DAV DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

# CERA - Klausur
# Quantitative Methoden des ERM

21.05.2016

**Hinweise:**

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **120**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **60** Punkte erreicht werden.

## Aufgaben

**1. Risikomaße und Steuerung.** (15 Punkte) Ein Rückversicherer berechne seine Prämien als das 1.2-fache der erwarteten Rückversicherungsleistung, verwende den $VaR_{0.97}$ als Risikomaß und den RORAC zur Unternehmenssteuerung.

**a)** (5 Punkte) Der Rückversicherer hat bereits die Zahlungsverpflichtung $Y_1 := \max(0, X_1 - 1000)$ übernommen, wobei die Schadengröße $X_1$ die folgende Verteilung hat:

$$\mathbb{P}(X_1 = 500) = 0.8, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1500) = 0.02.$$

Berechnen Sie den Value at Risk von $Y_1$ zum Niveau 0.97 sowie den RORAC.

**b)** (10 Punkte) Der Rückversicherer, der seine Geschäftsaktivitäten mit Hilfe der Kennzahl RORAC steuert, hat die Möglichkeit, zusätzlich das Risiko $Y_2 := \max(0, X_2 - 1000)$ zu versichern, wobei die Schadengröße $X_2$ unabhängig von $X_1$ ist und dieselbe Verteilung wie $X_1$ hat. Nimmt er diese Möglichkeit wahr, d.h. zieht er die Verteilung von $Y_1 + Y_2$ der Verteilung von $Y_1$ vor? Beurteilen Sie die Entscheidung des Rückversicherers aus Risiko- und Ertragssicht und erklären Sie, welche Eigenschaft der verwendeten Größen sie ausgelöst hat.

**2. Bayesianische Statistik.** (24 Punkte) Ein Unternehmen modelliert die Verluste einer Business Line infolge des operationalen Risikos durch

$$L = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

wobei $N$ die Anzahl der Verlustereignisse einer Periode und $X_i$ die Schadenhöhe des $i$-ten Ereignisses bezeichnen. Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Zufallsgrößen $N$ und $X_i$, $i \in \mathbb{N}$, seien unabhängig.
- Die Anzahl $N$, gegeben den Wert $\lambda$ des unbekannten Parameters $\Lambda$, sei Poisson($\lambda$)-verteilt. Die **a priori**-Verteilung von $\Lambda$ sei Gamma($\alpha, \beta$) mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$.

- Die Schadenhöhe $X$, gegeben den Wert $\theta$ des unbekannten Parameters $\Theta$, sei $LN(\theta, 4)$-verteilt. Die **a posteriori**-Verteilung von $\Theta$, gegeben die Beobachtungen des aktuellen Jahres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sei $\mathcal{N}(1, 1)$.

*Hinweis.* Die Dichte der Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ lautet

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x) 1_{(0,\infty)}(x).$$

**a)** (6 Punkte) Leiten Sie die a posteriori Verteilung von $\Lambda$, gegeben die beobachtete Schadenanzahl $n$ des aktuellen Jahres, her.

**b)** (8 Punkte) Entwickeln Sie einen Simulationsalgorithmus zur Bestimmung des Value at Risk zum Niveau 0.99 der Vorhersageverteilung von $L$. Inwiefern trägt das Ergebnis dem Parameterrisiko des Modells Rechnung? Wie könnte man eine zusätzliche Unsicherheit hinsichtlich der a priori Verteilung mit einbeziehen, wenn die Konstanten $\alpha$ und $\beta$ direkt aus einer Expertenbefragung, die einem Irrtumsrisiko unterliegt, übernommen wurden?

**c)** (10 Punkte) Eine Gesetzesänderung lässt einen Anstieg der Schadenhöhe erwarten. Über die konkrete Höhe der Auswirkungen entstehen kontroverse Diskussionen unter Experten, die sehr unterschiedliche Einschätzungen abgeben. Erarbeiten Sie einen Vorschlag, auf welche Weise das Bayesianische Modell konsistent an die Veränderungen angepasst werden könnte. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Einbeziehung der Expertenschätzungen ein und diskutieren Sie Vor- und Nachteile Ihres Vorschlags.

**3. Zinsmodelle.** (24 Punkte) Betrachten Sie ein Kollektiv von $N$ Personen des Alters 50, die eine beitragsfreie reine Erlebensfallversicherung der Höhe $S$ mit Fälligkeit im Alter 70 besitzen. Die Wahrscheinlichkeit, das Alter 70 zu erreichen, beträgt ${}_{20}p_{50} = 93.85\%$. Die Short Rate $r(t)$ werde unter dem realen Maß im Vasicek-Modell mit den Parametern $a = 0.36$, $b = 0.06$ und $\sigma = 0.03$ und beschrieben:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad (*)$$

Es ist $r(0) = 0.02$. Bezeichnet $\lambda$ den Marktpreis des Risikos, so folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß $Q$ dem Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^Q$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

a) (14 Punkte) Unter der Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, ermitteln Sie zum Zeitpunkt 0 das benötigte Risikokapital, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge des Zinsrisikos auszugleichen. Unterstellen Sie $\lambda = 0.2$.

*Hinweis.* Unter der Dynamik $(*)$ ist der Erwartungswert des stochastischen Diskontierungsfaktors $D(t,T)$ gegeben durch $\mathbb{E}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp[-A(t,T) - B(t,T)r(t)]$ mit

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(T - t - B(t,T)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(t,T)^2 \\
B(t,T) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-a(T-t))),
\end{aligned}$$

und es gilt

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(r(0)\exp(-at) + b(1-\exp(-at)), \frac{\sigma^2}{2a}(1-\exp(-2at))\right).$$

Es ist $\Phi^{-1}(0.95) = 1.6449$.

