben

$$\widehat{\bar{F}}(x) = \frac{N_u}{n}\left(1 + \hat{\xi}\,\frac{x-u}{\hat{\beta}}\right)^{-1/\hat{\xi}}, \quad x > u. \tag{1}$$

(Hier bezeichnet u die bei der Anwendung des Schätzers verwendete Schwelle und N_u die Anzahl der Beobachtungen, die die Schwelle u überschreiten.)

(c) *[4 Punkte]* Nehmen Sie an, dass die POT Methode auf Schadendaten angewendet wird, die einer Pareto Verteilung mit Überlebensfunktion $\bar{F}(x) = (K/x)^{\alpha}$, $x > K$, mit Parametern $K, \alpha > 0$ genügt. Welche Werte würden Sie für den Schätzwert $\hat{\xi}$ erwarten, vorausgesetzt Sie verfügen über eine ausreichend große Anzahl an Beobachtungen? Was würde für normalverteilte Schadendaten passieren? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort.

(d) *[3 Punkte]* Nehmen Sie an, dass der tail einer unbekannten Verlustverteilung durch den tail Schätzer (1) modelliert wird. Berechnen Sie einen Schätzer für VaR_α unter der Annahme, dass $\alpha > 1 - N_u/N$ gilt.

Aufgabe 4. Risikomaße und Kapitalallokation *[15 Punkte]*

Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftseinheiten mit zugehörigem Verlust gegeben durch die Zufallsvariablen L_i, $1 \le i \le d$. Der Verlust des Gesamtunternehmens ist also $L := \sum_{i=1}^{d} L_i$. Seien ϱ ein positiv homogenes Risikomaß wie etwa VaR_α oder der expected shortfall ES_α und sei $\varrho(L)$ das Risikokapital für das Gesamtunternehmen. In diesem Zusammenhang ordnet ein Kapitalallokationsprinzip den einzelnen Geschäftsbereichen das ökonomische Kapital $\mathrm{AC}_1, \dots, \mathrm{AC}_d$ zu, wobei die sogenannte full allocation property $\varrho(L) = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{AC}_i$ gelten muss.

(a) *[4 Punkte]* Definieren Sie für $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)'$ die Zufallsvariable $L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i L_i$ und setzen Sie $r_\varrho(\boldsymbol{\lambda}) = \varrho(L(\boldsymbol{\lambda}))$. In diesem Zusammenhang ist das Euler-Kapitalallokationsprinzip gegeben durch

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\partial r_\varrho}{\partial \lambda_i}(\mathbf{1}), \quad 1 \le i \le d.$$

Erläutern Sie kurz, warum Kapitalallokationsprinzipien bei der risikoadjustierten performance-Messung zum Einsatz kommen. Nennen Sie mindestens einen methodischen Vorteil des Euler Prinzips ("einfach" reicht nicht aus).

(b) *[3 Punkte]* Betrachten Sie eine Zufallsvariable L, die gemäß $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist. Zeigen Sie, dass für den expected shortfall

$$\mathrm{ES}_\alpha = \mu + \sigma \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha},$$

gilt, wobei φ die Dichte und q_α das α Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnen. *Hinweis:* Es gilt $\int x e^{-x^2/2} dx = -e^{-x^2/2}$.

(c) *[8 Punkte]* Expected shortfall contributions.

(i) *[6 Punkte]* Die Zufallsvariablen $(L_1, \dots, L_d)$ seien multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 0$ and Kovarianzmatrix Σ. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Euler Kapitalallokationen für $\varrho = \mathrm{ES}_\alpha$ (the sogenannten expected shortfall contributions) durch den Ausdruck

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\mathrm{var}(L)}} \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}$$

gegeben sind. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst unter Verwendung von Aufgabenteil i), dass

$$\mathrm{ES}_\alpha\Big(\sum_{i=1}^d \lambda_i L_i\Big) = (\boldsymbol{\lambda}' \Sigma \boldsymbol{\lambda})^{1/2} \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}.$$

(ii) *[2 Punkte]* Geben Sie eine alternative Darstellung der expected shortfall contributions an, die allgemein gilt (nicht nur für elliptische Verteilungen).

Aufgabe 5. Copulas und Risikoaggregation *[15 Punkte]*

Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit zwei Geschäftsbereichen und zugehörigem loss L_1, L_2. Das Unternehmen verwendet den VaR, um das Risikokapital für das Gesamtunternehmen zu bestimmen, so dass $\mathrm{SCR}_i = \mathrm{VaR}_\alpha(L_i)$, $i = 1, 2$. (SCR steht für solvency capital requirement). Um das firmenweite $\mathrm{SCR}(L)$ zu bestimmen, verwendet das Unternehmen eine Kapitalallokationsregel der Form

$$\mathrm{SCR}(L) = \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}; \tag{2}$$

hierbei ist $\rho \in [0, 1]$ ein Korrelationsparameter, der vom Regulator vorgegeben wird.

(a) *[3 Punkte]* Diskutieren Sie Stärken und Schwächen einer Kapitalallokationsregel der Form (2).

(b) *[4 Punkte]* Welche Aggregationsregel erhält man, wenn man in (2) $\rho = 1$ einsetzt? Ist diese Wahl von ρ immer konservativ, in dem Sinn, dass die Ungleichung $\mathrm{SCR}(L) \leq \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$ gilt?

(c) *[6 Punkte]* Nehmen Sie an, dass L_1 und L_2 lognormalverteilt sind, $L_1 \sim \mathrm{LN}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $L_2 \sim \mathrm{LN}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Für welche Abhängigkeitsstruktur ist die Korrelation zwischen den Risiken maximal? Ist dies auch die Abhängigkeitsstruktur, die den Value at Risk von L maximiert? Unter welchen Bedingungen an die Parameter μ_i, σ_i, $i = 1, 2$, ist die maximal mögliche Korrelation gleich 1?

(d) *[2 Punkte]* Diskutieren Sie im Hinblick auf Teilaufgabe c) die Aussage "Eine Korrelation nahe Null zwischen zwei Risiken impliziert immer ein großes Potential zur Diversifizierung von Risiken." (Betrachten Sie nur den Fall positiver Korrelationen.)

Aufgabe 6. Zinsrisiko und Zinsstrukturmodelle. *[30 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Auf welche Weise kann ein Receiver Swap mit Nominalwert 1 und Fixingterminen 1, 2, 3 (d.h. Zahlungszeitpunkten 2 und 3) zum Zeitpunkt 0 mit Hilfe von Zerobonds repliziert werden? Geben Sie eine geeignete Handelsstrategie mit dem Replikationsportfolio an.

(b) *[8 Punkte]* Nehmen Sie an, dass $P(t,S) > P(t,T) \cdot \frac{1}{1+(S-T)\cdot F(0,T,S)}$ für $t \leq T \leq S$ gilt, wobei $P(t,T)$ bzw. $F(0,T,S)$ den Preis des Zerobonds mit Fälligkeit T zur Zeit t bzw. die Forward-Rate für die künftige Periode $[T,S]$ zum Zeitpunkt 0 bezeichnen. Entwickeln Sie eine Arbitrage-Strategie.

(c) *[8 Punkte]* Sei $F(t,T,S)$ der einfache Terminzins (simply-compounded forward rate) zum Zeitpunkt t mit Ablauf $T \geq t$ und Fälligkeit $S > T$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}^T(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S,$$

wobei $\mathbb{E}^S$ den Erwartungswert unter dem S-forward-Maß Q^S bezeichnet. Diskutieren Sie dieses Resultat im Spezialfall $t = T$.

(d) *[4 Punkte]* Erklären Sie die grundlegende Idee hinter der Black 76 Formel für ein Caplet. In welchem Modellrahmen kann diese Idee mathematisch sauber implementiert werden? Diskutieren Sie Stärken dieses Modellrahmens im Vergleich zur klassischen Black 76 Formel.

Aufgabe 7. Risikomanagement für Firmenanleihen und doppelt stochastische Ausfallzeiten *[15 Punkte]*

Betrachten Sie ein Portfolio von Firmenanleihen im Anlageportfolio eines Versicherers.

