



CERA A - Klausur Grundlagen und Quantitative Methoden des ERM

19.05.2017

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **180**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **80** Punkte erreicht werden.

Aufgaben

1. Ausübung der Funktion eines CEO. (16 P) Nehmen Sie an, dass Sie zum CEO einer Tochtergesellschaft eines Versicherungsunternehmens bestellt worden sind. Die Tochtergesellschaft gehört zu einer Unternehmensgruppe, die noch zwei weitere Tochtergesellschaften hat. Jede von diesen betreibt das Versicherungsgeschäft in einem bestimmten vertrieblichen Teilbereich/ Vertriebskanal des Marktes. Sie sind der CEO des Direktversicherers. Des Weiteren hat der Vorstand der Muttergesellschaft Mitglieder verantwortlich für Schaden/Unfall, Leben etc und einige von diesen sind ebenso Mitglieder der Vorstände jeder Tochtergesellschaft mit derselben Zuständigkeit.

Da Sie gerade in Ihre Tochtergesellschaft eingetreten sind, werden Sie mit einigen Fragen konfrontiert.

- a) (8 P) Nennen Sie Argumente pro und contra (jeweils 2), die Vorstände der Gesellschaften in der beschriebenen Weise zu organisieren, und beschreiben Sie detailliert ein pro- und ein contra-Argument.
- b) (8 P) Nennen und erläutern Sie mögliche Interessenkonflikte.

2. Fallstudie - Investment-Entscheidung und Angemessenheit des Risikomanagements. (44 P)

Nehmen Sie an, sie seien bei einem Schaden-/Unfallversicherer in der Einheit des Chief Risk Officer (CRO) die Expertin / der Experte für Investment-Entscheidungen und Asset Liability Management (ALM) und berichten direkt an den CRO.

Zu bedeckende versicherungstechnische Rückstellungen

Im Industriegeschäft führt Ihr Arbeitgeber ein Konsortium von fünf Versicherern für die Haftpflicht eines großen Bauunternehmens. Nach einem Schadensereignis in einem U-Bahn-Tunnel in den USA sind Rückstellungen zu bilden, die insgesamt ein Volumen von 5% der Bilanz Ihrer Gesellschaft betragen und von denen ein Fünftel in der Netto-Bilanz verbleiben wird, nachdem die Anteile der vier anderen Konsortialpartner abgezogen wurden, die in der Brutto-Bilanz als Forderungen stehen werden.



Die vor ein paar Wochen getroffene erstinstanzliche Entscheidung zu dem Schadensfall wird von Ihrer Gesellschaft nicht vollständig akzeptiert, sie hat aber begonnen, die Rückstellungen zur Bedeckung der zu begleichenden Schadenforderungen aufzubauen.

Da die Schadenforderungen insbesondere langfristige Renten- und Ausgleichszahlungen umfassen, sucht das Management im gegenwärtigen Niedrigzinsumfeld nach alternativen Investments im ALM.

Investitionsangebot

Einem Mitglied des Vorstands Ihrer Gesellschaft wurde von dem Bauunternehmen angeboten, in ein Staudamm-Projekt in Brasilien zu investieren, das gerade begonnen wurde. Für die ersten fünf Jahre würde es sich um ein Darlehen an das Unternehmens in € ohne Rückzahlungen handeln. Nach erfolgreicher Inbetriebnahme würde eine Mindestverzinsung gezahlt und würden die Rückzahlungen in lokaler Währung erfolgen, finanziert aus den Erträgen des Staudamms und es bestünde die Option auf Bonus-Zahlungen. Für den Fall, dass das Staudamm-Projekt durch eine Gerichtsentscheidung blockiert werden sollte, würde es durch ein Gewerbeimmobilien-Projekt in China ersetzt.

Als Sicherheit ist in dem Paket ein Derivat enthalten, das die Mindestverzinsung aus dem Staudammprojekt ersetzen würde, wenn keines der beiden Projekte realisiert würde.

Das Volumen dieses Investments könnte bis zu einer Höhe von 5% der Bilanzlänge Ihrer Gesellschaft gewählt werden. Alternativ zur Bedeckung der Rückstellungen für das oben genannte Schadenereignis wird das Investment als ALM-Maßnahme für den Bestand an Hausrat und Gebäudeversicherung diskutiert.

Ihre Aufgaben

Sind werden gebeten, das Investitionsangebot aus der Perspektive des Risikomanagements zu prüfen. Der CRO hat Ihnen eine Liste von Fragen zur Verfügung gestellt, die Sie zu beantworten haben.

a) (16 P) Risiko-Analyse

Bitte analysieren Sie die mit einem solchen Investment verbundenen Risiken. Bitte listen Sie nicht nur die möglichen quantitativen Risiken auf, sondern analysieren Sie die konkrete Situation und potentielle Wechselwirkungen der Risiken und schließen Sie auch nicht-quantifizierbare Risiken ein.

b) (12 P) Entwicklung einer Projektskizze und Ausloten prozessualer Implikationen

Bitte entwickeln Sie eine Projektskizze bzgl. der typischen Elemente des Risikomanagements in einem Solvency II-Kontext und Finanzberichterstattung gemäß IFRS, die insbesondere

- i) wesentliche Themen und Ergebnis-Lieferungen des Projekts,
- ii) interne und externe Stakeholder, die einzubeziehen sind, und die wichtigsten Schnittstellen zu den regulären Prozessen

umfasst. Sie müssen keinen Zeitplan, aber die wesentlichen Schritte skizzieren.

c) (16 P) Empfehlungen für Risiko-Governance und weitere Risiko-mindernde Maßnahmen

Bitte empfehlen Sie ausgehend von den unter a) identifizierten Risiken in Stichworten Konsequenzen für die Risiko-Governance und mögliche Risiko-mindernde Maßnahmen.



3. Risikomaße. (28 P)

- a) (4 P) Die Schadensgröße X sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie Value at Risk $\text{VaR}_\alpha(X)$ und Expected Shortfall $\text{ES}_\alpha(X)$ zum Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$ und berechnen Sie das asymptotische Verhältnis $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)}$.

Hinweis. $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$

- b) (24 P) Der Qualitätsparameter Λ sei Gamma(a, b)-verteilt. Gegeben $\Lambda = \lambda$, sei die Schadensgröße X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

Hinweis. Die Dichte der Gamma-Verteilung $\Gamma(a, b)$ mit den Parametern $a, b > 0$ lautet

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \lambda^{a-1} \cdot \exp(-b\lambda) \cdot 1_{(0, \infty)}(\lambda).$$

Der Erwartungswert beträgt $\frac{a}{b}$, die Varianz $\frac{a}{b^2}$.

- i) (4 P) Zeigen Sie, dass X Pareto-verteilt mit der Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a}$ ist.
- ii) (4 P) Bestimmen Sie Value at Risk $\text{VaR}_\alpha(X)$ und Expected Shortfall $\text{ES}_\alpha(X)$ zum Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$ sowie das asymptotische Verhältnis $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)}$.
- iii) (4 P) Erklären Sie das unterschiedliche asymptotische Verhältnis $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)}$ in den Teilaufgaben a) und b) und nehmen Sie dabei Bezug auf allgemeine Aussagen aus der Extremwerttheorie.
- iv) (12 P) Das Unternehmen hat Hinweise darauf, dass sich die Verteilung des Qualitätsparameters Λ im Zeitverlauf ändert. Zur Aktualisierung der Verteilung sollen die letzte Beobachtung x_0 der Schadensgröße und die Einschätzungen δ_1 und δ_2 der mittleren Schadenhöhe durch zwei unabhängige Experten verwendet werden. Bedingt gegeben $\Lambda = \lambda$, werden $\delta_i, i = 1, 2$, als $\Gamma(c, c\lambda)$ -verteilt mit $c > 0$ angenommen.
 - 1) (4 P) Zeigen Sie, dass die a posteriori Verteilung von Λ , gegeben x_0, δ_1, δ_2 gleich Gamma($a + 2c + 1, b + x_0 + c(\delta_1 + \delta_2)$) ist.
 - 2) (2 P) Begründen Sie, dass der a posteriori erwarteten Schaden

$$\mathbb{E}(X|x_0, \delta_1, \delta_2) = \frac{b + x_0 + c(\delta_1 + \delta_2)}{a + 2c}$$

beträgt.

Hinweis. Sie können Teilaufgabe i) verwenden und dabei ohne Beweis nutzen, dass der Erwartungswert der Pareto-Verteilung mit Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a}$ gleich $\frac{b}{a-1}$ ist.

- 3) (6 P) Analysieren Sie die Wirksamkeit der Aktualisierungsstrategie zur Begrenzung des Parameterrisikos. Gehen Sie dabei auch auf die Modellierungsannahmen hinsichtlich der Experteneinschätzungen ein.



4. Extremwerttheorie (EVT). (16 P)

- a) (3 P) “EVT ist ein nützliches Hilfsmittel im aktuariellen Risikomanagement”. Erläutern Sie kurz diese These anhand eines selbstgewählten Risikomanagementproblems aus der Schadensversicherung oder aus dem ERM.
- b) (2 P) Für eine Zufallsvariable X und $u \in \mathbb{R}$ mit $P(X > u) > 0$ ist die excess-Verteilung zur Schranke u definiert durch $F_u(x) = P(X - u > x \mid X > u)$, $x \geq 0$. Bestimmen Sie die excess-Verteilung für die verallgemeinerte Paretoverteilung (GPD) (Die GPD-Verteilung mit Parametern ξ, β hat Überlebensfunktion $\bar{F}_{\xi, \beta}(x) = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$, $x > 0$.)
- c) (6 P) Erläutern Sie kurz die Rolle der GPD-Verteilung für die peaks over threshold (POT) Methode in der Extremwerttheorie und erklären Sie die Hauptidee des zugehörigen tail-Schätzers. Diskutieren Sie eventuell entstehende Probleme bei der Verwendung der POT Methode.
- d) (5 P) Es bezeichne $e(u) = E(X - u \mid X > u)$ die mean excess function einer Schadenvariable X mit stetiger Überlebensfunktion \bar{F} . Zeigen Sie, dass für einen excess-of-loss Rückversicherungsvertrag mit Auszahlung $(X - K)^+$

$$E((X - K)^+) = \bar{F}(K)e(K)$$

gilt. Nehmen Sie an, dass die excess Verteilung von X über die Schranke K durch eine GPD mit Parametern $\hat{\xi} < 1$ und $\hat{\beta}$ gegeben ist. Erläutern Sie, warum dies für großes K sinnvoll ist, und zeigen Sie

$$E((X - K)^+) = \bar{F}(K) \frac{\hat{\beta} + \hat{\xi}K}{1 - \hat{\xi}}.$$

Hinweis: Für die GPD mit Parametern ξ, β gilt $e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}$.

5. Risikoaggregation und copulas. (26 P) Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftsbereichen und zugehörigem loss L_1, \dots, L_d . Das Risikokapital der einzelnen Geschäftsbereiche werde mit EC_1, \dots, EC_d bezeichnet.