b) (7 Punkte) Nehmen Sie an, dass das Versicherungsunternehmen den Marktwert der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten zu 80% mit 20jährigen risikofreien Zerobonds kongruent bedeckt und zu 20% in risikofreie Zerobonds mit einer Restlaufzeit von 1 Jahr investiert hat. Zur Absicherung gegen das Zinsänderungsrisiko bei Wiederanlage erwägt das Versicherungsunternehmen, bei einer Investmentbank eine OTC-Receiver-Swaption mit Fälligkeitszeitpunkt 1, dem **einzigen** Zahlungszeitpunkt $t = 20$ und dem festen Zinssatz $K = F(0, 1, 20)$ über den Nominalbetrag der zum Zeitpunkt 1 auslaufenden Zerobonds zu kaufen. Dabei bezeichnet $F(0, 1, 20)$ den einfachen Terminzins zum Zeitpunkt 0 für den Zeitraum $[1, 20]$. Beurteilen Sie die Wirksamkeit dieser Strategie. Gehen Sie dabei auf Zinsänderungsrisiko, versicherungstechnisches Risiko und Gegenparteirisiko und deren Zusammenspiel ein.

c) (3 Punkte) Alternativ bietet die Investmentbank eine Receiver-Swaption an, die sich von der Receiver-Swaption unter b) lediglich dadurch unterscheidet, dass die jährlichen Zahlungszeitpunkte $t = 2, 3, 4, \ldots, 20$ vereinbart werden. Beurteilen Sie diese Alternative im Vergleich zur Strategie unter b).

**4. Risikoaggregation und copulas** (27 Punkte) Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit zwei Geschäftsbereichen und zugehörigem loss $L_1$, $L_2$. Das Risikokapital der einzelnen Geschäftsbereiche werde mit VaR gemessen, d.h. es gelte $\mathrm{SCR}_i = \mathrm{VaR}_\alpha(L_i)$. (SCR steht für solvency capital requirement). Das Unternehmen verwendet zur Aggregation des Risikokapitals der beiden Geschäftsbereiche eine Regel der Form

$$\mathrm{SCR} = \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}; \tag{1}$$

hierbei ist $\rho \in [0, 1]$ ein vom Regulator exogen vorgegebener Korrelationsparameter.

**a)** (5 Punkte) Nehmen Sie an dass $L_1$ und $L_2$ bivariat normalverteilt sind mit Mittelwert 0 und Korrelation $\rho$. Leiten Sie in diesem Fall die Aggregationsregel (1) her.

**b)** (3 Punkte) Diskutieren Sie allgemein Stärken und Schwächen einer Kapitalaggregationsregel vom Typ (1).

**c)** (4 Punkte) Zeigen Sie, dass bei Verwendung von (1) das Gesamtrisikokapital SCR monoton wachsend in $\rho$ ist, falls $\mathrm{SCR}_1$ und $\mathrm{SCR}_2$ strikt positiv sind, und dass somit unter (1) $\mathrm{SCR} \leq \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$ gilt. Ist diese Ungleichung auch für nicht multivariat normalverteilte Risiken gültig?

**d)** Nehmen Sie - in Verallgemeinerung von Aufgabe a) - an, dass die gemeinsame Verteilung von $L_1$ und $L_2$ durch eine Meta-Gauss Verteilung mit copula Parameter $\rho$ und beliebigen stetigen Randverteilungen $F_1$ und $F_2$ gegeben ist.

(i) (4 Punkte) Geben Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $F$ von $L_1$ und $L_2$ an und diskutieren Sie Stärken und Schwächen von Meta-Gauss Modellen.

ii) (5 Punkte) Nehmen Sie an, dass $L_1$ und $L_2$ Pareto verteilt sind mit Parameter $\alpha > 0$, d.h. $P(L_i \leq x) = 1 - x^{-\alpha}$, $i = 1, 2$, $x \geq 1$. Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige Realisationen einer eindimensionalen Standardnormalverteilung generiert. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der es Ihnen erlaubt, 100 unabhängige Realisationen $(L_1, L_2)$ zu generieren, die gemäß $F$ verteilt sind.

iii) (6 Punkte) Sie haben für das Modell aus ii) die folgenden 4 vergangenen Realisationen von $L_1, L_2$ beobachtet:

| Jahr | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $L_1$ | 1.8171 | 1.6610 | 1.5582 | 1.9737 |
| $L_2$ | 32.4105 | 1.2324 | 1.6099 | 4.0164 |

Entwickeln Sie einen Ansatz zur Schätzung des copula Parameters $\rho$ mittels Kendall's tau und wenden Sie Ihre Methode auf die gegebenen Daten an.

**5. Kreditrisiko und Merton Modell.** (12 Punkte)

**a)** (4 Punkte) Erklären Sie die Modellierung des Konkurses einer Firma im Merton-Modell. Gehen Sie insbesondere auf die Analogie zwischen equity und debt und Europäischen Optionen auf den Wert der assets der Firma ein.

**b)** (5 Punkte) Betrachten Sie eine Firma, deren assets einer geometrischen Brownschem Bewegung mit drift $\mu_V = 0.1$ und Volatilität $\sigma_V = 0.2$ folgen. Nehmen Sie an, dass der heutige ($t = 0$) Wert der assets gleich 200 und der Nominalwert des Fremdkapitals gleich 100 ist (alle Zahlen in Mio EURO), Fälligkeit der Verbindlichkeiten sei in $T = 1$ (Jahr). Berechnen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit der Firma. Wie wirkt sich eine Erhöhung von $\mu_V$ bzw. von $\sigma_V$ auf die Ausfallwahrscheinlichkeit aus? Geben Sie eine ökonomische Interpretation.

**c)** (3 Punkte) Diskutieren Sie Stärken und Schwächen des Merton Modells als Prototyp eines Firmenwertmodells. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Eigenschaften von credit spreads ein.