(a) *[6 Punkte]* Beschreiben Sie die Risiken, denen dieses Portfolio ausgesetzt ist (mindestens 3 Risikokategorien). Nennen Sie ein Risiko, das durch die Verwendung von CDS als hedging Instrument stark reduziert werden kann, beschreiben Sie die zugehörige Strategie und gehen Sie kurz auf potentielle Probleme ein. Nennen Sie ein anderes Risiko, das nicht mit CDS abgesichert werden kann.

(b) *[9 Punkte]* Betrachten Sie eine einzige ausfallbehaftetete Nullkuponanleihe mit einer Restlaufzeit von $\overline{T} = 2$ Jahren; der Ausfallzeitpunkt sei mit τ bezeichnet. Der Wert der Anleihe nach einem Ausfall sei gleich 0 (zero recovery); die Auszahlung im Zeitpunkt $\overline{T}$ ist $1_{\{\tau > \overline{T}\}}$ und der heutige ($t = 0$) Preis der Anleihe sei mit p_0 bezeichnet. Nehmen Sie an, dass die ausfallfreie Zinsrate gleich der Konstanten $r > 0$ ist, dass τ unter dem historischen Wahrscheinlichkeitsmaß doppelt stochastisch ist mit hazard rate process γ^P und dass τ unter dem risikoneutralen Maß Q doppelt stochastisch ist mit hazard rate process γ^Q. Außerdem gelte die Beziehung

$$\gamma_t^P = \psi_t \text{ und } \gamma_t^Q = 2\psi_t\,,$$

wobei ψ einem CIR Process mit P-Parametern $\kappa^P, \theta^P, \sigma > 0$ und mit Q-Parametern $\kappa^Q, \theta^Q, \sigma > 0$ folgt.

(i) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Simulation des Ausfallindikators $Y_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$ unter dem historischen Maß P.

(ii) *[5 Punkte]* Entwickeln Sie einen Simulationsalgorithmus zur Berechnung der Verlustverteilung und des VaR der Anleihe über den Zeithorizont $T = 1$ (Jahr). Definieren Sie dazu die Funktion

$$p(t_1, t_2, \psi; r, \rho, \kappa, \theta, \sigma) = E\Big(\exp\Big(-\int_{t_1}^{t_2} r + \rho\psi_s ds \Big) \mid \psi_{t_1} = \psi \Big), .$$

Hierbei folge ψ einem CIR Prozess mit generischen Parametern κ, θ, σ. (Die Funktion $p(t_1, t_2, \psi; r, \rho, \kappa, \theta, \sigma)$ kann in geschlossener Form berechnet werden, aber die genaue Form von p ist nicht relevant für die Aufgabe.) Erläutern Sie, für welchen Teil der Simulation Sie auf risikoneutrale bzw. auf historische Größen zurückgreifen müssen.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Fallstudie – die Rolle des Chief Risk Officers ausfüllen.

FEHLT

Aufgabe 2. Risikomaße und Modellierung.

(a) (i) Die Lösung der Gleichung $1-\exp(-\sqrt{x})=\alpha$ ergibt den Value at Risk:

$$VaR_\alpha(X)=(\ln(1-\alpha))^2.$$

Wir erhalten $VaR_{0.99}(X)=21.21$.

(ii) Die mittlere Überschreitung der Schwelle 20 ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X-20)^+) &= \int_{20}^{\infty}(x-20)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\exp(-\sqrt{x})\,dx\\
&= \int_{\sqrt{20}}^{\infty}(y^2-20)\cdot\exp(-y)\,dy\\
&= \int_{\sqrt{20}}^{\infty}y^2\exp(-y)\,dy-20\cdot\exp(-\sqrt{20})\\
&= [\exp(-y)(-y^2-2y-2)]_{\sqrt{20}}^{\infty}-0.2285\\
&= 0.1250.
\end{aligned}$$

(b) (i) Die a-posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung x_0, ist modulo einer Konstanten gegeben durch

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|x_0) &\propto f_X(x_0|\theta)\cdot f_\Theta(\theta)\\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x_0)-\theta)^2\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\right)\\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}\left((\sigma^2+\tau^2)\theta^2-(2\tau^2\ln(x_0)+2\sigma^2\mu)\theta\right)\right)\\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}}\left(\theta-\frac{\tau^2\ln(x_0)+\sigma^2\mu}{\sigma^2+\tau^2}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Modulo einer Konstante ist dies die Dichte von $\mathcal{N}\left(\frac{\tau^2\ln(x_0)+\sigma^2\mu}{\sigma^2+\tau^2},\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}\right)$.

(ii) Wir erhalten die Vorhersageverteilung von X durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a-posteriori Dichte des Parameters.

$$\begin{aligned}
f_X(x|x_0) &= \int f_X(x|\theta)\cdot\pi(\theta|x_0)\,d\theta\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\tau_P}\exp\left(-\frac{(\theta-\mu_P)^2}{2\cdot\tau_P^2}\right)d\theta
\end{aligned}$$

(iii) Die Vorhersageverteilung aus (ii) ist gegeben durch $LN(\mu_P, \sigma^2 + \tau_P^2)$:

$$\begin{aligned}
f_{X|x_0}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(\frac{-(\ln(x)-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau_P} \exp\left(\frac{-(\theta-\mu_P)^2}{2\tau_P^2}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_P^2+\sigma^2)}x} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu_P)^2}{2(\tau_P^2+\sigma^2)}\right) \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\tau_P^2+\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\tau_P\sigma} \exp\left(-\frac{\tau_P^2+\sigma^2}{2\tau_P^2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\tau_P^2\ln(x)+\sigma^2\mu_P}{\tau_P^2+\sigma^2}\right)^2\right) d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_P^2+\sigma^2)}x} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu_P)^2}{2(\tau_P^2+\sigma^2)}\right), \ x > 0
\end{aligned}$$

Ihr Expected Shortfall lautet

$$ES_\alpha(X|x_0) = \frac{\exp\left(\mu_P + 0.5(\sigma^2+\tau_P^2)\right)}{1-\alpha} \Phi\left(\sqrt{\sigma^2+\tau_P^2} - \Phi^{-1}(\alpha)\right),$$

wobei Φ die Standardnormalverteilungsfunktion bezeichnet. Würde das Risikomaß auf Basis des Punktschätzers μ_P kalkuliert, erhielten wir den geringeren Wert

$$ES_\alpha(X) = \frac{\exp\left(\mu_P + 0.5\sigma^2\right)}{1-\alpha} \Phi\left(\sqrt{\sigma^2} - \Phi^{-1}(\alpha)\right).$$

Die positive Differenz kann als Maß für das Parameterrisiko betrachtet werden.

(iv) Wenn der Experte den Anstieg der Schadenhöhen antizipieren soll, ist die Annahme, der Mittelwert der aktuellen Schadenhöhe und der Mittelwert der Experteneinschätzung seien gleich, inkonsistent.

Es gibt verschiedene alternative Ansätze. Das Bayesianische Modell-Update könnte mit der Experteneinschätzung δ_0 und einem inflationierten Beobachtungswert durchgeführt werden, zum Beispiel $x_0 \cdot \frac{\delta_0}{\mathbb{E}(X)}$, um die neuen Trends in stetiger Weise einzubeziehen. Falls das Unternehmen von einem echten Strukturbruch in der Rechtssprechung ausgeht, könnte es bevorzugen, eine neue a priori-Verteilung für Θ an Experteneinschätzungen zu kalibrieren und das Bayesianische Modelle neu zu starten.

Aufgabe 3. Extremwerttheorie (EVT).

(a) Beispiele für high frequency/low severity events in der Schadenversicherung: Versicherung gegen Naturkatastrophen oder gegen Terrorattacken; Risiken aufgrund von Rechtsstreitigkeiten im operational risk etc.

High frequency/low severity events sind aus verschiedenen Gründen schwer zu managen: zum einen hat man meist mit Datenknappheit zu tun (seltenes Auftreten von Großschäden impliziert wenige Beobachtungen); zum anderen weist die Schadensverteilung eines Portfolios mit high frequency/low severity Risiken eine sehr hohe Variabilität auf, so dass Diversifikation der Verluste nur im Zeitablauf d.h. über mehrere Bilanzperioden möglich ist. (In normalen Jahren werden die Prämieneinnahmen die Schäden übersteigen, in Katastrophenjahren sind die Schäden größer als die Prämien.)

EVT kann einen Beitrag zur Schätzung der Ränder der Schadenshöhenverteilung und somit zum Umgang mit der Datenproblematik leisten.