- a) (9 P) Erläutern Sie drei in der Praxis gebräuchliche Verfahren zur Bestimmung des Gesamtrisikokapitals EC und diskutieren Sie Vor- und Nachteile.
- b) (13 P) Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden nur noch $d = 2$ Geschäftsbereiche. Es sei bekannt, dass $L_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ und dass L_2 Pareto verteilt ist mit Parameter $\alpha > 0$, d.h. $P(L_2 \leq x) = 1 - (1 + x)^{-\alpha}$. Zur Risikoaggregation soll der copula Ansatz verwendet werden.
- i) (4 P) Für die copula muss das quantitative Risikomanagement zwischen einem Meta Gauss Modell (basierend auf der Gauss copula C_ρ^{Ga}) und einem Meta t Modell (basierend auf $C_{\nu, \rho}^t$) wählen. Diskutieren Sie kurz Vor- und Nachteile beider Modellklassen. Welche Modellklasse ist (bei gleichem ρ) die konservativere Wahl im Hinblick auf die Modellierung von tail Risiken?



- ii) (2 P) Geben Sie für fixe Parameter ρ und ν die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{L}}$ von $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ im meta t Modell an.
 - iii) (7 P) Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige Realisationen z_1, z_2 einer eindimensionalen Standardnormalverteilung generiert und Sie können unabhängig von z_1 und z_2 eine Realisierung v einer gemäß χ_ν^2 verteilte Zufallsvariable V simulieren. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der es Ihnen erlaubt, eine Realisation $(L_1, L_2)'$ zu generieren, die gemäß $F_{\mathbf{L}}$ verteilt ist.
- c) (4 P) Definieren Sie im Kontext von Teilaufgabe b) den Koeffizienten λ der Tail-Abhängigkeit von \mathbf{L} und zeigen Sie, dass λ nur von der gewählten copula abhängt. (Die vorgeschlagenen copulas sind symmetrisch, so dass nicht zwischen oberer und unterer Randabhängigkeit unterschieden werden muss.)

6. Gegenparteirisiko und Kreditrisiko. (22 Punkte) Wir betrachten einen Rückversicherungsvertrag zwischen einem Erstversicherer I (insurer) und einem Rückversicherer R auf ein gegebenes Versicherungsportfolio; die Auszahlung des Vertrags zum Fälligkeitszeitpunkt T sei durch die Zufallsvariable $X_T \geq 0$ gegeben (die genaue Form von X_T ist für die Aufgabe nicht relevant). Der Marktwert des Rückversicherungsvertrags zum Zeitpunkt $t \leq T$ sei mit V_t bezeichnet. Aus Sicht von I besteht das Risiko, dass R vor Begleichung der Verbindlichkeiten aus dem Rückversicherungsvertrag ausfällt (Gegenparteirisiko oder counterparty risk).

- a) (5 P) Erläutern Sie kurz 3 verschiedene Ansätze zum Management des Gegenparteirisikos in dem oben skizzierten Rückversicherungsvertrag. Gehen Sie dabei insbesondere auf Absicherungsstrategien ein, in der I eine protection buyer Position in einem CDS auf R einnimmt und skizzieren Sie mögliche Probleme bei Verwendung einer derartigen Strategie.
- b) (7 P) Das Ausfallrisiko sollte auch bei der Bewertung des Rückversicherungsvertrags berücksichtigt werden. In Analogie zu valuation adjustments für Finanzprodukte ist eine Bewertungskorrektur gegeben durch

$$(1) \quad \text{CVA}^{\text{indep}} = \delta^R \int_0^T \bar{F}_I(t) e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_R(t) dt.$$

Hierbei ist δ^R der loss given default von R , τ_I die Ausfallzeit von I , $\bar{F}_I(t) = Q(\tau_I > t)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit von I unter dem zur Bewertung des Kontrakts verwendeten Martingalmaß Q und $f_R(t)$ die Dichte der Ausfallzeit τ_R von R (ebenfalls unter Q).

Leiten Sie die Formel (1) her. Nehmen Sie dazu an, dass τ_R , τ_I und der Prozess $V = (V_t)_{0 \leq t \leq T}$ unter Q unabhängig sind.

- c) (3 P) Diskutieren Sie die in b) gemachten Unabhängigkeitsannahmen kritisch, insbesondere im Hinblick auf die Unabhängigkeit von τ_R und V .
- d) (7 P) Betrachten Sie ein einfaches Kreditrisikomodell in reduzierter Form mit konstanter Zinsrate $r > 0$ und konstanter hazard-rate $\gamma > 0$ (unter dem zur Bewertung verwendeten risikoneutralen Maß Q). Geben Sie in Abhängigkeit von r und γ den Preis in $t = 0$ einer



von R emittierten ausfallbehafteten Anleihe mit Nennwert 1 und Fälligkeitsdatum T an. Nehmen Sie dabei an, dass im Fall eines Konkurses von R zum Zeitpunkt $\tau \leq T$ ein Betrag von 0.5 direkt in τ_R an den Halter der Anleihe ausgezahlt wird.

Nehmen Sie umgekehrt an, dass Sie die hazard-rate γ aus dem Marktpreis der Anleihe bestimmt haben. Erläutern Sie, warum dieser Parameter bei der Kalibrierung der Dichte f_R in der CVA-Formel (1) verwendet werden kann.

7. Zinsrisikomanagement. (28 P)

Betrachten Sie zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Kollektiv von N Personen des Alters 50, die eine beitragsfreie gemischte Versicherung mit Versicherungssumme S und einer Restlaufzeit von 3 Jahren besitzen. (Die Versicherungssumme wird im Erlebensfall bei Ablauf des Vertrages, im Todesfall am Ende des Todesjahres ausgezahlt.) Gegeben sind die Wahrscheinlichkeit ${}_1p_{50}$, dass eine 50-jährige Person das Alter 51 erreicht, und die Wahrscheinlichkeit ${}_2p_{50}$, dass eine 50-jährige Person das Alter 52 erreicht.

Das Versicherungsunternehmen hat den Marktwert der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten in Zero-Bonds mit einer Laufzeit von 1 Jahr investiert.

Die Short Rate $r(t)$ werde unter dem realen Maß im Vasicek-Modell mit den Parametern a , b und σ beschrieben:

$$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma dW_t \quad (*)$$

Bezeichnet λ den Marktpreis des Risikos, so folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß Q dem Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t)) dt + \sigma dW_t^Q$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Geben Sie alle Ergebnisse in Abhängigkeit der in der Aufgabenstellung aufgeführten Größen an.

- a) (10 P) Unter der Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, ermitteln Sie zum Zeitpunkt 0 das benötigte Risikokapital, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge des Zinsrisikos auszugleichen.

Hinweis. Unter der Dynamik (*) ist der Erwartungswert des stochastischen Diskontierungsfaktors $D(t, T)$ gegeben durch $\mathbb{E}(D(t, T) | \mathcal{F}_t) = \exp[-A(t, T) - B(t, T)r(t)]$ mit

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) (T - t - B(t, T)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(t, T)^2 \\ B(t, T) &= \frac{1}{a} (1 - \exp(-a(T - t))), \end{aligned}$$

und es gilt

$$r(t) \sim \mathcal{N} \left(r(0) \exp(-at) + b(1 - \exp(-at)), \frac{\sigma^2}{2a} (1 - \exp(-2at)) \right).$$



- b) (2 P) Nehmen Sie an, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist. Beschreiben Sie ein Portfolio von Zerobonds, das die versicherungstechnischen Verpflichtungen repliziert.
- c) (8 P) Nehmen Sie nun an, dass die einjährigen Zerobonds illiquide sind und nicht verkauft werden können. Entwickeln Sie unter der Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, eine Strategie auf Basis von Swap- oder Forward-Kontrakten, die das benötigte Risikokapital auf Null reduziert und keine Kosten verursacht.
- d) (8 P) Für den Fall, dass die Anzahl der Toten zufällig ist, entwickeln Sie einen Algorithmus, der mit Hilfe von Simulationen das zum Zeitpunkt 0 benötigte Risikokapital bestimmt, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge des Zinsrisikos und des versicherungstechnischen Risikos auszugleichen. Lässt sich das benötigte Risikokapital mit einer modifizierten Version der Strategie aus b) auf Basis von Zinsinstrumenten auf Null reduzieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschläge

1. Ausübung der Funktion eines CEO.

- a) „pro“: Dass dieselbe Person verantwortlich ist für seinen/ihren Zuständigkeitsbereich in allen Gesellschaften, garantiert die Anwendung derselben Regularien in der gesamten Gruppe; Einfachheit, da insgesamt in allen Vorständen weniger Personen involviert sind

„con“: komplexe Hierarchie: Einige Vorstandsmitglieder der Muttergesellschaft berichten an den CEO einer Tochtergesellschaft in ihrer Funktion als Vorstände der Tochtergesellschaft; Schwierigkeit, an allen Vorstandssitzungen teilzunehmen (auch wenn nicht immer persönlich)

„pro“: In jeder Gesellschaft der Gruppe wird z.B. das für Schaden/Unfall zuständige Vorstandsmitglied dieselben Annahmerichtlinien anwenden und somit unterschiedliches Verständnis/Fehlinterpretationen vermeiden, dies könnte auch dieselben Fähigkeiten/ Kapazitäten bzgl. Tarifierung sicherstellen, des Weiteren auch eine ähnliche Wahl der Mitarbeiter und vergleichbare Arbeitsatmosphäre, was insgesamt zu besseren und durchschlagenderen Aktivitäten in allen Marktsegmenten führen könnte

„con“: Im Fall der Nicht-Übereinstimmung zwischen dem CEO der Tochtergesellschaft und einem Vorstandsmitglied, das auch im Vorstand der Muttergesellschaft ist, dürfte es für den CEO schwierig sein, sich durchzusetzen; grundsätzlich könnten bzgl. Bonifizierung unterschiedliche Ziele greifen: der CEO hat Ziele, die sich auf die Tochtergesellschaft beziehen, diejenigen des Vorstandsmitglieds beziehen sich auf die Gruppe

- b) Insoweit als der CEO das Ziel hat, die Tochtergesellschaft zu entwickeln und das Vorstandsmitglied auf den Erfolg der Gruppe bezogen ist, könnten abweichende Ziele auftreten, z.B. die Allokation von Ressourcen zwischen den Tochtergesellschaften; eine mehr oder weniger starke Entwicklung eines bestimmten vertrieblichen Marktsegments repräsentiert durch die Tochtergesellschaften; Verschlechterung bei einer Tochtergesellschaft bei einem Vorteil für die Gruppe insgesamt: vgl. z.B. divergente Interessen zwischen den Vertriebseinheiten der verschiedenen Tochtergesellschaften etwa bzgl. Kundenansprache; dies impliziert ein mögliches Governance-Problem: wie in Art. 41 der Solvency II Richtlinie festgelegt ist eine klare Zuordnung der Funktionen und geeignete Trennung von Verantwortlichkeiten gefordert

2. Fallstudie - Investment-Entscheidung und Angemessenheit des Risikomanagements.

- a) Risiko-Analyse: In den ersten fünf Jahren ist das Investment eine Art Darlehen, das den typischen Marktrisiken wie Zins- und Spread-Risiko ausgesetzt ist.

Danach handelt es sich um „gebündelte“ Risiken: Für das Darlehen bzgl. des Zinses sowie der Rückzahlungen. Außerdem bestehen für das Staudamm-Projekt bzgl. der Bonus-Zahlungen die typischen mit Infrastruktur-Investments verbundenen Risiken (bspw. lange



Laufzeiten, geringe Liquidität, Abhängigkeit von einem stabilen politischen Umfeld, Exponierung gegenüber Naturkatastrophen, ...); für das alternative Projekt bestehen die üblichen Immobilienrisiken.

Über die gesamte Laufzeit des Investments bestehen sowohl ein Ausfallrisiko für das Bauunternehmen als auch für die Gegenpartei des Derivats, falls diese von dem Bauunternehmen verschieden sein sollte.