**6. Counterparty Risk.** (18 Punkte) Zwei Vertragsparteien S und B haben einen Vertrag abgeschlossen, bei dem der protection seller S dem protection buyer B gegen Prämienzahlung Schutz gegen ein adverses Ereignis gewährt. Der Marktwert dieses Vertrags zum Zeitpunkt $t$ aus Sicht von B sei mit $V_t$ bezeichnet; die Fälligkeit sei $T$. (Ein Beispiel für einen derartigen Versicherungsvertrag ist ein credit default swap). S und B seien ausfallgefährdet. In diesem Fall wird die Bewertungskorrektur häufig durch das vereinfachte bilateral credit value adjustment

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

$\mathrm{BCVA}^{\mathrm{indep}} = \mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} - \mathrm{DVA}^{\mathrm{indep}}$ mit

$$\begin{aligned}
\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} &= \delta^S \int_0^T \bar{F}_B(t) e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt, \\
\mathrm{DVA}^{\mathrm{indep}} &= \delta^B \int_0^T \bar{F}_S(t) e^{-rt} E^Q(V_t^-) f_B(t)\, dt.
\end{aligned}$$

berechnet. Hier bezeichnet $f_S$ die Dichte der Ausfallzeit $\tau_S$ von S und $\bar{F}_B$ bzw. $\bar{F}_S$ ist die Überlebensfunktion von $\tau_B$ bzw. $\tau_S$, $r \geq 0$ ist der risikofreie Zinssatz, $\delta^S$ bzw. $\delta^B$ der loss given default.

a) (3 Punkte) Erläutern Sie kurz die Formel für das $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$.

b) (6 Punkte) Werten Sie die Formel für den Fall aus, dass $V_t$ unter $Q$ normalverteilt ist mit Mittelwert 0 und Varianz $\sigma^2 t^2$. Nehmen Sie an, dass $\tau_S$ und $\tau_R$ unter $Q$ exponentialverteilt sind mit Parameter $\gamma_S$ und $\gamma_B$. *Hinweise.* Für $\alpha > 0$ ist die Stammfunktion von $xe^{-x^2/(2\alpha^2)}$ durch $-\alpha^2 e^{-x^2/(2\alpha^2)}$ gegeben; für $\gamma > 0$ is die Stammfunktion von $te^{-\gamma t}$ durch $-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t}\big(\frac{1}{\gamma} + t\big)$ gegeben.

c) (5 Punkte) Bei der Herleitung der Formel für das $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ wird angenommen, dass der Marktwert $V_t$ des Versicherungsvertrags und der Ausfallzeitpunkt $\tau_S$ unabhängig sind. Diskutieren diese Annahme; gehen Sie dabei speziell auf das beispiel eines Rückversicherungsvertrags ein.

d) (4 Punkte) Erläutern Sie (kurz) zwei Techniken zum Management von counterparty risk.

DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

# Lösungsvorschläge

## 1. Risikomaße und Steuerung.

**a)** Die Leistung des Rückversicherers hat die Verteilung

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 0.8, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 500) = 0.02.$$

Die erwartete Rückversicherungsleistung beträgt $\mathbb{E}(Y_1) = 200 \cdot 0.18 + 500 \cdot 0.02 = 46$, die Prämie $P = 1.2 \cdot 46 = 55.2$. Daraus folgt

$$RORAC = \frac{P - \mathbb{E}(Y_1)}{VaR_{0.97}(Y_1 - P)} = \frac{55.2 - 46}{200 - 55.2} = 0.0635.$$

**b)** Wird zusätzlich $X_2$ rückversichert, so wird die Gesamtleistung des Rückversicherers $Y_1 + Y_2$ durch folgende Verteilung beschrieben:

| $z$ | $\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = z)$ |
|---|---|
| 0 | $0.8^2 = 0.64$ |
| 200 | $2 \cdot 0.8 \cdot 0.18 = 0.288$ |
| 400 | $0.18^2 = 0.0324$ |
| 500 | $2 \cdot 0.8 \cdot 0.02 = 0.032$ |
| 700 | $2 \cdot 0.18 \cdot 0.02 = 0.0072$ |
| 1000 | $0.02^2 = 0.0004$ |

Mit Hilfe der Definition bestimmen wir $VaR_{0.97}(Y_1 + Y_2) = 500$. Daraus folgt der neue $RORAC = \frac{2 \cdot 9.2}{500 - 2 \cdot 55.2} = 0.0472$, der niedriger ausfällt als vorher.

Folglich wird der Rückversicherer auf die neue Geschäftsmöglichkeit verzichten. Er verzichtet damit auf zusätzlichen Ertrag und auf die Diversifikation durch ein unabhängiges neues Risiko.

Die Steuerung durch den RORAC schafft also hier einen falschen Anreiz. Grund dafür ist, dass sich das Risikomaß $VaR_{0.97}$ in dieser Situation als nicht subadditiv erweist.

## 2. Bayesianische Statistik.

**a)** Wir rechnen jeweils modulo einer Konstanten und nutzen bei der Identifikation der Ergebnisse aus, dass eine Dichte entsteht. Bezeichnen $f(\cdot|\lambda)$ die Beobachtungsdichte und $\pi(\cdot)$ die a priori Dichte, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\pi(\lambda|n) &\propto f(n|\lambda)\pi(\lambda) \\
&\propto \lambda^n \exp(-\lambda)\lambda^{\alpha-1}\exp(-\beta\lambda) \\
&= \lambda^{n+\alpha-1}\exp(-(\beta+1)\lambda) \\
&\propto \frac{(\beta+1)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n)}\lambda^{\alpha+n-1}\exp(-(\beta+1)\lambda)
\end{aligned}$$

Die a posteriori Verteilung ist also Gamma$(\alpha + n, \beta + 1)$.

**b)** Wir simulieren $m$ Zufallszahlen $l_i$, $i = 1, \ldots, m$, aus der Vorhersageverteilung von $L$. Dann ergibt sich der $VaR_{0.99}(L)$ als der $[0.01 \cdot m] + 1$-größte Simulationswert.

Für $i = 1, \ldots, m$ wiederhole:

1. Ziehe eine Zufallszahl $\lambda_i$ aus der a posteriori-Verteilung von $\Lambda$ und eine Zufallszahl $\theta_i$ aus der a-posteriori-Verteilung von $\Theta$.
2. Ziehe eine Zufallszahl $n_i$ aus Poisson$(\lambda_i)$.
3. Ziehe $n_i$ Zufallszahlen $x_{ij}$, $j = 1, \ldots, n_i$, aus $LN(\theta_i, 4)$.
4. Setze $l_i := \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$.