(b) Grundidee der POT Methode: Man wählt eine hohe Schwelle u. Für $x > u$ gilt $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u)$, wobei F_u die excess distribution von F bezüglich u bezeichnet. Falls u nicht zu groß ist, kann $\bar{F}(u)$ durch die empirische Überlebensverteilung geschätzt werden; dies führt auf den Schätzer N_u/N. Die excess Verteilung wird durch eine GPD modelliert (basierend auf dem Grenzwertsatz von Pickands, Balkema und de Haan), $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$ lassen sich durch Maximum Likelihood schätzen.

(c) Im Pareto Fall sollte gelten, dass $\widehat{\xi} \approx 1/\alpha$, da die Pareto Verteilung einen power tail mit Abklingrate α hat; im Fall der Normalverteilung erwartet man $\widehat{\xi}$ nahe bei Null, da die Normalverteilung einen exponentiell schnell abfallenden tail hat.

(d) Wir müssen die Gleichung $\widehat{\bar{F}}(x) = (1-\alpha)$ lösen; dies führt nach einigen elementaren Umformungen auf den Schätzer

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{N_u/N}\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right).$$

Aufgabe 4. Risikomaße und Kapitalallokation.

(a) Bei Verwendung eines risikoadjustierten Performance Maßes der Form $\mathrm{RORAC}_i =$ expected return of unit i/AC_i muss man das ökonomische Kapital AC_i bestimmen. An dieser Stelle werden Kapitalallokationsprinzipien verwendet, um die Beziehung zwischen L_i und L auf angemessene Weise abzubilden. Das Euler Prinzip gibt die richtigen Signale für die RORAC basierte performance Messung (RORAC compatibility) und es belohnt Diversifikation. (nur ein Punkt verlangt, dieser sollte allerdings etwas detaillierter ausgeführt werden).

(b) Da ES translationsinvariant und positiv homogen ist, gilt, dass

$$\mathrm{ES}_\alpha = \mu + \sigma E\left(\frac{L-\mu}{\sigma} \,\middle|\, \frac{L-\mu}{\sigma} \geq q_\alpha\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right);$$

daher reicht es aus, den expected shortfall für die standard Normalverteilung zu berechnen. Hier erhält man mit $\tilde{L} := (L-\mu)/\sigma$

$$\mathrm{ES}_\alpha(\tilde{L}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} l\varphi(l)\,dl = \frac{1}{1-\alpha}[-\varphi(l)]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}.$$

(c) (i) Da $(L_1,\dots,L_d) \sim N_d(0,\Sigma)$ folgt, dass $L(\boldsymbol{\lambda}) \sim N(0,\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$ mit $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. Nach Aufgabe b) folgt also

$$\mathrm{ES}_\alpha(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})} = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}.$$

Damit erhalten wir für das Euler-Prinzip

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i} r_{\mathrm{ES}_\alpha}(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha})\frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\mathrm{SD}(L)} = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\frac{\mathrm{cov}(L_i,L)}{\mathrm{SD}(L)}.$$

(ii) Die expected shortfall contributions haben die alternative Darstellung

$$\mathrm{AC}_i = E(L_i \mid L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)).$$

Aufgabe 5. Copulas und Risikoaggregation.

(a) Vor- und Nachteile.

- Pro: Leicht berechenbar, Diversifikation wird zumindest auf informelle Weise berücksichtigt.
- Con: nicht modellbasiert außer für elliptische Verteilungen; beruht auf dem Konzept der linearen Korrelation; es ist schwer einen angemessenen Wert für ρ zu bestimmen.

(b) Für $\rho = 1$ erhält man die sogenannte “simple summation”, $\mathrm{SCR}(L) = \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$. Diese Wahl von ρ ist nicht konservativ, falls VaR als Risikomaß verwendet wird; Gegenbeispiele sind alle Beispiele, in denen VaR nicht subadditiv ist. Für ES ist simple summation konservativ, da der ES subadditiv ist.

(c) Nach dem Satz von Höffding wird die maximale Korrelation $\rho_{\max}$ erreicht, falls beide Risiken komonoton sind. In diesem Fall gilt, dass $\mathrm{VaR}(L_1+L_2) = \mathrm{VaR}(L_1) + \mathrm{VaR}(L_2)$. Dies ist im Allgemeinen nicht der Maximalwert von VaR (fehlende Subadditivität). Die Gleichung $\rho_{\max} = 1$ gilt genau dann, wenn beide Zufallsvariablen vom gleichen Typ sind und somit für $\sigma_1 = \sigma_2$. (Die μ_i dürfen verschieden sein.)

(d) Die Aussage ist im Allgemeinen nicht korrekt; für bestimmte Randverteilungen können sogar komonotone (also perfekt abhängige) Risiken eine Korrelation nahe Null aufweisen. Für elliptisch verteilte Risiken ist die Aussage hingegen korrekt.

Aufgabe 6. Zinsrisiko und Zinsstrukturmodelle.

(a) Sei K der feste Zinssatz. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden K Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit $T = 2$ und $1 + K$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit $T = 3$ gekauft sowie ein Zerobond mit Fälligkeit $T = 1$ verkauft. Der Preis des Replikationsportfolios beträgt

$$P = K \cdot P(0,2) + (1+K) \cdot P(0,3) - P(0,1),$$

wobei $P(t,T)$ den Preis des Zerobonds mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Zum Zeitpunkt $t = 1$ werden $\frac{1}{P(1,2)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 2 verkauft, um eine Geldeinheit an den Inhaber des zur Zeit 1 fällig gewordenen Zerobonds auszuzahlen. Es verbleiben $K - \frac{1}{P(1,2)} = K - L(1,2) - 1$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 2.

Zum Zeitpunkt $t = 2$ zahlt der Receiver Swap den Betrag $K - L(1,2)$ aus. Um die verbleibende Position von -1 Geldeinheit auszugleichen, werden $\frac{1}{P(2,3)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 3 verkauft. Es verbleiben

$$1 + K - \frac{1}{P(2,3)} = K - L(2,3)$$

Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 3, die zum Zeitpunkt 3 den Betrag $K - L(2,3)$ auszahlen.

(b) Zur Zeit $t = 0$ verkaufe $\frac{P(t,T)}{P(t,S)}$ Zerobonds mit Fälligkeit S und kaufe 1 Zerobond mit Fälligkeit T, so dass keine Zahlung fällig wird. Schließe darüber hinaus einen Receiver Swap mit Strike $K = F(t,T,S)$ und Nominal 1 kostenlos ab. Zur Zeit T wird die Zahlung 1 des fälligen Zerobonds in $\frac{1}{P(T,S)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit S investiert. Zur Zeit S ist die resultierende Zahlung gegeben durch

$$\begin{aligned} &\frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(t,T)}{P(t,S)} + (S-T)\cdot F(t,T,S) - (S-T)\cdot L(T,S) \\ > \;& \frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(t,T)}{P(t,S)} + \left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right) - \left(\frac{1}{P(T,S)} - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Dies bedeutet einen strikt positiven Gewinn ohne Verlustrisiko.

(c) Da Zerobonds handelbare Finanzinstrumente darstellen, trifft dies auch für das Instrument

$$F(t,T,S)P(t,S) = \frac{1}{S-T}(P(t,T) - P(t,S))$$

zu. Folglich ist sein diskontierter Preisprozess

$$\frac{F(t,T,S)P(t,S)}{P(t,S)} = F(t,T,S)$$

ein Martingal unter dem Forward-Maß Q^S. Daher gilt

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S.$$

Im Spezialfall $t = T$ nimmt diese Beziehung die Gestalt

$$\mathbb{E}^T(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq T < S,$$

an, da $F(T,T,S) = L(T,S)$ gilt. Dies zeigt, dass zur Zeit $u \leq T$ die Forward- Rate $F(u,T,S)$ die verfügbare Marktinformation über den Kassazins in der zukünftigen Periode $[T,S]$ reflektiert.

(d) Die grundlegende Idee der Black 76 Formel für Caplets besteht darin, die Forward-Rate $F(u,T,S)$, $0 \leq u \leq T$, mit einer sotchastischen Differentialgleichung vom Black-Scholes Typ

$$dF(u,T,S) = \sigma \cdot F(u,T,S)dW(u), \quad 0 \leq u \leq T,$$

bezüglich einer Brownschen Bewegung W zu modellieren und die Black-Scholes Formel für Call-Optionen zu übertragen.