Außerdem besteht ein Währungsrisiko, da der Ertrag aus dem Investment nach den ersten fünf Jahren in lokaler Währung (Brasilien oder China) und die Währung der Finanzberichterstattung der Gesellschaft € ist und die Zahlungen der Forderungen aus dem Schadenfall in US-\$ zu zahlen sein werden.

Da das Bauunternehmen sowohl Vertragspartner für das Investment als auch Versicherungskunde ist, mit einem Anteil an der Brutto-Bilanz von 5%, besteht zusätzlich ein Kumul- oder Konzentrationsrisiko.

Wie bei langfristigen Infrastruktur-Investments üblich, besteht potentiell ein Liquiditätsrisiko, insbesondere wenn das Investment nicht zur Bedeckung langfristiger, stabiler Verbindlichkeiten sondern volatiler Ansprüche aus dem Versicherungs-Portfolio dienen würde.

Außerdem gibt es potentiell Rechtsrisiken - insbesondere für das Staudamm-Projekt, für die Rückstellungen und Forderungen für das ursprüngliche Schadenereignis und auch für die Gewerbeimmobilie in China.

Abhängig von den politischen Rahmenbedingungen (politisches Risiko) könnten außerdem Reputationsrisiken bestehen.

b) Projektskizze und Prozess-Implikationen:

i) Wesentliche Themen und Ergebnis-Lieferungen:

Der erste Schritt in dem Projekt wäre die Identifikation der Ziele, die mit der Investition verbunden sind und zwar bzgl. ALM-Anforderungen für das konkrete Schadenereignis und für den Versicherungsbestand insgesamt.

Der zweite Schritt wäre eine Weiterentwicklung der unter Aufgabe a) durchgeführten Risikoanalyse, zuerst mit dem Fokus auf „Ereignis-Identifikation“, d.h. der Vollständigkeit der Risikoinventur.

Der dritte Schritt wäre eine Verfeinerung der Risikoanalyse durch eine detaillierte Risikoprüfung und sofern möglich eine Risikoquantifizierung (Frequenz und Auswirkungen). Dies schließt eine detaillierte Analyse des Staudamm-Projekts und des Gewerbeimmobilien-Projekts sowie der Qualitäts- und Risikomanagement-Standards des Bauunternehmens ein, letzteres insbesondere unter Berücksichtigung der Erfahrungen aus dem Schadenereignis U-Bahn-Tunnel.

Ein vierter Schritt bestünde darin, Möglichkeiten der Risikobewältigung und Risikominderung auszuloten (siehe c)) und deren Auswirkungen auf das Risiko-Ertrags-Verhältnis zu bewerten.

Ein fünfter Schritt würde die Festlegung der internen Berichterstattung und der Information der betroffenen Einheiten und Personen umfassen, ebenso wie die Festlegung der regelmäßigen Überwachung der Performance und der Risiken des Investments.



Schließlich wären eine Gesamtbewertung des Risikos und Ertrags durchzuführen und eine Wirtschaftlichkeitsberechnung („business case“) für das Management zur Entscheidung über das Projekt vorzubereiten. Dieser Schritt würde nicht nur Risiko-Themen umfassen sondern auch Implikationen für die Prozesse und die damit verbundenen Kosten.

Im Wesentlichen umfasst die Analyse die meisten Elemente eines ad-hoc-ORSA. Abhängig von der Materialität des zu zeichnenden Investitionsvolumens wäre evtl. ein formaler ad-hoc ORSA durchzuführen, mindestens wären die Erkenntnisse aus dem Projekt im nächsten regulären ORSA zu berücksichtigen.

ii) Interne und externe Stakeholder und Schnittstellen zu den Regel-Prozessen

Das Management wäre einzubinden, zunächst in seiner Rolle als Initiator des Projekts und außerdem mutmaßlich weil typischerweise ein Investitionsvolumen von 5% der Bilanzlänge als materiell eingestuft würde.

Interne Stakeholder wären außerdem die Verantwortlichen für Risikomanagement, ALM, Investment-Management und Kapitalanlage-Controlling, interne und externe Berichterstattung sowie Rechtsfragen.

Typische einzubindende Einheiten wären:

- Vorstand und/oder Komitees für Risikomanagement, Investment-Management, ALM
- Risikomanagement (unter anderem Modellierung und interne Risikoberichterstattung)
- Investment-Management, ALM-Einheit und aktuarielle Einheiten
- Rechnungslegung (lokale Rechnungslegung, IFRS, Solvency II-Bilanz
- Rechtsabteilung
- Compliance-Funktion (bspw. mit Bezug zum Reputationsrisiko)
- die für das interne Kontrollsystem (IKS) verantwortliche Einheit
- die für SFCR, RSR und Geschäftsberichte (lokale Rechnungslegung und IFRS) zuständigen Einheiten.

Einzubindende externe Stakeholder wären der Wirtschaftsprüfer zur Abstimmung der Bilanzierung sowie evtl. die zuständige Aufsichtsbehörde, um zu klären, ob das Investment geeignet ist, die versicherungstechnischen Rückstellungen nach lokalem Recht zu bedecken.

Typische Regelprozesse sind:

- Kapitalanlage-Controlling und Risikoberichterstattung
- ALM und Planungsprozesse
- Risikomodellierung und Risikoberichterstattung inkl. ORSA
- Rechnungslegung und externe Berichterstattung
- Interne Kontrollen
- Beobachtung rechtlicher Entwicklungen
- ORSA



c) Empfehlungen für Risiko-Governance und weitere Risiko-mindernde Maßnahmen:

Das angebotene Investment besteht aus einem Bündel von Instrumenten, ist daher in gewissem Sinne „verpackt“ und erfordert zunächst eine Analyse der Mechanismen und Ebenen der Absicherung. Außerdem gibt es drei Komponenten (Staudamm, Gewerbeimmobilie, Derivat) unterschiedlicher Klassen von Investments jeweils verbunden mit Rechtsrisiken, politischen Risiken und Reputationsrisiken, die eine interdisziplinäre Zusammenarbeit erfordern, um die Risiken sauber zu bewerten. Dies trifft nicht nur auf die Erstbewertung sondern auch auf die reguläre Beobachtung („Monitoring“) zu.

Konsequenterweise wäre die Empfehlung, ein Team oder Teil-Team zu bilden, um ein holistisches, interdisziplinäres Bild des Investments zu erhalten, das seine Erkenntnisse laufend in die Regelprozesse einbringt. Für den Fall, dass ein materielles Volumen gezeichnet würde, wäre ein spezifischer regelmäßiger Bericht an den Vorstand oder ein verantwortliches Gremium / Komitee auf Vorstandsebene zu implementieren. In jedem Fall wären das Investment selbst und seine laufende Überwachung Gegenstand des ORSA.

Risiko-Minderungs-Maßnahmen könnten sein:

- Vereinbarung mit dem Bauunternehmen darüber, dass der Versicherer im Fall des Ausfalls (von Teilen) des Investments diese mit den Schadenzahlungen verrechnen darf
- Forderung spezifischer Risikomanagement-Maßnahmen für das Staudamm-Projekt unter Berücksichtigung der Erfahrungen („lessons learnt“) aus dem U-Bahn-Tunnel-Projekt
- Absicherung („Hedge“) des Währungsrisikos für die verschiedenen Komponenten des Investments oder Forderung, dass das Bauunternehmen die Währungsrisiken übernimmt
- Vereinbarung eines speziellen Kündigungsrechts bspw. für den Fall, dass sich die Fertigstellung der Bauvorhaben verzögert
- Absicherungen oder Bürgschaften („letters of guarantee“) bspw. durch eine Bank, die Teile des Ausfallrisikos in den ersten fünf Jahren übernimmt und dies für das Derivat ab Jahr 5 garantiert.

3. Risikomaße.

a) Durch Invertierung der Verteilungsfunktion $F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ erhalten wir den Value at Risk:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -\frac{\ln(1 - \alpha)}{\lambda}$$

Nach Definition berechnen wir

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \frac{-\ln(1 - z)}{\lambda} dz \\ &= \frac{1}{\lambda(1 - \alpha)} [(1 - z) \ln(1 - z) - (1 - z)]_\alpha^1 \\ &= \frac{1 - \ln(1 - \alpha)}{\lambda}. \end{aligned}$$



Das asymptotische Verhältnis von Value at Risk und Expected Shortfall beträgt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1 - \ln(1 - \alpha)}{-\ln(1 - \alpha)} = 1.$$

- b) i) Durch Mischung über die Verteilung des Qualitätsparameters Λ berechnen wir die Verteilungsfunktion der Schadensgröße X .

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^\infty (1 - \exp(-\lambda x)) \cdot \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda) d\lambda \\ &= 1 - \int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp(-(b+x)\lambda) d\lambda \\ &= 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a} \int_0^\infty \frac{(b+x)^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp(-(b+x)\lambda) d\lambda \\ &= 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a} \end{aligned}$$

- ii) Invertierung der Pareto-Verteilungsfunktion aus a) liefert

$$\text{VaR}_\alpha(X) = b((1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - 1).$$

Nach Definition berechnen wir

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 b((1 - z)^{-\frac{1}{a}} - 1) dz \\ &= \frac{b}{1 - \alpha} \left[-\frac{a}{a-1} (1 - z)^{-\frac{1}{a} + 1} \right]_\alpha^1 - b \\ &= \frac{ab}{a-1} (1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - b. \end{aligned}$$

Das asymptotische Verhältnis von Value at Risk und Expected Shortfall beträgt

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)} &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{a-1} (1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - 1}{(1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - 1} = \frac{a}{a-1} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{(1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - \frac{a-1}{a}}{(1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - 1} \\ &= \frac{a}{a-1} + \frac{a}{a-1} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{a-1}{a}}{(1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - 1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}. \end{aligned}$$

- iii) Da die Überlebensfunktion der Pareto-Verteilung polynomial mit Parameter $\zeta = \frac{1}{a}$ abfällt, ist das Ergebnis aus b) ein Spezialfall der in der EVT hergeleiteten Asymptotik für das Verhältnis $\frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)}$. Die Exponentialverteilung in Teilaufgabe a) ist light-tailed, so dass sich die Ergebnisse von VaR_α , der den Tail ignoriert, und ES_α , der den Tail mit einbezieht, für große α weniger stark unterscheiden.



- iv) 1) Wir bestimmen zunächst die a posteriori Dichte von Λ , gegeben den Beobachtungswert x_0 und die Expertenschätzungen δ_1, δ_2 . Wir rechnen jeweils modulo einer Konstanten.

$$\begin{aligned}\pi(\lambda|x_0, \delta_1, \delta_2) &\propto f(x_0|\lambda) \cdot \prod_{i=1}^2 f(\delta_i|\lambda) \cdot \pi(\lambda) \\ &\propto \lambda \exp(-x_0\lambda) \cdot \prod_{i=1}^2 (\lambda^c \cdot \exp(-c\delta_i\lambda)) \cdot \lambda^{a-1} \cdot \exp(-b\lambda) \\ &\propto \lambda^{a+2c} \cdot \exp(-(b+x_0+c(\delta_1+\delta_2))\lambda).\end{aligned}$$

Dies ist die Dichte von $\text{Gamma}(a+2c+1, b+x_0+c(\delta_1+\delta_2))$.