Die Berechnung des Value at Risk trägt dem Parameterrisiko Rechnung, indem anstelle eines Schätzwerts für $\lambda$ und $\theta$ die komplette Verteilung der Parameter einfließt. Unterliegen auch die Parameterwerte $\alpha$ und $\beta$ einem Irrtumsrisiko, so können diese in einem erweiterten hierarchischen Modell ebenfalls als Zufallsgrößen mit einer a priori-Verteilung modelliert werden, wobei die Varianz der a-priori Verteilung in Abhängigkeit vom Ausmaß des Irrtumsrisikos angesetzt werden könnte.

**c)** Eine Möglichkeit besteht darin, das Modell evolutionär anzupassen. Dabei werden die Expertenschätzungen $\delta_k$, $k = 1, \ldots, p$, in die Herleitung der neuen a posteriori Verteilung mit einbezogen:

$$\begin{aligned} &\pi_{\texttt{new posterior}}(\theta | x_1, \ldots, x_n, \delta_1, \ldots, \delta_p) \\ &\quad \propto \quad \pi_{\texttt{last posterior}}(\theta) \cdot \prod_{i=1}^{n} f_{\texttt{data}}(x_i|\theta) \cdot \prod_{k=1}^{p} f_{\texttt{expert}}(\delta_k|\theta) \end{aligned}$$

Vorteile dieses Ansatzes bestehen darin, dass die unternehmensindividuelle Erfahrung weiterhin berücksichtigt bleibt, der Ansatz von $f_{\texttt{expert}}$ die Unsicherheit der Experteninformation aufgrund der kontroversen Diskussion transparent widerspiegeln kann und die Bayesianische Modellierung automatisch die Gewichtung der beiden Informationsquellen, Daten und Experten, wählt. Nachteile können sich daraus ergeben, dass die unternehmensindividuelle Erfahrung in $\pi_{\texttt{last posterior}}$ aus der Zeit vor der Gesetzesänderung stammt und daher ein zu geringes Niveau impliziert und eine Verzerrung in den Expertenschätzungen sich nur langsam im Verlauf der Zeit durch die neuen Daten korrigieren lässt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, das Modell neu zu starten, indem die bisherige a posteriori Verteilung durch eine neu hergeleitete a priori Verteilung ersetzt wird. In diese Herleitung können dann sowohl die Experteneinschätzungen als auch die um den Strukturbruch bereinigten unternehmensindividuellen Daten der Vergangenheit einfließen. Vorteile dieses Ansatzes bestehen in einem transparenten Neustart des Modells, der nicht implizit durch zu niedrige Vergangenheitsdaten verzerrt wird, und in der Möglichkeit, die Unsicherheit der Annahmen in der neuen a priori Verteilung aktuell zu bewerten. Nachteilig ist, dass der Lernprozess des Bayesianischen Modells unterbrochen wird und somit unternehmensindividuelle Information verloren gehen kann. Auch bei dieser Möglichkeit wird sich eine nicht angemessene Wahl der a priori Verteilung erst langsam durch neue Daten korrigieren lassen.

**3. Zinsmodelle.**

a) Die Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, blendet das versicherungstechnische Risiko aus, so dass das Risikokapital als Puffer gegen einen Marktwertanstieg der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge eines Zinsrückgangs zu bestimmen ist. Der stochastische Barwert der Versicherungsleistungen zur Zeit $t$ ist dann gegeben durch

$$PV(t) = S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50} \cdot D(t, 20).$$

Der Marktwert ist unter dem risikoneutralen Maß zu berechnen. Zum Zeitpunkt 0 beträgt der Marktwert

$$\begin{aligned} MV(0) &= \mathbb{E}_Q(PV(0)) = S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50} \cdot \exp\left(-A_\lambda(0,20) - B_\lambda(0,20) \cdot r(0)\right) \\ &= 0.444688 \cdot S \cdot N, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\begin{aligned} A_\lambda(0,20) &= \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(20 - B(0,20)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(0,20)^2 = 0.691395, \\ B_\lambda(0,20) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-20a)) = 2.775704 \end{aligned}$$

verwendet haben. Das 95%-Quantil des Marktwertes der Verbindlichkeiten zur Zeit 1 ergibt sich für das 5%-Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Mit den Parametern der Normalverteilung unter dem realen Maß

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r(1)) &= r(0)\exp(-a) + b(1 - \exp(-a)) = 0.032093, \\ Var(r(1)) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a)) = 0.000642 \end{aligned}$$

erhalten wir als 5%- Quantil

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{Var(r(1))} \cdot \Phi^{-1}(0.05) = -0.0096.$$

In diesem VaR-Szenario ergibt sich der Marktwert der Verbindlichkeiten

$$\begin{aligned} MV_{0.95}(1) &= \mathbb{E}_Q(PV(1) \mid r(1) = -0.0096) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50} \cdot \exp\left(-A_\lambda(1,20) - B_\lambda(1,20) \cdot r(1)\right) \\ &= S \cdot N \cdot 0.9385 \cdot \exp\left(-0.651567 - 2.774805 \cdot (-0.0096)\right) \\ &= S \cdot N \cdot 0.9385 \cdot 0.535255 \\ &= 0.502336 \cdot S \cdot N. \end{aligned}$$

Um einen Marktwertanstieg der Verbindlichkeiten mit Wahrscheinlichkeit 0.95 puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta MV) &= MV_{0.95}(1) \cdot P(0,1) - MV(0) \\ &= (0.502336 \cdot 0.976654 - 0.444688) \cdot S \cdot N \\ &= 0.045921 \cdot S \cdot N. \end{aligned}$$

zu stellen.

b) Die Zahlung der zum Zeitpunkt 1 auslaufenden Zerobonds beträgt

$$Nom := \frac{0.2 \cdot S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50} \cdot P(0,20)}{P(0,1)} = \frac{0.2 \cdot S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50}}{1 + 19F(0,1,20)}.$$

Dies ist der Nominalbetrag der Receiver-Swaption, die das Versicherungsunternehmen kauft.

Zum Zeitpunkt 1 kann das Versicherungsunternehmen ausfallfreie Zerobonds mit Laufzeit 19 und Nominalbetrag

$$Nom_1 := \frac{Nom}{P(1,20)} = Nom \cdot (1 + 19L(1,20))$$

kaufen.