Dieser Ansatz wird mathematisch rigoros in der Theorie der LIBOR-Marktmodelle umgesetzt. Jene Modelle ermöglichen es, zeitabhängige und stochastische Volatilitäten abzubilden, und verbessern somit die Kalibrierung an Marktpreise von Zinsderivaten.

Aufgabe 7. Risikomanagement für Unternehmensanleihen und doppelt stochastische Ausfallzeiten.

(a) Ein Portfolio von Firmenanleihen wird unter anderem von Zinsänderungsrisiko, Spread Risiko (das Risiko von Änderungen in den credit spreads), Ausfallrisiko und dem Risiko von Verlusten aufgund von rating Änderungen beeinflusst.

CDSs können zur Absicherung des Ausfallrisikos und - zu einem gewissen Grad - des Spread Risikos verwendet werden (protection buyer Position). Potentielle Probleme: Basisrisiko (wegen maturity mismatch und da CDS nur für große Emittenten gehandelt werden); counterparty risk. Zinsrisiko kann nicht durch CDSs abgesichert werden.

(b) (i) Um eine Trajektorie des Ausfallsindikators $Y = 1_{\{\tau \leq t\}}$, $0 \leq t \leq T$ zu generieren, setzt man die threshold simulation ein. Der Algorithmus ist wie folgt:

1. Erzeuge $E \sim \text{Exp}(1)$.
2. Erzeuge eine Trajektorie von ψ unter Verwendung der P-Parameter $\kappa^P, \theta^P, \sigma$ und berechne $\Gamma_t^P = \int_0^t \psi_s ds$, $t \leq T$.
3. Falls $\Gamma_T^P < E$ setze $Y_t = 0$ für $0 \leq t \leq T$. Andernfalls definiere $\tau := \inf\{t \geq 0 : \Gamma_t^Q \geq E\}$ und setze $Y_t = 0$ für $t < \tau$ und $Y_t = 1$ für $t \geq \tau$.

(ii) Der folgende Algorithmus kann verwendet werden, um eine Realisierung des losses der Anleihe zu erzeugen.

1. Erzeuge einen Pfad des Prozesses ψ unter Verwendung der P Parameter $\kappa^P, \theta^P, \sigma$ bis zum Zeitpunkt $T = 1$.
2. Erzeuge (für den Pfad aus Schritt 1) eine Realisierung des Ausfallindikators $1_{\{\tau>1\}}$ mittels threshold simulation (siehe Aufgabenteil i)
3. Die Ausgabe des Algorithmus ist dann der loss

$$p_0 - 1_{\{\tau>1\}} p(1, 2, \psi_1; r, 1.5, \kappa^Q, \theta^Q, \sigma)$$

Häufige Wiederholung des Algorithmus erzeugt eine Approximation der Verlustverteilung; der Value at Risk kann dann mittels empirischer Quantilschätzung bestimmt werden (Details sind nicht gefragt).

Written exam CERA module A

Foundations and Quantitative Methods of ERM

in accordance with the examination regulations no. 2.0
of Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
for the acquisition of the CERA qualification

18 May 2018

Please note:

- The use of a pocket calculator is permitted.
- The maximum score is 180 points. The examination is passed if the total score is at least 90 points.
- Please check the exam sheets for completeness. The exam has 7 pages.
- All answers shall be justified. For computational tasks it is required to provide the solution approach.

Question 1. Case study – Carrying out the role of CRO. *[60 points]* Assume that you are appointed CRO of Letzeburg Re, a worldwide active reinsurance group. You are responsible for group risk management. The headquarter of the group´s ultimate parent, Letzeburg Re SE, is located in Luxemburg. Letzeburg Re SE is traded in the stock market. There is no majority shareholder. Legally independent subsidiaries are located in Ireland, Bermuda, USA und Australia. The premium volume – reinsurance business only – splits into 10% life & health and 90% non-life, with 50% of the non-life premium originating from non-proportional natural catastrophe business. Main exposures are in North America (mainly earthquakes and hurricanes) and Europe (mainly winter storms and flooding). To comply with capital requirements under Solvency II Letzeburg Re runs a full internal model that was approved by the Luxemburg supervisory authority. Targeted rating categories from rating agencies A.M. Best and Standard & Poor’s are the second highest available (A+ from A.M. Best, AA from Standard and Poor’s) in order to gain attractive business from clients.

Your main task is the establishment and maintenance of the group-wide enterprise risk management system. You are responsible for running the internal model, aggregate control for natural catastrophes as well as all aspects of qualitative risk management: Regular checks of risk strategy, internal and external risk reporting and management of operational risks. Once per quarter you report on the actual risk situation and changes since the last report to the risk committee, which consists of five members: Yourself (CRO) and the four board members CEO, CFO, COO L& H and COO Non-life.

(a) *[8 points]* Your CEO has asked you to explain in the next risk committee meeting how risk management contributes to value creation at Letzeburg Re based on two examples. Please outline your answer.

(b) *[12 points]* Different stakeholders of your company have different valuation approaches. Please compare the different valuation approaches of three stakeholder groups.

(c) *[8 points]* Which possibilities for specific value increases of Letzeburg Re given the current risk profile do you identify in your role as CRO? Please propose to your management two concrete measures.

(d) *[10 points]* Measurement of ERM culture:

   (i) *[4 points]* List positive and negative criteria (two for each) to describe the ERM culture of a company.

   (ii) *[6 points]* Derive out of these criteria why quantification of ERM culture is difficult, and discuss one pro and one con argument.

(e) *[22 points]* Letzeburg Re has been writing disability business in the Australian market for several years. Now it turns out that one of its clients has been treating customers unfairly in their claims handling. Determine which types of risks can be identified linked to this situation for Letzeburg Re. For three material risks, perform a risk analysis and assessment based on Letzeburg Re's risk appetite (you can make assumptions regarding how this risk appetite looks like), and select suitable mitigation actions.

Question 2. Risk Measures and Modeling. *[30 points]*

(a) *[8 points]* Consider a loss variable X with cumulative distribution function

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\sqrt{x}\right), \quad x \geq 0.$$

(i) *[2 points]* Determine the risk measure value at risk $\mathrm{VaR}_{0.99}(X)$.

(ii) *[6 points]* Compute the mean excess of X over the threshold 20.

Hint. $\int x^2 \exp(-x)\, dx = \exp(-x)\left(-x^2 - 2x - 2\right)$

(b) *[22 points]* An insurance company opts for a Bayesian model to price a non-life policy. It makes the following assumptions.

- The claim size X, given the value θ of the unknown parameter Θ, is supposed to be $LN(\theta, \sigma^2)$-distributed.
- Based on an external data pool, the prior distribution of the parameter Θ is supposed to be $\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$.

Hint. The lognormal distribution $LN(\theta, \sigma^2)$ has the density

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0,$$

and the expected value $\exp(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)$.

(i) *[8 points]* Show that the posterior density of Θ, given the observation x_0 is the normal density with parameters

$$\tau_P^2 = \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1} = \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2},$$
$$\mu_P = \frac{\tau_P^2}{\tau^2} \cdot \mu + \frac{\tau_P^2}{\sigma^2} \cdot \ln(x_0).$$

(ii) *[2 points]* State an integral that determines the predictive distribution of X, given x_0.
Hint. You are **not** expected to compute the integral.

(iii) *[4 points]* The predictive distribution from ii) turns out to be $LN(\mu_P, \sigma^2 + \tau_P^2)$. Its expected shortfall is given by

$$\mathrm{ES}_\alpha(X|x_0) = \frac{\exp\left(\mu_P + 0.5(\sigma^2 + \tau_P^2)\right)}{1-\alpha} \cdot \Phi\left(\sqrt{\sigma^2 + \tau_P^2} - \Phi^{-1}(\alpha)\right),$$

where Φ denotes the cumulative standard normal distribution function. Discuss to what extent $\mathrm{ES}_\alpha(X|x_0)$ reflects parameter risk.