- 2) Die Vorhersageverteilung der Schadenvariablen ergibt sich als Mischung der Exponentialverteilung über die a posteriori Verteilung des Parameters Λ aus 1). Nach Teilaufgabe i) ist dies die Pareto-Verteilung mit den Parametern $a+2c+1$ und $b+x_0+c(\delta_1+\delta_2)$, deren Erwartungswert gleich $\frac{b+x_0+c(\delta_1+\delta_2)}{a+2c}$ ist.
- 3) Der Aktualisierungsschritt kombiniert die bisherige Verteilung der Schadensgrößen mit der neuen Information der letzten Beobachtung und der Experteneinschätzungen. Damit ist der Aktualisierungsschritt gut geeignet, einen Trend der Entwicklung des Parameters einzubeziehen. Er wird jedoch einen Strukturbruch nicht vollständig abbilden. Die Wirksamkeit des Aktualisierungsschrittes hängt auch davon ab, inwieweit die Annahmen über die Verteilung der Expertenschätzungen zutreffen. Zunächst wird angenommen, dass die Experten unabhängig sind und im Mittel eine unverfälschte Einschätzung der mittleren Schadenhöhe abgeben. Der bedingte Erwartungswert der Experteneinschätzungen, gegeben den Parameterwert λ , ist für alle $c > 0$ stets $\frac{c}{c\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(X|\Lambda = \lambda)$. Der Parameter c erlaubt dabei die Modellierung der Zuverlässigkeit der Expertenschätzungen. Im Grenzübergang $c \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\lim_{c \rightarrow 0} \mathbb{E}(X|x_0, \delta_1, \delta_2) = \frac{b+x_0}{a}.$$

Dies ist der Erwartungswert der Pareto-Verteilung mit den Parametern $a+1$ und $b+x_0$, in die die Experteneinschätzungen gar nicht mehr einfließen. Grund dafür ist, dass wegen $\lim_{c \rightarrow 0} \text{Var}(\delta_i) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{c}{(c\lambda)^2} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c\lambda^2} = \infty$ die Experteneinschätzungen im Grenzübergang total unzuverlässig werden.

4. Extremwerttheorie.

- a) EVT bietet einen systematischen, theoriebasierten Ansatz zur Schätzung von Rändern von Verteilungen in Situationen, in denen auf Grund von nicht ausreichenden Daten die empirische Verteilungsfunktion als Approximation für tail Wahrscheinlichkeiten nicht ausreicht. Mögliche Anwendungen: Bewertung von Rückversicherungsverträgen (excess of loss); Bestimmung von Risikomaßen im tail einer Verlustverteilung (verschiedene andere Antworten sind auch möglich).



- b) Die excess-Verteilung wird am besten mit Hilfe ihrer Überlebensfunktion $\bar{F}_u(x) = P(X - u > x \mid X > u) = \bar{F}(x + u) / \bar{F}(u)$ bestimmt. Für die GPD gilt $\bar{F}_{\xi, \beta}(x) = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$, so dass wir

$$\bar{F}_u(x) = \frac{\bar{F}(x + u)}{\bar{F}(u)} = \left(\frac{1 + \xi \frac{u}{\beta} + \xi \frac{x}{\beta}}{1 + \xi \frac{u}{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta(1 + \xi \frac{u}{\beta})}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

erhalten. Folglich ist die excess-Verteilung eine GPD-Verteilung mit Parametern ξ und $\tilde{\beta}(u) = \beta + \xi u$.

- c) Für eine sehr große Klasse von Verteilungen ist die GPD die Grenzverteilung der excess-Verteilung für $u \rightarrow \infty$ und daher die natürliche Wahl bei der Modellierung von excess-Verteilungen über große Schranken. Man hat für $x > u$ die Darstellung $\bar{F}(x) = \bar{F}(u) \bar{F}_u(x - u)$. Falls u groß, aber nicht sehr groß ist, kann $\bar{F}(u)$ einfach durch den Prozentsatz der Daten größer als u geschätzt werden (empirische Überlebensfunktion). Die excess-Verteilung wird durch GPD-Verteilung modelliert, die Parameter ξ und β können etwa durch Maximum Likelihood bestimmt werden. Das Hauptproblem - insbesondere bei knapper Datenlage - ist die Wahl der Schranke u (tradeoff zwischen bias und Varianz).
- d) Da die Verteilung von X stetig ist, gilt

$$E((X - K)^+) = P(X > K)E(X - K \mid X > K) = \bar{F}(K)e(K).$$

Die Approximation der excess Verteilung durch eine GPD ist durch den Satz von Pickands, Balkema und de Haan gerechtfertigt. Einsetzen von K in die mean excess Funktion ergibt die Behauptung.

5. Risikoaggregation und copulas.

- a) Es bezeichne EC_i das Risikokapital von subunit i und EC das Gesamtkapital. Verschiedene Aggregationsmöglichkeiten (3 reichen):
- Simple summation, $EC = EC_1 + \dots + EC_d$ Vorteil: Einfach, konservativ falls EC_i mit subadditivem Risikomaß berechnet wird. Nachteil: nicht principles based, keine Berücksichtigung von Diversifikation.
 - Correlation adjusted summation $EC = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} EC_i EC_j\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei ρ_{ij} oft als Korrelation zwischen L_i und L_j interpretiert wird. Vorteil: einfach, Diversifikation wird berücksichtigt. Nachteil: i.A. nicht prinzipienbasiert, die Korrelationen sind schwer zu bestimmen und sie müssen Konsistenzbedingungen erfüllen.
 - Copula Methoden. Vorteil: Prinzipienbasiert. Nachteil: Modellrisiko bei Wahl der copula, schwer zu erklären.
 - Structural Models (factor based) Vorteil: Prinzipienbasiert, aus ökonomischer Sicht natürlich. Nachteil: In der praktischen Anwendung sehr komplex.



b) i) Gauss copula. Vorteile: einfacher; nur ein Parameter muss bestimmt werden. Nachteil: keine tail dependence. t copula. Vorteil: erlaubt tail dependence; Nachteil komplexer in der Anwendung (2 Parameter). Die t copula ist wegen der 'eingebauten' tail dependence konservativer.

ii) Nach Sklar ist $F_{\mathbf{L}}(\ell_1, \ell_2) = C_{\rho, \nu}^t(\phi((\ell_1 - \mu)/\sigma), 1 - \ell_2^{-\alpha})$.

iii) Schritt 1: Konstruktion von t_{ρ}^{ν} verteilten Realisierungen x_1, x_2 : Setze $w = \nu/v$ und $x_1 = \sqrt{w}z_1$, $x_2 = \sqrt{w}(\rho z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}z_2)$.

Schritt 2: Konstruktion von $(u_1, u_2) \sim C_{\rho, \nu}^t$: Setze $(u_1, u_2) = (t_{\nu}(x_1), t_{\nu}(x_2))$.

Schritt 3: Für die Verteilungsfunktion F der Paretoverteilung mit Parameter α gilt $F^{-1}(y) = (1 - y)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1$. Nach dem zweiten Teil des Satzes von Sklar sind dann

$$(x_1, x_2) = (\mu + \sigma\phi^{-1}(u_1), (1 - u_2)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1)$$

die gewünschten Realisierungen.

c) Wir arbeiten mit $\lambda = \lambda_l$. Der Koeffizient der lower tail dependence des Zufallsvektors $(L_1, L_2)'$ ist

$$\begin{aligned} \lambda_l(L_1, L_2) &= \lim_{q \rightarrow 0^+} P(L_2 \leq F_2^{-1}(q) \mid L_1 \leq F_1^{-1}(q)) = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{F(F_1^{-1}(q), F_2^{-1}(q))}{F_1(F_1^{-1}(q))} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q} \end{aligned}$$

nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Relation $C(u, u) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(u))$ (siehe Satz von Sklar).

6. Gegenparteiisiko und Kreditrisiko.

a) Mögliche Ansätze (die natürlich parallel verwendet werden können)

- Exposure Limite und Regeln zur Berücksichtigung der Kreditqualität bei der Auswahl von Gegenparteien
- Netting (Berücksichtigung aller Geschäftsbeziehungen zu einer Gegenpartei vor dem eigentlichen Konkursverfahren)
- Bewertungskorrekturen (valuation adjustments), durch die das Ausfallrisiko bei der Bewertung eines Rückversicherungsvertrags berücksichtigt wird
- Unterlegung mit ökonomischem Kapital
- Austausch von Sicherheiten (collateral), auf die I im Falle eines Konkurses von R zurückgreifen kann
- Absicherung durch Eingehen einer protection buyer position in einem CDS auf R ; das default payment stellt eine (teilweise) Kompensation für den Verlust durch den Ausfall von R dar. Mögliche Probleme hierbei: Höhe der benötigten CDS Position ist a priori nicht klar, sondern hängt von der Schadenhöhe X_T ab; Basisrisiko: es könnte sein, dass R seine Verpflichtungen aus dem Vertrag nicht erfüllt, dies aber nicht als Konkursereignis gewertet wird. (ein Punkt ist ausreichend).



b) Es gilt gemäß Folien, p 178

$$\begin{aligned} \text{CVA} &= \delta^R \mathbb{E}^Q (I_{\{\tau < T\}} I_{\{\xi = R\}} e^{-r\tau_R} V_\tau^+) = \delta^R \int_0^T E^Q (I_{\{\xi = R\}} e^{-r\tau_R} V_\tau^+ \mid \tau_R = t) f_R(t) dt \\ &= \delta^R \int_0^T E^Q (I_{\{\tau_I > t\}} e^{-rt} V_t^+ \mid \tau_R = t) f_R(t) dt, \end{aligned}$$

wobei ξ die Identität der zuerst ausfallenden Einheit bezeichnet. Unter der vorausgesetzten Unabhängigkeit ist

$$E^Q (I_{\{\tau_I > t\}} e^{-rt} V_t^+ \mid \tau_R = t) = e^{-rt} \bar{F}_I(t) E^Q (V_t^+),$$

und die Behauptung folgt.

- c) Falls R ein großer Rückversicherer ist, so würde man erwarten, dass $E(V_t^+ \mid \tau_R = t) > E(V_t^+)$ gilt. Beispielsweise könnte ein Ausfall von R durch ein Katastrophenereignis ausgelöst worden sein, in dessen Folge alle Prämien für Rückversicherungskontrakte steigen. Falls R ein großer Rückversicherer ist, könnte durch den Ausfall von R eine starke Nachfrage nach Rückversicherung entstehen, da die Kunden von R ihren Bestand neu rückversichern müssen (Dies ist ein Beispiel für Ansteckungseffekte).
- d) Die Auszahlung der Anleihe kann in zwei Teile zerlegt werden. Falls kein Ausfall eintritt, so erhält man den Nennwert; der Preis dieses survival claims ist

$$E^Q (e^{-rT} 1_{\{\tau > T\}}) = e^{-rT} Q(\tau > T) = e^{-(r+\gamma)T}.$$

Der Preis des recovery payments ist

$$E^Q (0.5 e^{-r\tau} 1_{\{\tau \leq T\}}) = 0.5 \int_0^T e^{-rt} \gamma e^{-\gamma t} dt = 0.5 \frac{\gamma}{r + \gamma} (1 - e^{-(r+\gamma)T}).$$

Zur Berechnung der valuation adjustments wird die Dichte von τ_R unter dem zur Bewertung verwendeten risikoneutralen Maß Q verwendet, diese kann aus Marktdaten wie den Preisen einer Anleihe kalibriert werden.