Im Zinsanstiegsszenario gilt $L(1,20) > F(0,1,20)$, so dass die Versicherungsverpflichtungen bedeckt sind: $Nom_1 > S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50}$. Die Receiver-Swaption ist wertlos.

Im Zinsrückgangsszenario ergeben die Zahlungen der Zerobonds und der Receiver-Swaption zum Zeitpunkt 20 zusammen den erwarteten Wert der Versicherungsverpflichtungen:

$$\begin{aligned} Nom_1 + Nom \cdot 19 \cdot (F(0,1,20) - L(1,20)) &= Nom \cdot (1 + 19F(0,1,20)) \\ &= 0.2 \cdot S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50} \end{aligned}$$

Die Receiver-Swaption eliminiert das Zinsänderungsrisiko insoweit, dass sie den Terminzins $F(0,1,19)$ als Mindestverzinsung in der Periode $[1,19]$ garantiert. In Abhängigkeit vom Verlauf des versicherungstechnischen Risikos kann der Nominalbetrag der Receiver-Swaption jedoch zu hoch oder zu niedrig sein, d.h. es liegt keine perfekte Absicherung gegen fallende Zinsen vor.

Ferner ist das Versicherungsunternehmen dem Ausfallrisiko der Gegenpartei der Swaption ausgesetzt, da die Swaption über die lange Laufzeit OTC abgeschlossen wird.

c) Zu jedem der 19 Zahlungszeitpunkte $t = 2, 3, \ldots, 20$ zahlt die Receiver-Swaption im Zinsrückgangsszenario $Nom \cdot (F(0,1,20) - L(t-1,t))$, stellt also bei rollierender Anlage von $Nom$ in einjährige Zerobonds eine Mindestverzinsung von $Nom$ mit $F(0,1,20)$ pro Periode sicher. Da Zinssätze im Vasicek-Modell auch negative Werte annehmen können, unterliegen jedoch die periodischen Zahlungen der Receiver-Swaption einem Wiederanlagerisiko. Folglich ist das verbleibende Risiko für das Versicherungsunternehmen höher als unter b).

**4. Risikoaggregation.**

**a)** Es gilt, dass $L$, $L_1$ und $L_2$ normalverteilt sind. Außerdem ist

$$\mathrm{sd}(L) = \left(\mathrm{sd}(L_1)^2 + 2\rho\,\mathrm{sd}(L_1)\,\mathrm{sd}(L_2) + \mathrm{sd}(L_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Außerdem gilt $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{sd}(L)$ und analog für $L_1$ und $L_2$, wobei $\Phi$ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung repräsentiert. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{SCR} &= \mathrm{VaR}_\alpha(L) = \left(\Phi^{-1}(\alpha)^2\,\mathrm{sd}(L_1)^2 + 2\Phi^{-1}(\alpha)^2\rho\,\mathrm{sd}(L_1)\,\mathrm{sd}(L_2) + \Phi^{-1}(\alpha)^2\,\mathrm{sd}(L_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

**b)** Stärken und Schwächen:

- Stärke: einfach berechenbar.
- Schwächen: nicht modellbasiert (außer für elliptische Verteilungen); baut auf dem problematischen Konzept der linearen Korrelation auf; Bestimmung des Parameters $\rho$ problematisch.

**c)** Da $\mathrm{SCR}_i > 0$ ist $\left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)$ streng monoton wachsend in $\rho$ und somit auch SCR. Die Abschätzung $\mathrm{SCR} \leq \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$ ergibt sich für $\rho = 1$. Allgemein gilt diese Ungleichung nicht (fehlende Subadditivität von VaR).

**d)** zu i) Es gilt $F(l_1, l_2) = C(F_1(l_1), F_2(l_2))$ nach Sklar.

- Stärken: einfach zu simulieren; Schätzer für $\rho$ eg. via Kendall's $\tau$
- Schwächen: fehlende tail dependence

zu ii)

a) Ziehen Sie zunächst Zufallszahlen $x_j$, $j = 1, \ldots, 200$, aus $\mathcal{N}(0,1)$. Dann sind $(\tilde{x}_{j1}, \tilde{x}_{j2}) := (x_j, x_{100+j})$, $\quad j = 1, \ldots, 100$, 100 bivariat standard normalverteilte Zufallsvektoren. Es folgt, dass

$$(y_{j1}, y_{j2}) := (\tilde{x}_{j1}, 0.3\tilde{x}_{j1} + \sqrt{1-(0.3)^2} \cdot \tilde{x}_{j2}), \quad j = 1, \ldots, 100,$$

100 bivariat normalverteilte Zufallsvektoren mit Korrelation 0.3 und standard normalverteilten Rändern sind.

b) Für die Verteilungsfunktion $F$ der Paretoverteilung mit Parameter $\alpha$ gilt $F^{-1}(y) = (1-y)^{-\frac{1}{\alpha}}$. Nach dem 2. Teil des Satzes von Sklar sind dann

$$(\ell_{j1}, \ell_{j2}) := \left(1 - \Phi(y_{j1})^{-\frac{1}{\alpha}}, 1 - \Phi(y_{j2})^{-\frac{1}{\alpha}}\right), \quad j = 1, \ldots, 100,$$

die gewünschten Realisierungen.

zu iii) Die Schätzmethode mittels Kendalls $\tau$ verwendet die Tatsache, dass für die copula einer zwei-dimensionalen normalen Mittelwert-Varianz Mischung (wie der Gauss copula) der folgende Zusammenhang zwischen copula Parameter $\rho$ und Kendalls tau $\rho_\tau$ gilt: $\rho = \sin(\pi\rho_\tau/2)$. Ein Schätzer für $\rho_\tau$ gegeben $n$ Beobachtungen $(L_{i,1}, L_{i,2})'$, $1 \leq i \leq n$, ist

$$\hat{\rho_\tau} = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{sgn}\left[(L_{i,1} - L_{j,1})(L_{i,2} - L_{j,2})\right],$$

ein Schätzer für $\rho$ ist dann $\hat{\rho} = \sin(\pi\hat{\rho}_\tau/2)$.

Im konkreten Fall erhalten wir $\binom{4}{2} = 6$ und

$$\hat{\rho_\tau} = \frac{1}{6}(1 + 1 + (-1) + (-1) + 1 + 1) = 0.3333;$$

dies führt auf $\hat{\rho} = 0.5$.