(iv) *[8 points]* Due to changing dispensation of justice, the company expects an increase in claims. In order to anticipate this increase when calculating premiums, the company asks an independent expert to assess the future mean value of the parameter Θ. Given the answer $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$ by the expert, the company carries through an analogous Bayesian analysis assuming that conditionally, given $\Theta = \theta$, the expert opinion δ is $\mathcal{N}(\theta, \kappa^2)$-distributed. The Bayesian analysis taking into account the recent observation x_0 and the new expert assessment δ_0 yields an updated posterior normal distribution of Θ with parameters

$$\begin{aligned} \tau_P^2 &= \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\kappa^2}\right)^{-1}, \\ \mu_P &= \frac{\tau_P^2}{\tau^2} \cdot \mu + \frac{\tau_P^2}{\sigma^2} \cdot \ln(x_0) + \frac{\tau_P^2}{\kappa^2} \cdot \delta_0. \end{aligned}$$

The company then bases its calculation on the updated predictive distribution. Comment on the model assumptions and develop a proposal to remedy your criticism.

Question 3. Extreme value theory (EVT). *[15 points]*

(a) *[4 points]* Give two examples of high severity/low frequency events in actuarial risk management and discuss briefly the challenges in dealing with such events. Why could EVT be helpful in the measurement of such risks?

(b) *[4 points]* Explain the peaks over threshold (POT) method in EVT and the key idea that underlies the corresponding tail estimator given by

$$\widehat{\bar{F}}(x) = \frac{N_u}{n}\left(1 + \widehat{\xi}\,\frac{x-u}{\widehat{\beta}}\right)^{-1/\widehat{\xi}}, \; x > u. \tag{1}$$

(u is the threshold chosen in the application of the method and N_u the number of observations that exceed the threshold.)

(c) *[4 points]* Suppose that the POT method is applied to claims data that follow a Pareto distribution with tail function $\bar{F}(x) = (K/x)^\alpha, x > K,$ for parameters $K, \alpha > 0$. What values of $\widehat{\xi}$ would you expect given a sufficient amount of data. What would happen for normally distributed data? Give a short justification.

(d) *[3 points]* Suppose that the tail of an unknown loss distribution is modelled by the tail estimator (1). Compute an estimator of VaR_α for $\alpha > 1 - N_u/N$.

Question 4. Risk measures and capital allocation. *[15 points]* Consider an insurance company with d business units. The loss of these units is described by the random variables L_i, $1 \le i \le d$ so that the total loss is given by $L := \sum_{i=1}^d L_i$. Let ϱ by a positively homogenous risk measure such as VaR_α or expected shortfall ES_α, and let $\varrho(L)$ be the risk capital for the entire company. In this context a capital allocation principle allocates the capital $\mathrm{AC}_1, \dots, \mathrm{AC}_d$ to the individual business units, where the so-called full allocation property $\varrho(L) = \sum_{i=1}^d \mathrm{AC}_i$ has to hold.

(a) *[4 points]* Define for $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)'$ the random variable $L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i L_i$ and let $r_\varrho(\boldsymbol{\lambda}) = \varrho(L(\boldsymbol{\lambda}))$. Then the *Euler capital allocation principle* is given by

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\partial r_\varrho}{\partial \lambda_i}(\mathbf{1}), \quad 1 \le i \le d.$$

Explain why capital allocation principles are used in risk adjusted performance measurement and discuss at least one economic argument that supports the use of the Euler principle (simplicity and tractability are not enough).

b) *[3 points]* Consider a random variable $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ and show that the expected shortfall is given by

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha},$$

where φ denotes the density and q_α the α quantile of the standard normal distribution. Hint: it holds that $\int x e^{-x^2/2} dx = -e^{-x^2/2}$.

(b) *[8 points]* Expected shortfall contributions

(i) *[6 points]* Assume that $(L_1, \dots, L_d)$ are multivariate normal with mean $\mu = 0$ and covariance matrix Σ. Show that in this case the Euler capital allocations for $\varrho = \mathrm{ES}_\alpha$ (the so-called expected shortfall contributions) are given by

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\mathrm{var}(L)}} \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}.$$

Hint: show using i) that $\mathrm{ES}_\alpha(\sum_{i=1}^d \lambda_i L_i) = (\boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda})^{1/2} \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}$.

(ii) *[2 points]* State an alternative representation of the expected shortfall contributions that holds generally (not only for elliptic distributions).

Question 5. Copulas and risk aggregation. *[15 points]* Consider an insurance company with two business lines and associated loss L_1, L_2. The company uses

VaR to determine the risk capital for the individual business lines so that $\mathrm{SCR}_i = \mathrm{VaR}_\alpha(L_i)$, $i = 1, 2$. (SCR stands for solvency capital requirement). In order to determine the firm-wide $\mathrm{SCR}(L)$ the company uses a capital aggregation rule of the form

$$\mathrm{SCR}(L) = \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}; \tag{2}$$

here $\rho \in [0, 1]$ is a correlation parameter that is exogenously given by the regulator.

(a) *[3 points]* Discuss strengths and weaknesses of a capital aggregation rule of the form (2).

(b) *[4 points]* Which aggregation rule does one obtain for $\rho = 1$ in (2). Is this choice always conservative in the sense that $\mathrm{SCR}(L) \leq \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$?

(c) *[6 points]* Assume that L_1 and L_2 are lognormally distributed, $L_1 \sim \mathrm{LN}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $L_2 \sim \mathrm{LN}(\mu_2, \sigma_2^2)$. For which dependence structure is the correlation between the two risks maximal? Is this also the dependence structure that maximizes Value at Risk of L? Under which conditions on the parameters μ_i, σ_i is the maximal correlation equal to one?

(d) *[2 points]* Comment in view of c) on the statement “A correlation of two risks close to zero always implies a high potential for diversification.” (Concentrate on the case of positive correlation.)

Question 6. Interest rate risk and term structure models. *[30 points]*

(a) *[10 points]* Describe how to replicate a receiver swap with notional amount 1 and reset dates 1, 2, 3 (i.e. payment dates 2 and 3) at time 0 using zero bonds. State a suitable trading strategy and the replicating portfolio.

(b) *[8 points]* Assume that $P(t, S) > P(t, T) \cdot \frac{1}{1+(S-T)\cdot F(0,T,S)}$ for some $t \leq T \leq S$, where $P(t, T)$ and $F(0, T, S)$ denote the price of the zero bond with maturity T at time t and the forward rate for the future period $[T, S]$ at time 0, respectively. Develop an arbitrage strategy.

(c) *[8 points]* Let $F(t, T, S)$ be the simply-compounded forward rate at time t with expiry time $T \geq t$ and maturity $S > T$. Prove

$$\mathbb{E}^T(F(t, T, S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u, T, S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S,$$

where $\mathbb{E}^S$ denotes the expected value under the S-forward measure Q^S. Discuss this result in the special case $t = T$.

(d) *[4 points]* Explain the basic idea underlying the Black 76 formula for a caplet. In which modeling framework can this idea be implemented in a mathematically rigorous way? Discuss strengths of this framework as opposed to the classical Black 76 formula.

Question 7. Risk management for corporate bonds and doubly stochastic default times. *[15 points]* Consider a portfolio of corporate bonds in the asset portfolio of an insurer.

(a) *[6 points]* Describe the risks that affect this portfolio (at least 3 risk categories). Give an example of a risk that can be mitigated by using CDSs as a hedging instrument, describe the corresponding strategy and mention ensuing problems. Describe another risk type that cannot be hedged with CDS.

(b) *[9 points]* Consider a single corporate zero-coupon bond with time to maturity $\overline{T} = 2$ years and denote by τ the default time of the bond. The recovery value of the bond is zero so that its payment at $\overline{T}$ is $1_{\{\tau > \overline{T}\}}$ and the current price of the bond is p_0.

Assume that the risk-free interest rate is equal to the constant $r > 0$, that under the historical probability measure P, τ is doubly stochastic with hazard rate process γ^P and that under the risk-neutral measure Q, it is doubly stochastic with hazard rate process γ^Q Moreover,

$$\gamma_t^P = \psi_t \text{ and } \gamma_t^Q = 2\psi_t$$

where ψ follows a CIR process with P-parameters $\kappa^P, \theta^P, \sigma > 0$ and Q-parameters $\kappa^Q, \theta^Q, \sigma > 0$.

(i) *[4 points]* Describe an algorithm to generate realization of the default indicator $Y_t = 1_{\{\tau \le t\}}$ under the historical measure P.