7. Zinsrisikomanagement.

- a) Die Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, blendet das versicherungstechnische Risiko aus, so dass das Risikokapital als Puffer gegen einen Marktwertanstieg der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge eines Zinsrückgangs zu bestimmen ist. Der stochastische Barwert der Versicherungsleistungen zur Zeit $t \in \{0, 1\}$ (einschließlich der sofort fälligen Zahlungen) ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} PV(0) &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) \cdot D(0, 1) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot D(0, 2) + {}_2p_{50} \cdot D(0, 3)) \\ PV(1) &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot D(1, 2) + {}_2p_{50} \cdot D(1, 3)) \end{aligned}$$



Der Marktwert ist unter dem risikoneutralen Maß zu berechnen. Unter Verwendung der Zerobondpreise

$$P(0, t) = \exp(-A_\lambda(0, t) - B(0, t) \cdot r(0)) \quad \text{mit}$$

$$A_\lambda(0, t) = \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t - B(0, t)) + \frac{\sigma^2}{4a}B(0, t)^2$$

beträgt der Marktwert zum Zeitpunkt 0

$$MV(0) = \mathbb{E}_Q(PV(0)) = S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) \cdot P(0, 1) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P(0, 2) + {}_2p_{50} \cdot P(0, 3)).$$

Das 95%-Quantil des Marktwertes der Verbindlichkeiten zur Zeit 1 ergibt sich für das 5%-Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Mit den Parametern der Normalverteilung unter dem realen Maß

$$\mathbb{E}(r(1)) = r(0) \exp(-a) + b(1 - \exp(-a))$$

$$Var(r(1)) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a))$$

erhalten wir als 5%- Quantil

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{Var(r(1))} \cdot \Phi^{-1}(0.05).$$

In diesem VaR-Szenario ergibt sich der Marktwert der Verbindlichkeiten

$$MV_{0.95}(1) = \mathbb{E}_Q(PV(1) | r(1) = r_{0.05}(1))$$

$$= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P_{0.95}(1, 2) + {}_2p_{50} \cdot P_{0.95}(1, 3))$$

unter Verwendung der Zerobondpreise

$$P_{0.95}(1, t) = \exp(-A_\lambda(1, t) - B(1, t) \cdot r_{0.05}(1)) \quad \text{mit}$$

$$A_\lambda = \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t - 1 - B(1, t)) + \frac{\sigma^2}{4a}B(1, t)^2$$

Um einen Marktwertanstieg der Verbindlichkeiten mit Wahrscheinlichkeit 0.95 puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\text{VaR}_{0.95}(\Delta MV) = MV_{0.95}(1) \cdot P(0, 1) - MV(0)$$

$$= S \cdot N \cdot (({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P_{0.95}(1, 2) + {}_2p_{50} \cdot P_{0.95}(1, 3)) \cdot P(0, 1)$$

$$- S \cdot N \cdot (({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P(0, 2) + {}_2p_{50} \cdot P(0, 3))$$

zu stellen.

- b) Das replizierende Portfolio besteht aus Zerobonds mit Laufzeit 1 über den Nominalbetrag $S \cdot N \cdot (1 - {}_1p_{50})$, aus Zerobonds mit Laufzeit 2 über den Nominalbetrag $S \cdot N \cdot ({}_1p_{50} - {}_2p_{50})$ und aus Zerobonds mit Laufzeit 3 über den Nominalbetrag $S \cdot N \cdot {}_2p_{50}$. Dessen Marktwert ist gerade $MV(0)$ aus a).



- c) Die Zahlung der zum Zeitpunkt 1 auslaufenden Zerobonds ist gleich der Summe der zum Zeitpunkt 1 fälligen Versicherungsleistungen und der Nominalbeträge Nom_1 und Nom_2 ,

$$Nom_1 := \frac{S \cdot N \cdot ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P(0, 2)}{P(0, 1)} = \frac{S \cdot N \cdot ({}_1p_{50} - {}_2p_{50})}{1 + F(0, 1, 2)}$$

$$Nom_2 := \frac{S \cdot N \cdot {}_2p_{50} \cdot P(0, 3)}{P(0, 1)} = \frac{S \cdot N \cdot {}_2p_{50}}{1 + 2F(0, 1, 3)},$$

wobei $F(0, 1, t)$ den Forward-Zins zum Zeitpunkt 0 für die Periode $[1, t]$ bezeichnet. Zur Elimination des Zinsänderungsrisikos kann das Versicherungsunternehmen zum Zeitpunkt 0 einen Receiver-Swap über den Nominalbetrag Nom_1 mit $K = F(0, 1, 2)$ und einzigem Zahlungszeitpunkt 2 und einen Receiver-Swap über den Nominalbetrag Nom_2 mit $K = F(0, 1, 3)$ und einzigem Zahlungszeitpunkt 3 kostenlos erwerben.

Zum Zeitpunkt 1 kann das Versicherungsunternehmen ausfallfreie Zerobonds mit Laufzeit 1 und Nominalbetrag

$$\frac{Nom_1}{P(1, 2)} = Nom_1 \cdot (1 + L(1, 2))$$

und ausfallfreie Zerobonds mit Laufzeit 2 und Nominalbetrag

$$\frac{Nom_2}{P(1, 3)} = Nom_2 \cdot (1 + 2L(1, 3))$$

kaufen. Zusammen mit der endfälligen Zahlung der Receiver-Swaps können dann die zu den Zeitpunkten 2 und 3 fälligen Versicherungsleistungen gezahlt werden.

Der Receiver-Swap eliminiert das Zinsänderungsrisiko dadurch, dass der Terminzins $F(0, 1, t)$ den variablen Zins in der Periode $[1, t]$ ersetzt.

Alternativ können zum Zeitpunkt 0 Forward-Kontrakte über den Kauf von Zerobonds zum Zeitpunkt 1 über den Nominalbetrag $S \cdot N \cdot ({}_1p_{50} - {}_2p_{50})$ mit Fälligkeit zum Zeitpunkt 2 bzw. den Nominalbetrag $S \cdot N \cdot {}_2p_{50}$ mit Fälligkeit zum Zeitpunkt 3 geschlossen werden. Analog wie oben ist zu begründen, dass der zum Zeitpunkt 0 vereinbarte und zum Zeitpunkt 1 zahlbare Forward-Preis Nom_1 bzw. Nom_2 beträgt.

- d) Algorithmus: Simuliere unter dem realen Maß m Vektoren (r_i, N_i) , $i = 1, \dots, m$, wobei r_i eine Realisation der Short Rate $r(1)$ und N_i eine Realisation der Anzahl der Versicherten zum Zeitpunkt 1 darstellen. D.h., ziehe m Zufallszahlen r_i aus

$$\mathcal{N}\left(r(0) \exp(-a) + b(1 - \exp(-a)), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a))\right)$$

und m Zufallszahlen N_i aus $Binomial(N, {}_1p_{50})$. Berechne für jeden Vektor (r_i, N_i) den Marktwert MV_i zum Zeitpunkt 1 mit Hilfe der analytischen Formeln aus b) auf Basis des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes. Wähle den $[0.05 \cdot m] + 1$ -größten Wert der MV_i und bezeichne ihn mit $MV_{0.95}$. Das benötigte Risikokapital ergibt sich dann als

$$RK = P(0, 1)MV_{0.95} - MV(0).$$



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. P. Brühne, Dr. I. Merk, E. Müller, A. Wolfstein,
Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Das benötigte Risikokapital lässt sich nicht durch eine modifizierte Version der Strategie aus b) auf Null reduzieren, da versicherungstechnische Risiken nicht durch Zinsinstrumente gehedget werden können. Es verbleibt die Unsicherheit über das Volumen der benötigten Zinsinstrumente, da der Bestandsverlauf ungewiss ist.

CERA A - Exam

Foundations and Quantitative Methods of ERM

19.05.2017

Hints.

- You may use a pocket calculator.
- You can reach up to **180** points. You will have passed the exam if you reach at least **80** points.

Problems

1. Filling the role of CEO. (16 P)

Assume that you have been appointed CEO of the subsidiary of an insurance company. The subsidiary is owned by a parent company which has in total 2 further subsidiaries. Each of those is busy in a certain sales subsegment of the market. You are the CEO of the direct insurer. Furthermore, the board of the parent company has members responsible for non-life, life etc and some of them are also members of the board of each subsidiary with the same responsibility.

As you have just joint your subsidiary you will face some questions.

- a) (8 P) List arguments pro and con (two for each) for organising the boards of the companies in the group as outlined and describe in detail one pro and one con argument.
- b) (8 P) Name and interpret potential conflicts of interest.

2. Case study - Investment Decision and Exploring Adequacy of Risk Management. (44 P)

Assume that for a Euro-Zone non-life insurer you are the subject matter expert for investment decisions and Asset Liability Management (ALM) in the risk management unit, directly reporting to the CRO.

In its corporate business activities your enterprise is the consortium leader for a group of five insurers sharing a third party liability cover for a big construction undertaking. Following an event of damage for an underground tunnel in the USA, reserves will have to be set up that in total will make up 5% of your balance sheet. After having deducted the other firm's parts, which will show up as receivables in your gross balance sheet, a fifth of the reserves are left in your net balance sheet.

For this damage event a first level court decision was found some weeks ago, and while decisions from higher courts are pending, your firm has to start to set up the reserves to cover the claims to be paid.

As the claims especially include long term annuities and compensations to be payed, the management seeks alternative investments in ALM in the current low yield environment.

One board member was approached by the construction firm involved in the claim above with the offer to invest in a dam project in Brazil which just started. For the first five years this would be a loan to the company in € without repayments, and after successful putting into operation for 35 years, a minimum interest and repayment in local currency financed from the profits generated by the dam will be paid to your company, with the option of bonus payments. In case the dam project would be blocked by a court decision, it would be replaced by a commercial real estate project in China.

As a type of collateral, part of the package is a derivative that would replace the minimum return of the dam or the commercial property in case none of both projects will be realized.

The volume of this investment could be chosen to be up to 5% of your balance sheet length.

As the reserves for the above mentioned damage event at the end might not be needed to set up, an ALM alternative discussed would be make use of the investment opportunity to match cash flows from your enterprise's household and building insurance portfolio.

You are requested to explore this investment opportunity from the perspective of risk management. The CRO has provided you with a list of questions that you have to answer.

a) (16 P) Analysis of risks

Please analyse the risks associated with such a kind of investment. Please do not only provide a list of potential quantifiable risks (at least 5) but analyse the concrete situation with potential interrelation of risks and also include non-quantifiable risks (at least 3).

b) (12 P) Develop project outline and explore process implications

With respect to the typical elements of risk management in a Solvency II context with financial reporting according to the IFRS, please develop a project step outline for entering into this specific investment, including

- i) focus topics and deliverables for the project,
- ii) internal and external stakeholders to be involved and the most important interfaces to regular processes.

You do not need to sketch a time plan but only the main steps.

c) (16 P) Recommendation for risk governance and further risk mitigation measures

Based on the risks that you identified under a), please explain for each consequences for the risk governance and recommend potential risk mitigation measures.

3. Risk measures. (28 P)

a) (4 P) Let the claim size X be exponentially distributed with parameter $\lambda > 0$. Determine Value at Risk $\text{VaR}_\alpha(X)$ and Expected Shortfall $\text{ES}_\alpha(X)$ at the confidence level $\alpha \in (0, 1)$ and compute the asymptotic ratio $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)}$.

Hint. $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$

b) (24 P) Let the random parameter Λ be Gamma(a, b)-distributed. Suppose that, given the realization $\Lambda = \lambda$ of the quality parameter, the claim size X is exponentially distributed

with parameter $\lambda > 0$.