**5. Credit risk**

**a)** **a)** In Merton's Modell tritt der Ausfall der betrachteten Firma im Zeitpunkt $T$ ein, falls der Wert $V_T$ der assets kleiner als der Nennwert $B$ der Verbindlichkeiten ist. Man erhält für den Wert des Eigenkapitals bei Fälligkeit, dass $V_T = (V_T - B)^+$ (Call auf $V$ mit Ausübungspreis $B$); für das Fremdkapital ergibt sich

$$B_T = \min(V_T, B) = B - (B - V_T)^+.$$

(Wert einer risikofreien Anleihe abzüglich einer Put Option auf $V$).

**b)** Es gilt für die Ausfallwahrscheinlichkeit (Herleitung nicht gefragt)

$$P(V_T < B) = P(\ln V_T < \ln B) = \Phi\left(\frac{\ln \frac{F}{V_0} - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right).$$

Einsetzen liefert

$$P(V_T < B) = \Phi\left(\frac{\ln(1/2) - (0.1 - \frac{1}{2}0.04)}{0.2}\right) = 5,5 \cdot 10^{-5}.$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist fallend in $\mu_V$ und wachsend in $\sigma_V$: höhere mittlere Wachstumsrate der assets $\Rightarrow$ niedrigere Ausfallwahrscheinlichkeit, höhere Volatilität impliziert größere Fluktuationen von $V$ und daher höhere Ausfallwahrscheinlichkeit

**c)** Stärken: klare ökonomische Interpretation des Ausfalls, Kalibrierung an ökonomische Kenngrößen (Bilanzkennzahlen, Aktienkurs) möglich
Schwächen: unrealistisch niedrige short-term credit spreads da kurzfristiger Ausfall extrem unwahrscheinlich.

**6. Counterparty risk**

**a)** Es bezeichnet $E(V_t^+)$: erwartete Positivteil des Marktwerts in $t$ aus Sicht von B . (B erleidet nur einen Verlust, falls Marktwert des Kontrakts für ihn positiv). $\overline{F}_B(t)$: Wahrscheinlichkeit dass $\tau_B > t$. Damit gibt die Formel den erwarteten Verlust für B an, der entsteht, falls S vor Fälligkeit ausfällt und falls B nach S ausfällt.

**b)** Wir berechnen zunächst $E(V_t^+)$. Für $X \sim N(0, \alpha)$ gilt

$$E(X^+) = \frac{1}{2\pi\alpha^2}\int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\,dx = \frac{1}{2\pi\alpha^2}\Big[-\alpha^2 e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\Big]_0^\infty = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

(unter Verwendung des Hinweises, dass die Stammfunktion von $xe^{-x^2/(2\alpha^2)}$ durch $-\alpha^2 e^{-x^2/(2\alpha^2)}$ gegeben ist. Damit erhalten wir $E(V_t^+) = (\sigma t)/(2\pi)$. Einsetzen in die CVA Formel ergibt

$$\begin{aligned}\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} &= \delta_S \frac{\sigma}{2\pi}\gamma_S \int_0^T t e^{-(\gamma_S+\gamma_B+r)t}\,dt \\ &= \delta_S \frac{\sigma\gamma_S}{2\pi(\gamma_S+\gamma_B+r)}\left(\frac{1}{\gamma_S+\gamma_B+r} - e^{-(\gamma_S+\gamma_B+r)T}\Big(\frac{1}{\gamma_S+\gamma_B+r} + T\Big)\right),\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass für generisches $\gamma$ die Stammfunktion von $te^{-\gamma t}$ durch $-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma t}\big(\frac{1}{\gamma}+t\big)$ gegeben ist.

**c)** Man würde erwarten, dass in dem Fall wo S ein großer Rückversicherer ist, $E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+)$ gilt: ein Ausfall von S könnte durch ein Katastrophennereignis ausgelöst worden sein, in Folge dessen alle Prämien für Rückversicherungskontrakte steigen. Es ist sogar denkbar, dass das Katastrophenereignis, das zum Ausfall von S geführt hat, direkt in dem Rückversicherungsvertrag zwischen S und B abgesichert war, so dass B nicht die ihm zustehende Zahlung erhält.

d) Mögliche Ansätze: collateralization, netting, hedging mit CDS (jeweils kurze Erläuterung).

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

# CERA - Exam
# Quantitative Methods of ERM

21.05.2016

### Hints.

- You may use a pocket calculator.
- You can reach up to **120** points. You will have passed the exam if you reach at least **60** points.

## Problems

**1. Risk Measures and Management.** (15 points) Consider a reinsurance company that calculate its premiums as 1.2 times the expected claim payments, that uses $\mathrm{VaR}_{0.97}$ as risk measure and RORAC for management purposes.

**a)** (5 points) The reinsurer has already assumed the payment obligation $Y_1 := \max(0, X_1 - 1000)$, where the claim variable $X_1$ has the following distribution:

$$\mathbb{P}(X_1 = 500) = 0.8, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1500) = 0.02.$$

Compute the Value at Risk of $Y_1$ at the confidence level 0.97 as well as the RORAC.

**b)** (10 points) The reinsurer who is steering its business activities using RORAC, has the opportunity of writing a second risk $Y_2 := \max(0, X_2 - 1000)$, where the claim variable $X_2$ is independent of $X_1$ and has the same distribution as $X_1$. Does the reinsurer take this opportunity, i.e. prefer the distribution of $Y_1 + Y_2$ to the distribution of $Y_1$ under the RORAC criterion? Analyze the decision of the reinsurer arguing both from the perspectives of risk and expected return. Explain which property of the quantities involved leads to the decision of the reinsurer.