(ii) *[5 points]* Develop a simulation algorithm to compute the loss distribution and the VaR of the bond over the time horizon $T = 1$ year. Define for this the function

$$p(t_1, t_2, \psi; r, \rho, \kappa, \theta, \sigma) = E\Big(\exp\Big(-\int_{t_1}^{t_2} r + \rho\psi_s ds\Big) \mid \psi_{t_1} = \psi\Big),$$

where ψ follows a CIR process with generic parameters κ, θ, σ. (Note that $p(t_1, t_2, \psi; r, \rho, \kappa, \theta, \sigma)$ is known explicitly, but the precise form of this function is not required). Explain, for which part of the simulation risk-neutral respectively historical quantities are needed.

Proposal for solution

Question 1. Case study – Carrying out the role of CRO.

(a) Risk management is designed following the foundations of ERM by linking performance and systematic evaluation of risks and opportunities. More concretely, as first example specifically for a reinsurer it is important to anticipate the clients are likely to be exposed and have a clear view of emerging risks. ERM thus provides early insights in business opportunities and a clear view on the risk-return-relation. As second example, by our transparent and targeted communication throughout the group (e.g. quarterly risk report) we enhance risk awareness but also bottom-up and top-down the information on opportunities. Thus, risk management creates value by avoiding losses, revealing opportunities and allowing for risk-return-balanced decisions. At Letzeburg Re by running the internal model it is possible to analyse which business segments are profitable (creating at least the return that is necessary to serve the bound capital) and which business segments are unprofitable. Also, it is possible to analyse the diversification effect between business segments and between risk categories. Possibilities for value creation are the support for underwriting profitable business, the avoidance of unprofitable business and unwanted risk realisations and the support of the value proposition from third parties. This includes all aspects of qualitative risk management that are helping to maintain and increase confidence in Letzeburg Re‘s value proposition. Example for supporting profitable business: if only one of two treaties can be underwritten because of capacity constraints use the internal model to find out which treaty is generating more value. Example for avoiding unwanted event realization: use natural catastrophe modeling to find out where limits for natural catastrophe aggregates like US earthquakes or hurricanes should be set to avoid an undue exposure to the capital. Example for supporting the value proposition of third parties: demonstrate to analysts and rating agencies how effective you run your operational risk management system.

(b) Shareholders are on the one hand interested in maximizing the return on the invested capital with given (and transparent) risk and on the other hand minimizing of the risk for a given return (shareholder value approach). This implies the avoidance of over-capitalization i.e. hold capital buffers beyond the agreed risk appetite. On the other hand this implies a risk-adequate capitalisation to avoid excessive risk for the invested capital. This implies a certain tension between short term maximisation of profit and long term stability. Letzeburg Re’s clients are interested in low premiums on the one hand and on the other hand in financial stability of their reinsurer and easy claims handling. Regulators are interested in protecting the policyholder and other beneficiaries and therefore look for capital standards and governance systems that assure a sufficient level of protection. Return issues are of minor interest but efficient and effective risk management and conduct of business are considered as key elements of proper governance. Different countries have different requirements. In order to protect the value of Letzeburg Re it has to comply with Solvency II in Europe (Luxemburg and Ireland) and with the respective requirements in Bermuda, USA and Australia. For a reinsurer like Letzeburg Re it might be important to safeguard a targeted rating. This is to protect the access to profitable business as this is often ceded with rating constraints. Rating agencies have their own valuation systems with quantitative (mainly capital models) and qualitative requirements. Capital models of rating agencies and internal models usually differ as they are using different valuation approaches e.g. for diversification. Rating agencies as stakeholders follow their own business model as provider of information to investors, implying a certain ambition of achieving a unique selling point by own standards. Rating agencies action in the field of tension of most transparent and valuable information for investors as clients and good ratings for rated companies also being clients. Management and staff of Letzeburg Re have a natural interest in protecting the value of the group as this will safeguard their workplaces and income streams. The group´s strategy and risk strategy are outlining how this can be achieved. Further stakeholders can be: Governments (e.g. stabilising the economy, protection against extreme events and protect tax streams), consultants and brokers (to earn fees by assisting in achieving business goals and compliance with external requirements) et.al. At publicly traded companies like Letzeburg Re a proposal to reflect different valuation systems simultaneously usually starts with shareholder value considerations which should find their way into the general strategy and the risk strategy. All other valuation approaches are either mandatory (regulatory and accounting requirements) or need a decision (targeted rating category) that also should be reflected in the strategy / risk strategy. In case of concurring requirements (e. g. capital) the requirements need to be played out against each other depending on the situation. To give an example, comparing these three stakeholder groups, one finds that all are interested in financial stability of Letzeburg Re, but given their other interest to a different degree weight this aspect. While shareholders would like to have an optimised minimum level of capital buffers, clients and supervisors would typically prefer a more comfortable capitalisation. Clients will also be interested in a good rating of Letzeburg Re as this will impact the credit risk they have to capitalise for. Letzeburg Re will have to find the right balance.

(c) First proposal: Improvement of diversification between life & health and non-life. The current relation of 10 : 90 could be moved successively towards 50 : 50 under the side condition, that life & health business are profitable and the market allows for the expansion in that field. Correlation between these two business segments usually is very low. By using the internal model and working with full probability distributions it might be possible to determine the optimal business mix. Second proposal: When looking at potential exposures it appears that 50% of the non-life business comes from non-proportional catastrophe treaties. This appears to be quite high. A measure might be to make better use of deferred tax assets and of the tax environments across the company, e.g. Bermuda, to avoid the strain of money in „random“ good years that might be needed in „bad“ years („loss spread over time“). Third proposal: Diversification could be achieved by additional proportional non-cat retail business with a less pronounced volatility and generate more stable cash flows. Fourth proposal: A reduction of natural catastrophe exposures by means of cessions to third parties might improve the risk-return-relation and improve relative return and stability. This can be done by traditional retrocessions to other insurers / reinsurers or by placements of these exposures into the capital market (e. g. securitisations like CatBonds). The advantage of securitisations is the availability of the liable capital and the option of diversification of counterparties, reducing credit risk. Fifth proposal: There are various possibilities to decrease the capital requirements of rating agencies. This usually turns out to be a direct value creation as rating agency capital requirements for upper rating categories tend to be significantly higher than respective requirements from regulators or from internal models. S&P e.g. allows for approving the internal model which then would enable Letzeburg Re to replace a certain percentage of the overall capital requirement by the results of the internal model („M-Factor“). The proposal therefore reads. Achieve / increase a positive M-Factor from Standard and Poor’s.

(d) (i) Possible „positive“ criteria are: positive working climate, transparency in objective setting, definition of risk appetite etc, processes and communication, open minded, behaviour of people in line with these criteria Possible „negative“ criteria are: bureaucratism, formal approach, thinking in silos, „colleague viewed as a risk“, behaviour of people in line with these criteria

(ii) These criteria are all qualitative and like working climate at least hard or not directly measurable (con). To generate a rating nevertheless ERM culture has to be evaluated and is part of the rating as a measurement of the company. This could be checked and evaluated by looking at everyday aspects of decision making, at organisational and governance structure for management of risks and communication of risk and risk management and the degree of transparency of risk management processes including their public communications (pro).

(e) Potential risks from this situation can be (a) insurance risk: additional claims payments for past cases and higher claims for future cases, (b) credit risk:

financial distress of the affected client with impact on the PV of future cash flows, (c) operational risk: internal control processes on “know your client” were insufficient and need to be reviewed, (d) legal/regulatory risk: fines for Letzeburg Re by the supervisor if they are found to be involved in the unfair treatment, and (e) contagion risk: other clients may be found to have also operated unfairly, leading to higher claims with these clients as well and potentially reduced sales of disability products across the Australian market, (f) reputation risk: Letzeburg Re’s support of the unfair handling might impact on Letzeburg Re’s reputation in the Australian market, spreading to other markets, (g) FX risk: payout of higher claims than expected in AUD might stress the currency hedging of the EUR balance sheet of the parent entity, (h) liquidity risk: payout of higher claims than expected might stress the liquidity situation of the Australian subsidiary and require cash support from Letzeburg Re.