Hint. The density of the Gamma distribution $\Gamma(a, b)$ with parameters $a, b > 0$ is given by

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \lambda^{a-1} \cdot \exp(-b\lambda) \cdot 1_{(0, \infty)}(\lambda).$$

The expected value equals $\frac{a}{b}$, the variance $\frac{a}{b^2}$.

- i) (4 P) Show that X is Pareto-distributed with cumulative distribution function $F(x) = 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a}$.
- ii) (4 P) Determine Value at Risk $\text{VaR}_\alpha(X)$ and Expected Shortfall $\text{ES}_\alpha(X)$ at the confidence level $\alpha \in (0, 1)$ as well as the asymptotic ratio $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)}$.
- iii) (4 P) Referring to general results of extreme value theory, explain the difference in the asymptotic ratio $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)}$ between part a) and b).
- iv) (12 P) There is some evidence that the distribution of the quality parameter Λ is changing over time. For updating the modelling assumptions on the distribution, you are given the last observation x_0 of the claim size and the estimates δ_1 and δ_2 of the average claim size by two independent experts. Suppose that, conditionally given $\Lambda = \lambda$, δ_i , $i = 1, 2$, are $\Gamma(c, c\lambda)$ -distributed with $c > 0$.
 - 1) (4 P) Show that the posterior distribution of Λ , given x_0 , δ_1 , δ_2 , is $\text{Gamma}(a + 2c + 1, b + x_0 + c(\delta_1 + \delta_2))$.
 - 2) (2 P) Explain why the expected value of the predictive distribution of the claim size is equal to

$$\mathbb{E}(X|x_0, \delta_1, \delta_2) = \frac{b + x_0 + c(\delta_1 + \delta_2)}{a + 2c}$$

Hint. You may refer to part i) and use without proof that the expected value of the Pareto-distribution with cumulative distribution function $F(x) = 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a}$ is equal to $\frac{b}{a-1}$.

- 3) (6 P) Analyze the efficiency of the above updating strategy for limiting parameter risk. In particular, address the modelling assumptions on the expert opinions.

4. Extreme value theory (EVT). (16 P)

- a) (3 P) "EVT is a useful tool in actuarial risk management". Illustrate this statement using a risk management problem of your choice from the field of casualty insurance or ERM.
- b) (2 P) For some random variable X and $u \in \mathbb{R}$ with $P(X > u) > 0$ the excess-distribution with threshold u is defined by $F_u(x) = P(X - u > x | X > u)$, $x \geq 0$. Determine the excess distribution for the generalized Pareto distribution (GPD) (The GPD with parameters ξ, β has the survival function $\bar{F}_{\xi, \beta}(x) = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$, $x > 0$.)
- c) (6 P) Explain the role of the GPD for the peaks over threshold (POT) method in EVT and the key idea that underlies the corresponding tail estimator. Discuss potential problems in the application of the method.

- d) (5 P) Denote by $e(u) = E(X - u \mid X > u)$ the mean excess function of a claim X with continuous survival function \bar{F} . Demonstrate that for an excess-of-loss reinsurance contract with payoff $(X - K)^+$ it holds that

$$E((X - K)^+) = \bar{F}(K)e(K).$$

Assume that the excess distribution of X above the threshold K is given by a GPD with parameters $\hat{\xi} < 1$ and $\hat{\beta}$. Justify (briefly) this assumption for K large. Show that

$$E((X - K)^+) = \bar{F}(K) \frac{\hat{\beta} + \hat{\xi}K}{1 - \hat{\xi}}.$$

Hint: For a GPD with parameters ξ, β it holds that $e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}$.

5. Risk aggregation and copulas. (26 P) Consider an insurance company with d business lines and associated losses L_1, \dots, L_d . The risk capital of the individual business lines is denoted by EC_1, \dots, EC_d .

- a) (9 P) Explain three aggregation methods for computing the firm-wide risk capital EC and contrast strengths and weaknesses of the methods.
- b) (13 P) For simplicity we consider from now on $d = 2$ business lines. It is known that $L_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ and that L_2 is Pareto distributed with parameter $\alpha > 0$, that is $P(L_2 \leq x) = 1 - (1 + x)^{-\alpha}$. The copula method has been chosen for risk aggregation.
- i) (4 P) The QRM-team has to choose between a meta Gauss model (based on the Gauss copula C_ρ^{Ga}) and a meta t model (based on $C_{\nu, \rho}^t$). Discuss pros and cons of both model classes. Which model class is (for equal ρ) the more conservative choice with respect to the modelling of tail risk?
 - ii) (2 P) Derive for ρ and ν fixed the distribution function $F_{\mathbf{L}}$ of $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ in the meta t model.
 - iii) (7 P) You have a random number generator that samples independent realisations z_1, z_2 from a one-dimensional standard normal distribution and you are able to generate a realisation v of a χ_ν^2 distributed random variable V that is independent of z_1, z_2 . Develop an algorithm that generates a loss variable $\mathbf{L} = (L_1, L_2)' \sim F_{\mathbf{L}}$.
- c) (4 P) Define in the context of exercise b) the coefficient of tail dependence λ of \mathbf{L} and show that λ depends only on the chosen copula. (The copulas considered in b) are symmetric so that it is not necessary to distinguish between upper and lower tail dependence.)

6. Counterparty- and credit risk. (22 P) We consider a reinsurance contract between an insurer I and a reinsurance company R on a given insurance portfolio; the payoff of the contract at the maturity date T is given by the random variable $X_T \geq 0$ (the exact form of X_T does not matter). The market value of the contract in $t \leq T$ is denoted by V_t . From the viewpoint of I there is the risk that R defaults before paying its liabilities from the contract (counterparty risk).

- a) (5 P) Discuss 3 different methods for managing the counterparty risk in this situation. Consider in particular hedging strategies where I takes a protection buyer position in a CDS on R and analyze possible problems in using such a strategy.
- b) (7 P) Counterparty risk has to be considered in the pricing of the reinsurance contract. Similar as in the case of financial products a valuation adjustment is given by

$$(1) \quad \text{CVA}^{\text{indep}} = \delta^R \int_0^T \bar{F}_I(t) e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_R(t) dt.$$

Here δ^R denotes the loss given default of R , τ_I is the default time of I , $\bar{F}_I(t) = Q(\tau_I > t)$ the survival probability of I under the martingale measure Q used for pricing and $f_R(t)$ is the density of the default time τ_R of R under Q .

Derive the formula (1) under the assumption that τ_R , τ_I and the process $V = (V_t)_{0 \leq t \leq T}$ are Q -independent.

- c) (3 P) Discuss the independence assumption made in b) critically. Focus in particular on the independence of τ_R and V .
- d) (7 P) Consider a simple reduced-form credit risk model with constant interest rate $r > 0$, constant hazard-rate $\gamma > 0$ (under the risk-neutral measure Q). Compute the price in $t = 0$ of a defaultable bond issued by R with nominal 1 and maturity date T . Assume that in case of a default of R in $\tau \leq T$ an amount of 0.5 is paid to the holder of the bond directly in τ_R .
- Assume now that the hazard-rate γ has been determined from the market price of the bond. Explain, why this parameter can be used in the calibration of the density f_R in the CVA-formula (1).

7. Interest rate risk management. (28 P)

At time $t = 0$, consider a portfolio of N persons aged 50 that hold a paid-up endowment policy with insured sum S and a remaining time to expiration of 3 years. (The sum insured is paid out at expiry of the contract in case of survival and otherwise at the end of the year of death.) We are given the probability ${}_1p_{50}$, that a 50-year-old person reaches the age of 51, and the probability ${}_2p_{50}$ that a 50-year-old person reaches the age of 52.

The insurance company has invested the market value of the insurance liabilities in zero-bonds with maturity of 1 year.

The short rate $r(t)$ is supposed to follow the Vasicek model with parameters a , b and σ under the real world measure:

$$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma dW_t \quad (*)$$

If λ denotes the market price of risk then, under the risk neutral measure Q , $r(t)$ follows the Vasicek model

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t)) dt + \sigma dW_t^Q$$

with $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Represent all results in terms of the above mentioned quantities.

- a) (10 P) Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number, determine the amount of risk capital at time 0 that is needed in order to buffer the potential increase in insurance liabilities at time 1 due to interest rate risk with probability 0.95.

Hint. Under the dynamics (*), the expected value of the stochastic discount factor $D(t, T)$ is given by $\mathbb{E}(D(t, T)|\mathcal{F}_t) = \exp[-A(t, T) - B(t, T)r(t)]$ with

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) (T - t - B(t, T)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(t, T)^2 \\ B(t, T) &= \frac{1}{a} (1 - \exp(-a(T - t))), \end{aligned}$$

and it holds that

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(r(0) \exp(-at) + b(1 - \exp(-at)), \frac{\sigma^2}{2a} (1 - \exp(-2at))\right).$$

- b) (2 P) Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number, describe a portfolio of zero-bonds replicating the insurance liabilities.
- c) (8 P) Suppose now that the zero bonds with maturity 1 are illiquid and cannot be sold to a third party. Develop a strategy using swap and forward contracts that, under the assumption that the actual number of deaths is equal to the expected number, reduces the required risk capital to zero and does not involve any costs.
- d) (8 P) In the case that the number of deaths is random, develop an algorithm that, by means of simulations, determines the amount of risk capital at time 0 that is needed in order to buffer the potential increase in market value of the insurance liabilities at time 1 due to interest rate risk and insurance risk with probability 0.95. Is it possible to reduce the required risk capital to zero by means of a modified version of the strategy from b) based on interest rate derivatives? Give reasons for your answer.

Proposal for solution

1. Filling the role of CEO.

- a) „pro“: same person is responsible for his/her area in all companies guarantees for same policies applied in the whole group; simplicity due to less persons involved in all boards
- „con“: complex hierarchy: some board members of the parent company are reporting to the CEO of a subsidiary in their function as board member of the subsidiary; difficult management of joining all board meetings (even if not face to face)
- „pro“: in each company of the group the board member responsible for non-life for example will apply directly the same underwriting rules enabling avoidance of different understanding/misinterpretation, this could also guarantee the same pricing capabilities, similar choice of employees and working atmosphere which in total could enable more powerful and striking action in the market across all segments
- „con“: in case of non-agreement between CEO of a subsidiary and a board member being also a board member of the parent company it might be difficult for the CEO to rule; there could be in principle different bonification objectives in place: the CEO has objectives related to the subsidiary, the objectives of the board member are related to the group
- b) As the CEO has the target to develop the subsidiary and the board member is related to the success of the group as a whole divergent target could occur, examples could be the allocation of resources between the subsidiaries; less or more intensive development of a certain market segment represented by the subsidiaries; deterioration of one subsidiary with advantage for the group as a whole: see for example divergent interests of sales forces of the different subsidiaries for example in terms of approaching the customer; this implies a potential governance issue: as outlined in Art. 41 of the Solvency II directive clear assignment of functions and suitable separation of responsibilities are required

2. Case study - Investment Decision and Exploring Adequacy of Risk Management.

- a) Analysis of risks: For the first five years the investment is a type of loan, subject to the typical market risks as interest rate risk and spread risk.

Afterwards there is a kind of packaged risks: for the loan as regards the interest as well as the repayments. Additionally concerning the bonus payments, there are typical risks of infrastructure investments (e.g. long term, low liquidity, depending on stable political framework, exposure to natural catastrophes,...) for the dam or property risk in case of the alternative project.

Over the overall run-time of the investment there is a default risk for the construction firm as well as for the counterparty of the derivate in case this would be different from the construction firm.