**2. Bayesian Statistics.** (24 points) A company models the losses of a business line due to operational risk as

$$L = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

where $N$ denotes the number of loss events in a period and $X_i$ the claim size of the $i$-th event. The following assumptions are made:

- The random variables $N$ and $X_i$, $i \in \mathbb{N}$, are supposed to be independent.
- Let the number $N$ be Poisson($\lambda$)-distributed given the value $\lambda$ of the unknown parameter $\Lambda$ and assume that the **prior**-distribution of $\Lambda$ is a Gamma($\alpha, \beta$)-distribution with parameters $\alpha, \beta > 0$.
- Let the claim size $X$, given the value $\theta$ of the unknown parameter $\Theta$, be $LN(\theta, 4)$-distributed and the **posterior**-distribution of $\Theta$, given the observations of the current year $x_1, x_2, \ldots, x_n$, be $\mathcal{N}(1, 1)$-distributed.

*Hint.* The probability density of the Gamma-distribution with parameters $\alpha, \beta > 0$ is given by

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x) 1_{(0,\infty)}(x).$$

**a)** (6 points) Derive the posterior distribution of $\Lambda$ given the observed claim number $n$ of the current year.

**b)** (8 points) Develop an algorithm in order to determine the Value at Risk of the predictive distribution of $L$ at the confidence level 0.99 by simulation. How does the result take into account the parameter risk of the model? How could additional uncertainty be reflected in the prior distribution, when the constants $\alpha$ and $\beta$ are taken directly from interviews of experts who are subject to risk of error?

**c)** (10 points) A law amendment gives rise to expect an increase in claim size. In controversial discussions, experts give strongly diverging estimates on the impact of the law amendment on the claim size. Develop a proposal how to adapt the Bayesian model to the changes entailed by the amendment in a consistent manner. In particular, comment on how to take into account the expert opinions and discuss pros and cons of your proposal.

**3. Term Structure Models.** (24 points)

Consider a portfolio of $N$ insured persons aged 50 that hold a paid-up pure endowment policy paying the sum $S$ at the age of 70. Suppose that the probability of reaching the age of 70 is ${}_{20}p_{50} = 93.85\%$ and the short rate $r(t)$ follows the Vasicek model with parameters $a = 0.36$, $b = 0.06$ and $\sigma = 0.03$ under the real world measure:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \qquad (*)$$

with initial value $r(0) = 0.02$. If $\lambda$ denotes the market price of risk, then, under the risk-neutral measure $Q$, $r(t)$ follows the Vasicek model

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^Q$$

with $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

**a)** Assume that the actual number of deaths is equal to the expected number and determine the amount of risk capital at time 0 that is needed in order to buffer the potential increase in insurance liabilities at time 1 due to interest rate risk with a probability 95%. Suppose that $\lambda = 0.2$.

*Hint.* Under the dynamics $(*)$, the expected value of the stochastic discount factor $D(t,T)$ is given by $\mathbb{E}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp[-A(t,T) - B(t,T)r(t)]$ with

$$\begin{aligned} A(t,T) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(T - t - B(t,T)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(t,T)^2 \\ B(t,T) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-a(T-t))), \end{aligned}$$

and it holds that

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(r(0)\exp(-at) + b(1 - \exp(-at)), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2at))\right).$$

Further note $\Phi^{-1}(0.95) = 1.6449$.

**b)** (7 points) Suppose that 80 percent of the market value of the insurance liabilities are congruently covered by risk free zero bonds maturing in 20 years and 20 percent are invested in risk free zero bonds maturing in 1 year. In order to protect against changes in interest rate occuring at the reinvestment date, the insurance company considers buying an OTC-receiver swaption, whose nominal amount equals the nominal amount of the zero-coupon bonds maturing at $t = 1$, from an investment bank. The swaption has maturity 1. Its **only** payment date is $t = 20$ and the fixed interest rate is $K = F(0, 1, 20)$, the simply-compounded forward rate for the time interval $[1, 20]$. Analyze the efficiency of this protection strategy evaluating interest rate risk, insurance risk, counterparty risk and discussing their interplay.

**c)** (3 points) Alternatively, the investment bank offers a receiver swaption, that differs from the receiver swaption under b) only in fixing the yearly payment dates $t = 2, 3, 4, \dots, 20$. Analyze this alternative comparing with the strategy under b).

**4. Risk aggregation and copulas** (27 points) Consider an insurance company with two business lines and associated loss loss $L_1$, $L_2$. The company uses VaR to determine the risk capital for the individual business lines so that $\mathrm{SCR}_i = \mathrm{VaR}_\alpha(L_i)$, $i = 1, 2$. (SCR stands for solvency capital requirement). In order to determine the firm-wide SCR the company uses a capital aggregation rule of the form

$$\mathrm{SCR} = \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}; \tag{1}$$

here $\rho \in [0, 1]$ is a correlation parameter that is exogenously given by the regulator.

**a)** (5 points) Assume that $L_1$ and $L_2$ are bivariate normally distributed with mean 0 and correlation $\rho$. Derive the aggregation rule (1) for that case.

**b)** (3 points) Discuss strenghts and weaknesses of a capital aggregation rule of the form (1).

**c)** (4 points) Demonstrate that the aggregation rule (1) implies that the firm wide risk capital is increasing in in $\rho$, provided that $\mathrm{SCR}_1$ and $\mathrm{SCR}_2$ are strictly positive and conclude that $\mathrm{SCR} \le \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$. Is this inequality valid for risks that are not bivariate normally distributed if we put $\mathrm{SCR} = \mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2)$?

**d)** Assume that the joint distribution of $L_1$ and $L_2$ is given by a meta-Gauss distribution with copula parameter $\rho$ and (arbitrary) continuous marginal distributions $F_1$ and $F_2$; this is a generalization of the setup considered in a).

(i) (4 points) Derive the joint distribution $F$ of $L_1$ and $L_2$. Discuss strengths and weaknesses of meta-Gauss models.

ii) (5 points) Assume that $L_1$ and $L_2$ follow a Pareto distribution with parameter $\alpha > 0$, that is $P(L_i \le x) = 1 - x^{-\alpha}$, $i = 1, 2$, $x \ge 1$. You have a random number generator generating independent realisations of a one-dimensional standard normal distribution. Develop an algorithm for sampling 100 independent realisations $(L_1, L_2) \sim F$.

iii) (6 points) You have observed the following 4 past realisations of $(L_1, L_2)$

| year | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $L_1$ | 1.8171 | 1.6610 | 1.5582 | 1.9737 |
| $L_2$ | 32.4105 | 1.2324 | 1.6099 | 4.0164 |

Assume that $(L_1, L_2)$ follow the distribution $F$ from (ii). Develop a method for estimating the copula parameters $\rho$ via Kendall's $\tau$ and apply your method to the given data.