Risk analysis and assessment and mitigation – examples for (a) and (f)

(a) Insurance risk

Analysis: It can be expected that past cases which were refused by L’Re’s client will be re-opened and settled in favour of the insureds, potentially including accumulated claims payments. As the settlement practice of the insurer will have to be revised in order to comply with the “treat customers fairly” approach, the rate of future claims is also expected to increase. As a consequence, reinsurance loss ratios under L’Re’s treaty for this client will increase and are expected to be higher than assumed in best estimates and in pricing.

Assessment: Based on estimates from L’Re’s local claims department taking into account the order of magnitude of fluctuations in annual disability claims in the past years and the weight of the client in the overall portfolio, additional claims due to the event for the current year are expected to be +4% of total volume, in absolute terms AUD 10m. Risk appetite for disability claims deviation is 5% in any year, so the risk is within the appetite.

Mitigation: The risk is with the appetite, so theoretically speaking the additional claims payments could be accepted; but it would be better to enter into negotiations with the client and to refuse the payment based on misbehaviour and potential breach of contract. Best estimate for future claims and the pricing need to be updated, new business premiums should also be renegotiated. If the new claims expectations drive down the value of the deal to below target, and if the overall portfolio mix does allow for the associated loss of diversification benefit, it should be considered to terminate the relationship with the client.

(f) Reputation risk

Analysis: The local management and strategy team sees that the close link in medical underwriting and claims handling between reinsurer and cedant company means that there is a high risk that L'Re's reputation could be affected. This would not necessarily mean negative publicity in mainstream media, although this might also be the case, but primarily other insurance companies in Australia and elsewhere could assume that L'Re was supporting the unfair treatment, and refuse doing business with L'Re going forward. The impact would be stronger for life and health, and weaker for non-life clients.

Assessment: Based on estimates from experts at L'Re's parent entity and taking into account the total business volume of the company, loss of new business in the next year could be 5% of total life and health volume, and 1% of non-life premiums; in absolute terms EUR 0.5m and EUR 5m. This reflects that the relative lower impact on P&C translates into a higher absolute impact due to the dominance in exposure. As L'Re is interested in a good rating it can be inferred that the risk appetite for reputational risk is very low and this event is a breach.

Mitigation: The risk needs to be reduced. L'Re should start a communication campaign to distance itself from the unfair treatment and to show active involvement in cooperating with industry bodies and supervisors in the clarification and proper settlement of disputed claims. If the overall portfolio mix does allow for the associated loss of diversification benefit, it should be considered to terminate the relationship with the client. To prevent the risk from re-occurring, L'Re should start client audits with the remaining disability clients to ensure that their practices are sound.

Question 2. Risk Measures and Modeling.

(a) (i) Solving the equation $1 - \exp(-\sqrt{x}) = \alpha$ gives the value at risk:

$$VaR_\alpha(X) = (\ln(1-\alpha))^2.$$

We obtain $VaR_{0.99}(X) = 21.21$.

(ii) The mean excess over the threshold 20 is given by

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X-20)^+) &= \int_{20}^{\infty} (x-20) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x})\, dx \\
&= \int_{\sqrt{20}}^{\infty} (y^2 - 20) \cdot \exp(-y)\, dy \\
&= \int_{\sqrt{20}}^{\infty} y^2 \exp(-y)\, dy - 20 \cdot \exp(-\sqrt{20}) \\
&= [\exp(-y)(-y^2 - 2y - 2)]_{\sqrt{20}}^{\infty} - 0.2285 \\
&= 0.1250.
\end{aligned}$$

(b) (i) Up to a constant, the posterior density of Θ, given the observation x_0 is given by

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|x_0) &\propto f_X(x_0|\theta)\cdot f_\Theta(\theta)\\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x_0)-\theta)^2\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\right)\\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}\left((\sigma^2+\tau^2)\theta^2-(2\tau^2\ln(x_0)+2\sigma^2\mu)\theta\right)\right)\\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}}\left(\theta-\frac{\tau^2\ln(x_0)+\sigma^2\mu}{\sigma^2+\tau^2}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Up to a constant, this is the density of $\mathcal{N}\left(\frac{\tau^2\ln(x_0)+\sigma^2\mu}{\sigma^2+\tau^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}\right)$.

(ii) We obtain the predictive distribution of X by averaging the sample density over the posterior density of the parameter.

$$\begin{aligned}
f_X(x|x_0) &= \int f_X(x|\theta)\cdot\pi(\theta|x_0)\,d\theta\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\tau_P}\exp\left(-\frac{(\theta-\mu_P)^2}{2\cdot\tau_P^2}\right)d\theta
\end{aligned}$$

(iii) The predictive distribution from (ii) is given by $LN(\mu_P, \sigma^2+\tau_P^2)$:

$$\begin{aligned}
f_{X|x_0}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left(\frac{-(\ln(x)-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau_P}\exp\left(\frac{-(\theta-\mu_P)^2}{2\tau_P^2}\right)d\theta\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_P^2+\sigma^2)}x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu_P)^2}{2(\tau_P^2+\sigma^2)}\right)\\
&\quad\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\tau_P^2+\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\tau_P\sigma}\exp\left(-\frac{\tau_P^2+\sigma^2}{2\tau_P^2\sigma^2}\left(\theta-\frac{\tau_P^2\ln(x)+\sigma^2\mu_P}{\tau_P^2+\sigma^2}\right)^2\right)d\theta\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_P^2+\sigma^2)}x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu_P)^2}{2(\tau_P^2+\sigma^2)}\right),\ x>0
\end{aligned}$$

Its expected shortfall is given by

$$ES_\alpha(X|x_0) = \frac{\exp\left(\mu_P+0.5(\sigma^2+\tau_P^2)\right)}{1-\alpha}\Phi\left(\sqrt{\sigma^2+\tau_P^2}-\Phi^{-1}(\alpha)\right),$$

where Φ denotes the cumulative standard normal distribution function. If the risk measure was calculated on the point estimate μ_P, we would obtain the lower value

$$ES_\alpha(X) = \frac{\exp\left(\mu_P+0.5\sigma^2\right)}{1-\alpha}\Phi\left(\sqrt{\sigma^2}-\Phi^{-1}(\alpha)\right).$$

The positive difference can be considered as measure of parameter risk.

(iv) If the expert is expected to anticipate the increase in claim sizes then the assumption that the mean of the current claim size and the mean of the expert opinion are equal is inconsistent.

There are several alternative approaches. The Bayesian update of the model could be based on the expert opinion δ_0 and some inflated value of the observation, for example $x_0 \cdot \frac{\delta_0}{\mathbb{E}(X)}$ in order to take into account the new trends in a continuous manner. If the company thinks that there is a real change point in the dispensation of justice then it could prefer to calibrate a new prior distribution for Θ relying on expert opinions and restart the Bayesian model.

Question 3. EVT

(a) Examples for high frequency/ low severity events in casualty insurance: insurance against natural catastrophes (floods/storm) or insurance against terrorist attacks; another example are legal risks in operational risk. High frequency/low severity events are difficult to manage for a number of reasons: first, scarcity of data (rare occurrence means few observations); moreover, an insurance portfolio that contains such events displays a high degree of randomness so that only intertemporal diversification is possible. (In a normal year premia will exceed claim payments; in bad years claim payments much larger than collected premia). EVT can help to estimate the upper tails of the claim sizes distribution and to deal with the data problem.

(b) Key idea of the POT method. Choose a (high) threshold u. For $x > u$ it holds that $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u)$ where F_u represents the excess distribution of F with respect to the threshold u. If u is large but not too large $\bar{F}(u)$ is easily estimated to be the proportion of the data bigger than u (empirical survival function N_u/N). The excess function is modeled as a GPD (based on asymptotic result) $\hat{\xi}$ and $\hat{\beta}$ can be estimated via Maximum Likelihood.

(c) In the Pareto case it should hold that $\widehat{\xi} \approx 1/\alpha$ since the Pareto has a power tail with decay rate α; in the normal case one expects $\widehat{\xi}$ close to zero sínce the normal distribution has an exponentially decaying tail.

(d) We need to solve the equation $\widehat{\bar{F}}(x) = (1-\alpha)$; this leads to the estimator

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{N_u/N}\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right);$$

we omit details of the elementary computation.

Question 4. Capital allocation.