Additionally we have currency risk as the return of the investment after the first five years will be in local currency (Brazil or China) and on the other hand the reporting currency of the firm is € and the claims for the damage event will have to be paid in US-\$.

As the construction firm would be the counterparty for the investment as well as for insurance, with a gross balance sheet portion of 5% there additionally is an accumulation or concentration risk.

As usual for long term infrastructure investments, there is potentially liquidity risk, especially if this investment would not match long-term stable liabilities but volatile insurance claims form the liability side of the portfolio.

Furthermore there are potentially legal risks - especially for the dam project, for the reserve and claims for the damage event and potentially also for commercial property in China.

Depending on the political environment (political risk) most likely there will also be reputational risks. Furthermore such a complex structure will be difficult to properly cover in external reporting with the risk that analysts and investors will not like that investment and the share price might suffer.

b) Project outline and process implications:

i) Focus topics and deliverables:

First step in the project would be objective identification for the investment project - with respect to the ALM requirements for the damage event under discussion and the insurance portfolio in total.

Second step would be the refinement of the risk analysis prepared in as task a), first with the focus of „event identification“ i.e. the completeness of the inventory.

Third step would be the refinement of the risk analysis by a detailed risk assessment, measurement and quantification (frequency and impact) where possible. This would include a detailed analysis of the dam project and the commercial real estate project as well as the quality and risk management standards of the construction firm and especially taking into account the experience from the underground tunnel damage event.

Fourth step would be to explore risk response and risk mitigation (see c)) and evaluate their impact on the risk-return-relation.

Fifth step would be to define the internal reporting and information of the units and persons effected as well as defining the regular monitoring of the performance of the investment and its risks.

Finally an overall risk-return evaluation and business case analysis would have to be prepared for the management to decide on that project. This step would not only include risk topics but also process implications and related costs.

This analysis essentially covers most elements of a focussed ad-hoc ORSA. Depending on the materiality of the investment volume to be signed, a formal ad-hoc ORSA would be executed but at least, the insights from the projects would be considered in the next regular ORSA.

ii) Internal and external stakeholders and interfaces to regular processes

The management will have to be involved, first in its role of the initiator of this project and furthermore since 5% of the balance sheet for an investment volume would typically considered to be material.

Furthermore internal stakeholders would be those responsible for risk management, ALM, investment management and controlling, internal and external reporting and legal affairs. Thus typical units to be involved would be:

- board and/or committees for risk management, investment management and ALM
- Risk management (inter alia modelling and internal risk reporting)
- Investment management, ALM unit and actuarial units
- Accounting (local GAAP, IFRS, Solvency II balance sheet)
- Legal department
- Compliance function (e.g. with respect to reputational risk)
- Unit responsible for the Internal Control System (ICS)
- Unit(s) responsible for SFCR, RSR and financial statements (local GAAP as well as IFRS)

External stakeholders to be involved would be external auditors to agree on accounting and potentially the supervisory authority to clarify if the asset would qualify to cover liabilities according to local law.

Typical regular processes are:

- Investment controlling and investment risk reporting
- ALM and planning process
- Risk modelling and risk reporting including the ORSA
- Accounting and external reporting
- Internal controls
- Monitoring legal developments
- ORSA

c) Recommendation for risk governance and further risk mitigation measures:

The investment offered is a bundle of instruments and thus somehow packaged requiring first a thorough analysis of the mechanism and layers of security. Furthermore there are three components (dam, commercial property, derivative) with different types of investments subject to legal risks, political risks and reputational risks, forcing an interdisciplinary cooperation to evaluate the risk properly. This does not only hold true for the initial valuation but also requires ongoing monitoring.

Consequently, the recommendation would be to create a team or sub-team to have a holistic, interdisciplinary view on this investment feeding its insight in the regular processes on an on-going basis. In case a material volume would be signed, a specific regular report to the board or a responsible board-level committee should be implemented. In any case the investment itself and its on-going monitoring would be part of the ORSA.

Risk mitigation measures could be:

- Agree with the construction company on the possibility for the insurer to offset claims payment in the case of default of (parts of) the investment
- Require dedicated risk management measures for the dam project with lessons learned from the underground tunnel project
- Hedge the currency risk for the different components or require the construction company to agree to take the currency risks
- Implement a special right of termination e.g. in case of delay of the completion of the construction projects
- Require collaterals or letters of guarantee e.g. from a bank to take parts of the default risk in the first five years and assure this for the derivative for the years 5+.

3. Risk measures.

- a) By inverting the cumulative distribution function $F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, we obtain the value at risk:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -\frac{\ln(1 - \alpha)}{\lambda}$$

By definition, we compute

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \frac{-\ln(1 - z)}{\lambda} dz \\ &= \frac{1}{\lambda(1 - \alpha)} [(1 - z) \ln(1 - z) - (1 - z)]_\alpha^1 \\ &= \frac{1 - \ln(1 - \alpha)}{\lambda}. \end{aligned}$$

The asymptotic ratio of value at risk and expected shortfall is given by

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1 - \ln(1 - \alpha)}{-\ln(1 - \alpha)} = 1.$$

- b) i) Averaging over the distribution of the quality parameter Λ , we get the cumulative distribution function of the claim size X .

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^\infty (1 - \exp(-\lambda x)) \cdot \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda) d\lambda \\ &= 1 - \int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp(-(b+x)\lambda) d\lambda \\ &= 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a} \int_0^\infty \frac{(b+x)^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp(-(b+x)\lambda) d\lambda \\ &= 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a} \end{aligned}$$

- ii) Inverting the cumulative distribution function of the Pareto-distribution from a) gives

$$\text{VaR}_\alpha(X) = b((1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - 1).$$

By definition, we calculate

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 b((1 - z)^{-\frac{1}{a}} - 1) dz \\ &= \frac{b}{1 - \alpha} \left[-\frac{a}{a - 1} (1 - z)^{-\frac{1}{a} + 1} \right]_\alpha^1 - b \\ &= \frac{ab}{a - 1} (1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - b. \end{aligned}$$

The asymptotic ratio of value at risk and expected shortfall is given by

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)} &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{a-1}(1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - 1}{(1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - 1} = \frac{a}{a - 1} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{(1 - \alpha)^{-\frac{1}{a} - \frac{a-1}{a}}}{(1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - 1} \\ &= \frac{a}{a - 1} + \frac{a}{a - 1} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{a-1}{a}}{(1 - \alpha)^{-\frac{1}{a}} - 1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}. \end{aligned}$$

- iii) Since the survival function of the Pareto-distribution decreases polynomially with parameter $\zeta = \frac{1}{a}$, the result from b) turns out to be a special case of the general result of EVT on the asymptotic ratio $\frac{\text{ES}_\alpha(X)}{\text{VaR}_\alpha(X)}$. The exponential distribution from part a) is light-tailed, such that the values of VaR_α , that ignores the tail, and ES_α , that takes the tail into account, differ less for large α .
- iv) 1) We first determine the posterior density Λ , given the observation x_0 and the expert opinions δ_1, δ_2 . We may introduce and delete constants as convenient.

$$\begin{aligned} \pi(\lambda|x_0, \delta_1, \delta_2) &\propto f(x_0|\lambda) \cdot \prod_{i=1}^2 f(\delta_i|\lambda) \cdot \pi(\lambda) \\ &\propto \lambda \exp(-x_0\lambda) \cdot \prod_{i=1}^2 (\lambda^c \cdot \exp(-c\delta_i\lambda)) \cdot \lambda^{a-1} \cdot \exp(-b\lambda) \\ &\propto \lambda^{a+2c} \cdot \exp(-(b + x_0 + c(\delta_1 + \delta_2))\lambda). \end{aligned}$$

This is the density of $\text{Gamma}(a + 2c + 1, b + x_0 + c(\delta_1 + \delta_2))$.

- 2) The predictive distribution of the claim variable is obtained by averaging the exponential distribution over the posterior distribution of the parameter Λ from 1). By part i), this is the Pareto-distribution with parameters $a + 2c + 1$ and $b + x_0 + c(\delta_1 + \delta_2)$. Its expected value equals $\frac{b+x_0+c(\delta_1+\delta_2)}{a+2c}$.

- 3) The update combines the previous distribution of the claim size with the new information of the last observation and the expert opinions. Therefore, the update is well suited to take into account a trend in the evolution of the parameters. However, it would not entirely reflect a change point. The efficiency of the update depends on the accuracy of the assumptions on the distribution of the expert opinions. First, the experts are assumed to be independent and to give an unbiased estimate of the mean claim size. The conditional expected value of the expert opinions, given the value λ of the parameter, is given by $\frac{c}{c\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(X|\Lambda = \lambda)$ for all $c > 0$. The parameter c thus allows to model the degree of reliability of the expert opinions. Letting tend $c \rightarrow 0$, we obtain

$$\lim_{c \rightarrow 0} \mathbb{E}(X|x_0, \delta_1, \delta_2) = \frac{b + x_0}{a}.$$

This is the expected value of the Pareto-distribution with parameters $a + 1$ and $b + x_0$, which is no longer influenced by the expert opinions. The reason for that is that the expert opinions become totally unreliable when $c \rightarrow 0$ because of $\lim_{c \rightarrow 0} \text{Var}(\delta_i) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{c}{(c\lambda)^2} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c\lambda^2} = \infty$.

4. Extreme value theory.

- a) EVT offers a systematic theory-based approach to estimate tails of distributions in situations where the empirical df is not sufficient due to a shortage of available data. Potential applications include: valuation of reinsurance treaties (excess of loss); estimation of tail-related risk measures (other answers are possible as well)
- b) The excess distribution is best determined from the survival function $\bar{F}_u(x) = P(X - u > x | X > u) = \bar{F}(x + u) / \bar{F}(u)$ We get for the GPD $\bar{F}_{\xi, \beta}(x) = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$ and hence

$$\bar{F}_u(x) = \frac{\bar{F}(x + u)}{\bar{F}(u)} = \left(\frac{1 + \xi \frac{u}{\beta} + \xi \frac{x}{\beta}}{1 + \xi \frac{u}{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta(1 + \xi \frac{u}{\beta})}\right)^{-\frac{1}{\xi}}.$$

Hence the excess distribution is again GPD with parameters ξ and $\tilde{\beta}(u) = \beta + \xi u$.

- c) Basic idea: For $x > u$ it holds that $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x - u)$. If u is large but not too large $\bar{F}(u)$ is easily estimated to be the proportion of the data bigger than u (empirical survival function). The excess function is modeled as a GPD (based on asymptotic result of Pickands, Balkema and de Haan). The parameters $\hat{\xi}$ and $\hat{\beta}$ can be estimated via Maximum Likelihood, among others. The main issue is the proper choice of the threshold u (tradeoff between bias and variance).
- d) Since X has a continuous distribution we get

$$E((X - K)^+) = P(X > K)E(X - K | X > K) = \bar{F}(K)e(K).$$

The approximation of the excess distribution by a GPD can be justified by the asymptotic result of Pickands, Balkema and de Haan. Substituting K into the mean excess function gives the result.

5. Risk aggregation and copulas.

a) Denote by EC_i the risk capital of subunit i and by EC the overall capital. There are several approaches for risk aggregation: (3 are sufficient):

- Simple summation, $EC = EC_1 + \dots + EC_d$ pro: Simple, conservative if economic capital is computed by means of a subadditive risk measure. Con: not principles-based, diversification is ignored.
- Correlation adjusted summation $EC = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} EC_i EC_j \right)^{\frac{1}{2}}$, where ρ_{ij} is often interpreted as correlation between L_i and L_j . Pro: simple to compute; diversification is accounted for albeit in an ad hoc way. Con: in general not principles-based, the ρ_{ij} are difficult to determine and they should satisfy consistency conditions.
- Copula Methods. Pro: principles based, consistent. Con: Model risk in the copula choice, more difficult to communicate.
- Structural Models (factor based) Pro: principles based, natural from an economic viewpoint. Con: very complex in practical application.

b) i) Gauss copula. Pro: simple (only one parameter needs to be determined). Con: cannot account for tail dependence. t copula. Pro: permits the modelling of tail dependence; Con: more complex to apply (2 parameters). The t copula is more conservative due to the ‘built in’ tail dependence.

ii) From Sklar’s theorem we get that $F_{\mathbf{L}}(\ell_1, \ell_2) = C_{\rho, \nu}^t \left(\phi((\ell_1 - \mu)/\sigma), 1 - (1 + \ell_2)^{-\alpha} \right)$.

iii) Step 1: Construction of realisations $(x_1, x_2) \sim t_{\rho}^t$: Let $w = \nu/v$ and $x_1 = \sqrt{w}z_1$, $x_2 = \sqrt{w}(\rho z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}z_2)$.

Step 2: Construction of $(u_1, u_2) \sim C_{\rho, \nu}^t$: Let $(u_1, u_2) = (t_{\nu}(x_1), t_{\nu}(x_2))$.

Step 3: For the df F of the Pareto distribution with parameter α one has $F^{-1}(y) = (1 - y)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1$. It follows from the second part of Sklar’s theorem that the realisations are given by

$$(x_1, x_2) = \left(\mu + \sigma \phi^{-1}(u_1), (1 - u_2)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \right)$$

c) We work with $\lambda = \lambda_l$. The coefficient of lower tail dependence of the random vector $(L_1, L_2)'$ is

$$\begin{aligned} \lambda_l(L_1, L_2) &= \lim_{q \rightarrow 0^+} P(L_2 \leq F_2^{-1}(q) \mid L_1 \leq F_1^{-1}(q)) = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{F(F_1^{-1}(q), F_2^{-1}(q))}{F_1(F_1^{-1}(q))} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}, \end{aligned}$$

where we used the definition of conditional probabilities and the relation $C(u, u) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(u))$.

6. Counterparty and credit risk.

a) Possible (non-exclusive) approaches

- Exposure limits and minimum standards on the credit quality of counterparties
- Netting
- Valuation adjustments, that help to take the default risk of the reinsurer into account in the pricing of a reinsurance contract
- Economic capital
- Exchange of collateral that can be used by I in case R defaults
- Hedging by taking a protection buyer position in a CDS on R ; the default payment is a (partial) compensation for the loss due to the default of R . Potential problems: The size of the necessary CDS position is a priori unclear but depends on the claim size X_T ; Basis risk: it is possible that R does not satisfy her obligations from the contract, but that this does not count as a default (basis risk) (one point is sufficient, other answers possible as well).

b) It holds that (see slides p 178)

$$\begin{aligned} \text{CVA} &= \delta^R \mathbb{E}^Q (I_{\{\tau < T\}} I_{\{\xi = R\}} e^{-r\tau} V_\tau^+) = \delta^R \int_0^T E^Q (I_{\{\xi = R\}} e^{-r\tau} V_\tau^+ \mid \tau_R = t) f_R(t) dt \\ &= \delta^R \int_0^T E^Q (I_{\{\tau_I > t\}} e^{-rt} V_t^+ \mid \tau_R = t) f_R(t) dt, \end{aligned}$$

where ξ is the identity of the party that defaults first (R or I). Using the independence assumption we get

$$E^Q (I_{\{\tau_I > t\}} e^{-rt} V_t^+ \mid \tau_R = t) = e^{-rt} \bar{F}_I(t) E^Q (V_t^+)$$

which gives the claim.

- c) If R is a large reinsurer, one would expect that $E(V_t^+ \mid \tau_R = t) > E(V_t^+)$. For instance the default of R could be caused by a catastrophic event that leads to an increase in the premia for all reinsurance contracts. Moreover, the default of R might lead to an increase in the demand for reinsurance, since former clients of R need to renew their reinsurance cover. (These are examples for contagion effects).
- d) The payoff of the bond can be decomposed into two parts. In case of no default one gets the nominal value; the price of this survival claim is

$$E^Q (e^{-rT} 1_{\{\tau > T\}}) = e^{-rT} Q(\tau > T) = e^{-(r+\gamma)T}.$$

The price of the recovery payments is

$$E^Q \left(0.5 e^{-r\tau} 1_{\{\tau \leq T\}} \right) = 0.5 \int_0^T e^{-rt} \gamma e^{-\gamma t} dt = 0.5 \frac{\gamma}{r + \gamma} (1 - e^{-(r+\gamma)T}).$$

In the computation of valuation adjustments one uses the density of τ_R under the risk-neutral pricing measure Q ; this density can be calibrated from market data such as the price of a bond.

7. Interest rate risk management.

- a) Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number means that we do not take into account insurance risk. As a consequence, we have to determine the required risk capital needed to buffer an increase in market value of insurance liabilities due to decreasing interest rates. The stochastic present value of the insurance liabilities at time $t \in \{0, 1\}$ (including the payments falling due immediately) is then given by

$$\begin{aligned} PV(0) &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) \cdot D(0, 1) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot D(0, 2) + {}_2p_{50} \cdot D(0, 3)) \\ PV(1) &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot D(1, 2) + {}_2p_{50} \cdot D(1, 3)) \end{aligned}$$

The market value is determined under the risk neutral measure. Using the prices of the zero bonds

$$\begin{aligned} P(0, t) &= \exp(-A_\lambda(0, t) - B(0, t) \cdot r(0)) \quad \text{with} \\ A_\lambda(0, t) &= \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t - B(0, t)) + \frac{\sigma^2}{4a}B(0, t)^2, \end{aligned}$$

we get the market value at time 0

$$MV(0) = \mathbb{E}_Q(PV(0)) = S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) \cdot P(0, 1) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P(0, 2) + {}_2p_{50} \cdot P(0, 3)).$$

The 95%-quantile of the market value of the insurance liabilities at time 1 derives from the 5%-quantile of the normally distributed short rate $r(1)$. With the parameters of the normal distribution under the real-world measure

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r(1)) &= r(0) \exp(-a) + b(1 - \exp(-a)) \\ \text{Var}(r(1)) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a)) \end{aligned}$$

we obtain the 5%- quantile

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{\text{Var}(r(1))} \cdot \Phi^{-1}(0.05).$$

In this VaR-scenario, the market value of insurance liabilities is given by

$$\begin{aligned} MV_{0.95}(1) &= \mathbb{E}_Q(PV(1) \mid r(1) = r_{0.05}(1)) \\ &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P_{0.95}(1, 2) + {}_2p_{50} \cdot P_{0.95}(1, 3)) \end{aligned}$$

using the zero bond prices

$$\begin{aligned} P_{0.95}(1, t) &= \exp(-A_\lambda(1, t) - B(1, t) \cdot r_{0.05}(1)) \quad \text{with} \\ A_\lambda &= \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t - 1 - B(1, t)) + \frac{\sigma^2}{4a}B(1, t)^2. \end{aligned}$$

In order to compensate an increase in market value of the insurance liabilities with probability 0.95, at time 0, we need the risk capital

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{0.95}(\Delta MV) &= MV_{0.95}(1) \cdot P(0, 1) - MV(0) \\ &= S \cdot N \cdot ((1p_{50} - 2p_{50}) \cdot P_{0.95}(1, 2) + 2p_{50} \cdot P_{0.95}(1, 3)) \cdot P(0, 1) \\ &\quad - S \cdot N \cdot ((1p_{50} - 2p_{50}) \cdot P(0, 2) + 2p_{50} \cdot P(0, 3)). \end{aligned}$$

- b) The replicating portfolio consists of zero bonds with maturity 1 and nominal amount $S \cdot N \cdot (1 - 1p_{50})$, zero bonds with maturity 2 and nominal amount $S \cdot N \cdot (1p_{50} - 2p_{50})$ and zero bonds with maturity 3 and nominal amount $S \cdot N \cdot 2p_{50}$. Its market value turns out to be $MV(0)$ from a).
- c) The payment of the zero bonds expiring at time 1 is equal to the sum of the insurance liabilities falling due at time 1 and the nominal amounts Nom_1 and Nom_2 ,

$$\begin{aligned} Nom_1 &:= \frac{S \cdot N \cdot (1p_{50} - 2p_{50}) \cdot P(0, 2)}{P(0, 1)} = \frac{S \cdot N \cdot (1p_{50} - 2p_{50})}{1 + F(0, 1, 2)} \\ Nom_2 &:= \frac{S \cdot N \cdot 2p_{50} \cdot P(0, 3)}{P(0, 1)} = \frac{S \cdot N \cdot 2p_{50}}{1 + 2F(0, 1, 3)}, \end{aligned}$$

where $F(0, 1, t)$ denotes the forward rate at time 0 for the period $[1, t]$. In order to eliminate interest rate risk the insurance company can enter the following derivatives at time 0 for free: a receiver swap with nominal amount Nom_1 , fixed leg $K = F(0, 1, 2)$ and single payment date 2 and a receiver swap with nominal amount Nom_2 , fixed leg $K = F(0, 1, 3)$ and single payment date 3.

At time 1, the insurance company can buy default-free zero bonds with maturity 1 and nominal amount

$$\frac{Nom_1}{P(1, 2)} = Nom_1 \cdot (1 + L(1, 2))$$

and default-free zero bonds with maturity 2 and nominal amount

$$\frac{Nom_2}{P(1, 3)} = Nom_2 \cdot (1 + 2L(1, 3)).$$

Together with the payments of the receiver swaps, then the insurance benefits falling due at times 2 and 3 can be paid out.

The receiver-swap eliminates interest rate risk by replacing the variable rate of the period $[1, t]$ with the fixed forward rate $F(0, 1, t)$.

Alternatively, at time 0, it is possible to enter forward contracts entitling to buy zero bonds with nominal amount $S \cdot N \cdot (1p_{50} - 2p_{50})$ and maturity 2 and nominal amount $S \cdot N \cdot 2p_{50}$ and maturity 3 at time 1. In an analogous manner as above, then we have to argue that the forward price which is agreed upon at time 0 and has to be paid at time 1 is equal to Nom_1 and Nom_2 , respectively.

- d) Algorithm: Under the real-world measure, simulate m vectors (r_i, N_i) , $i = 1, \dots, m$, where r_i is a realisation of the short rate $r(1)$ and N_i a realisation of the number of insured persons at time 1. I.e., draw m random numbers r_i from

$$\mathcal{N}\left(r(0)\exp(-a) + b(1 - \exp(-a)), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a))\right)$$

and m random numbers N_i from $\text{Binomial}(N, {}_1p_{50})$. For each vector (r_i, N_i) , compute the market value MV_i at time 1 with the help of the analytical formulae from b) based on the risk neutral probability measure. Choose the $[0.05 \cdot m] + 1$ -largest value of the MV_i and denote it by $MV_{0.95}$. Then, the required risk capital is determined by

$$RC = P(0, 1)MV_{0.95} - MV(0).$$

The required risk capital cannot be reduced to zero by a modified version of the strategy from b), since insurance risk cannot be hedged by interest rate derivatives. There remains uncertainty about the necessary amount of interest rate derivatives, because the evolution of the number of insured persons is uncertain.