(a) If one uses a risk adjusted performance measure of the form

$$\text{RORAC}_i \approx \text{expected return of unit } i / \text{AC}_i$$

, one needs to determine the economic capital AC_i. Capital allocation principles are used at this point in order to take into account the relation of L_i and L in an appropriate way. The Euler principle gives correct signals for RORAC based performance measurement (RORAC compatibility) and it rewards diversification if based on some coherent risk measure. (only one point necessary).

(b) Since ES is translation invariant and positively homogeneous it holds that

$$\text{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma E\Big(\frac{L-\mu}{\sigma} \,\Big|\, \frac{L-\mu}{\sigma} \geq q_\alpha\Big(\frac{L-\mu}{\sigma}\Big)\Big);$$

hence it is enough to determine expected shortfall for a standard normal variable. Here we get with $\tilde{L} := (L-\mu)/\sigma$

$$\text{ES}_\alpha(\tilde{L}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha}^{\infty} l\varphi(l)\,dl = \frac{1}{1-\alpha}[-\varphi(l)]_{q_\alpha}^{\infty} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}.$$

(c) (i) Since $(L_1,\dots,L_d) \sim N_d(0,\Sigma)$ it follows that $L(\boldsymbol{\lambda}) \sim N(0,\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$ with $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. According to b) we thus get

$$\text{ES}_\alpha(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}\frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}.$$

Hence we get for the Euler-principle

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i} r_{\text{ES}_\alpha}(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}\frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\text{SD}(L)} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}\frac{\text{cov}(L_i,L)}{\text{SD}(L)}.$$

(ii) The expected shortfall contributions have the alternative representation

$$\text{AC}_i = E(L_i \mid L > \text{VaR}_\alpha(L)).$$

Question 5. Copulas and risk aggregation.

(a)
- Pro: easy to compute, reflects potential diversification at least in an ad-hoc way.
- Con: not model-based except for elliptical distributions; relies on the problematic notion of linear correlation; finding an appropriate value for ρ is difficult.

(b) For $\rho = 1$ we obtain simple summation, $\mathrm{SCR}(L) = \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$. This choice is not conservative if we use VaR as risk measure; any counterexample to the subadditivity of VaR is a counterexample. For ES simple summation would be conservative since ES is subadditive.

(c) According to Höffding's theorem maximal correlation $\rho_{\max}$ is attained if both risks are comonotonic. In that case it holds that $\mathrm{V\alpha R}(L_1 + L_2) = \mathrm{V\alpha R}(L_1) + \mathrm{V\alpha R}(L_2)$. This is in general not the maximal value of as VaR is not subadditive. It holds that $\rho_{\max} = 1$ if and only if both rvs are of the same type, that is for $\sigma_1 = \sigma_2$.

(d) The statement is in general not correct; depending on the choice of the marginal distribution even comonotonic (perfectly dependent) risks may have low linear correlation (for instance two lognormal risks with very different σ). The statement is however correct for elliptical distributions.

Question 6. Interest rate risk and term structure models.

(a) Let K be the fixed rate. At time $t = 0$, we buy K shares of the zero bond with maturity $T = 2$ and $1 + K$ shares of the zero bond with maturity $T = 3$ and sell a zero bond with maturity $T = 1$. The price of this replicating portfolio is given by

$$P = K \cdot P(0, 2) + (1 + K) \cdot P(0, 3) - P(0, 1),$$

where $P(t, T)$ denotes the price of the zero bond with maturity T at time t.

At time $t = 1$, we sell $\frac{1}{P(1,2)}$ shares of the zero bond with maturity 2 in order to pay one unit of currency to the holder of the zero bond that falls due at time 1. There remain $K - \frac{1}{P(1,2)} = K - L(1, 2) - 1$ shares of the zero bond with maturity 2.

At time $t = 2$, the receiver swap pays the amount $K - L(1, 2)$. In order to settle the remaining position of -1 unit of currency, we sell $\frac{1}{P(2,3)}$ shares of the zero bond with maturity 3. There remain

$$1 + K - \frac{1}{P(2, 3)} = K - L(2, 3)$$

shares of the zero bond with maturity 3, that pay the amount $K - L(2, 3)$ at time 3.

(b) At time $t = 0$ sell $\frac{P(t,T)}{P(t,S)}$ zero bonds with maturity S and buy 1 zero bond with maturity T, resulting in a zero net investment. In addition, enter a receiver swap with $K = F(t, T, S)$ and nominal 1 for free. At time T, the payment 1 of the maturing zero bond is invested in $\frac{1}{P(T,S)}$ shares of the zero bond with maturity S. At time S, the resulting payment is given by

$$\begin{aligned}&\frac{1}{P(T,S)}-\frac{P(t,T)}{P(t,S)}+(S-T)\cdot F(t,T,S)-(S-T)\cdot L(T,S)\\ >\quad&\frac{1}{P(T,S)}-\frac{P(t,T)}{P(t,S)}+\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)}-1\right)-\left(\frac{1}{P(T,S)}-1\right)=0,\end{aligned}$$

i.e. a strictly positive profit without any downside risk.

(c) Since zero coupon bonds are tradable assets, so is the quantity

$$F(t,T,S)P(t,S)=\frac{1}{S-T}(P(t,T)-P(t,S)).$$

Consequently, its discounted price process

$$\frac{F(t,T,S)P(t,S)}{P(t,S)}=F(t,T,S)$$

is a martingale under the forward measure Q^S. Therefore, it holds that

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S)\mid\mathcal{F}_u)=F(u,T,S),\quad 0\le u\le t\le T<S.$$

In the special $t=T$, this relation takes the form

$$\mathbb{E}^T(L(T,S)\mid\mathcal{F}_u)=F(u,T,S),\quad 0\le u\le T<S.$$

because of $F(T,T,S)=L(T,S)$. This shows that, at time $u\le T$, the forward rate $F(u,T,S)$ reflects the available market information on the spot rate of the future period $[T,S]$.

(d) The basic idea of the Black 76 formula for caplets consists in modeling the forward rate $F(u,T,S)$, $0\le u\le T$ by a Black-Scholes type stochastic differential equation

$$dF(u,T,S)=\sigma\cdot F(u,T,S)dW(u),\quad 0\le u\le T$$

with respect to a Brownian motion W and transferring the Black-Scholes formula for call options.

This approach is made mathematically rigorous in the theory of LIBOR market models. Those models allow for time dependent and stochastic volatilities, thus improving the fit to market prices of interest rate derivatives.

Question 7. Risk management for corporate bonds and doubly stochastic default times

(a) A portfolio of corporate bonds is affected among others by interest rate risk, spread risk (the risk of changes in credit spreads), default risk and the risk of losses due to downgrading.

CDSs can be used to hedge default risk and - to a certain extent - credit risk. For this one would assume a protection buyer position in CDSs on the issuers of the bonds in the portfolio. Potential problems: basis risk (due to maturity mismatch and since CDSs are traded only for major bond issuers), counterparty risk (default of protection seller). Interest-rate risk cannot be hedged via CDSs.

(b) (i) To simulate a realized trajectory of the default indicator $Y = 1_{\{\tau \leq t\}}$, $0 \leq t \leq T$ one would use threshold simulation as follows

1. Generate $E \sim \mathrm{Exp}(1)$.
2. Generate a trajectory of ψ using P parameters $\kappa^P, \theta^P, \sigma$ up to $T = 1$ and compute the integrated process $\Gamma_t^P = \int_0^t \psi_s ds$, $t \leq T$.
3. If $\Gamma_T^P < E$ put $Y_t = 0$ for $0 \leq t \leq T$. Else let $\tau := \inf\{t \geq 0 : \Gamma_t^Q \geq E\}$ and put $Y_t = 0$ for $t < \tau$ and $Y_t = 1$ for $t \geq \tau$.

(ii) We have the following algorithm to compute one realization of the loss associated with the bond.

1. Generate a trajectory of ψ using P parameters $\kappa^P, \theta^P, \sigma$ up to $T = 1$.
2. Generate (for the trajectory from 1) a realisation of $1_{\{\tau>1\}}$ via threshold simulation (see i)
3. Return the loss

$$p_0 - 1_{\{\tau>1\}} p(1, 2, \psi_1; r, 1.5, \kappa^Q, \theta^Q, \sigma)$$

Repeating this algorithm many times gives an approximation of the loss distribution; from this the VaR can be computed by empirical quantile estimation.