**5. Credit risk and Merton model.** (12 points)

**a)** (4 points) Explain the modelling of the default of a firm in the Merton model and discuss the relation between equity and debt and European options on the asset value of the firm.

**b)** (5 points) Consider a firm whose asset value follows a geometric Brownian motion with drift $\mu_V = 0.1$ and volatility $\sigma_V = 0.2$. Assume that the current ($t = 0$) value of the assets is equal to 200, that the nominal value of the liabilities is equal to 100 (all in Mio EURO) and the maturity of the liabilities is in $T = 1$ (year). Compute the default probability of the firm. How does an increase of $\mu_V$ resp. of $\sigma_V$ affect the default probability? Give an economic interpretation.

**c)** (3 points) Discuss strengths and weaknesses of the Merton model as a typical structural model. Consider in particular the properties of credit spreads.

**6. Counterparty risk.** (18 points) Consider two parties S and B that entered into a contract where the protection seller S provides protection for B against an adverse event; the protection buyer B pays premia in return. The market value of this contract at time $t$ from the viewpoint of B is denoted $V_t$; the maturity of the contract is $T$. (A typical example would be a credit default swap). S and B might default before $T$. In practice the value adjustment for an early default of S or B is frequently computed via the simplified bilateral credit value adjustment $\mathrm{BCVA}^{\mathrm{indep}} = \mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} - \mathrm{DVA}^{\mathrm{indep}}$ with

$$\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} = \delta^S \int_0^T \bar{F}_B(t) e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt,$$
$$\mathrm{DVA}^{\mathrm{indep}} = \delta^B \int_0^T \bar{F}_S(t) e^{-rt} E^Q(V_t^-) f_B(t)\, dt.$$

Here $f_S$ denotes the density of the default time $\tau_S$ of S; $\bar{F}_B$ respectively $\bar{F}_S$ give the survival function of $\tau_B$ respectively of $\tau_S$; $r \geq 0$ is the risk-free interest rate; $\delta^S$ and $\delta^B$ give the loss given default of S and B.

a) (3 points) Explain briefly the formula for $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$.

b) (6 points) Evaluate the formula for the case where $V_t$ is normally distributed under $Q$ with mean 0 and variance $\sigma^2 t^2$. Assume that under $Q$, $\tau_S$ and $\tau_R$ are exponentially distributed with parameter $\gamma_S$ and $\gamma_B$.

*Hints.* The primitive of $xe^{-x^2/(2\alpha^2)}$ is for $\alpha > 0$ given by $-\alpha^2 e^{-x^2/(2\alpha^2)}$; the primitive of $te^{-\gamma t}$ is for $\gamma > 0$ given by $-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t}\big(\frac{1}{\gamma} + t\big)$.

c) (5 points) In the derivation of the formula for $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ it is assumed that the market value $V_t$ of the insurance contract and the default time $\tau_S$ are independent. Discuss this assumption. Consider in particular the case of a reinsurance treaty.

d) (4 Punkte) Explain briefly two techniques for the management of counterparty risk.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

# Solutions

## 1. Risk Measures and Management.

**a)** The claim payment of the reinsurer has the distribution

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 0.8, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 500) = 0.02.$$

The expected claim payment equals $\mathbb{E}(Y_1) = 200 \cdot 0.18 + 500 \cdot 0.02 = 46$, the premium $P = 1.2 \cdot 46 = 55.2$. It follows that

$$RORAC = \frac{P - \mathbb{E}(Y_1)}{VaR_{0.97}(Y_1 - P)} = \frac{55.2 - 46}{200 - 55.2} = 0.0635.$$

**b)** If, in addition, the reinsurer enters the contract on the risk $X_2$, its total claim payment $Y_1 + Y_2$ has the distribution:

| $z$ | $\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = z)$ |
|---|---|
| 0 | $0.8^2 = 0.64$ |
| 200 | $2 \cdot 0.8 \cdot 0.18 = 0.288$ |
| 400 | $0.18^2 = 0.0324$ |
| 500 | $2 \cdot 0.8 \cdot 0.02 = 0.032$ |
| 700 | $2 \cdot 0.18 \cdot 0.02 = 0.0072$ |
| 1000 | $0.02^2 = 0.0004$ |

Using the definition, we determine $VaR_{0.97}(Y_1 + Y_2) = 500$. This entails the new $RORAC = \frac{2 \cdot 9.2}{500 - 2 \cdot 55.2} = 0.0472$, that turns out to be lower than before.

Consequently, the reinsurer abstains from the new business opportunity thus renouncing the additional profit and the diversification effect arising from the new independent risk.

Using RORAC for management creates a wrong incentive in this situation. The reason for that is that the risk measure $VaR_{0.97}$ fails to be subadditive.

## 2. Bayesian Statistics.

**a)** When calculating the posterior density we may introduce and delete constants as convenient. If $f(\cdot|\lambda)$ denotes the sample density and $\pi(\cdot)$ the prior density, we get

$$\begin{aligned}
\pi(\lambda|n) &\propto f(n|\lambda)\pi(\lambda) \\
&\propto \lambda^n \exp(-\lambda)\lambda^{\alpha-1}\exp(-\beta\lambda) \\
&= \lambda^{n+\alpha-1}\exp(-(\beta+1)\lambda) \\
&\propto \frac{(\beta+1)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n)}\lambda^{\alpha+n-1}\exp(-(\beta+1)\lambda)
\end{aligned}$$

Thus, the posterior distribution is Gamma$(\alpha + n, \beta + 1)$.

**b)** We simulate $m$ random numbers $l_i$, $i = 1, \ldots, m$, from the predictive distribution of $L$. Then, $VaR_{0.99}(L)$ is obtained as the $[0.01 \cdot m] + 1$-highest simulated value.

For $i = 1, \ldots, m$ repeat:

1. Draw a random number $\lambda_i$ from the posterior distribution of $\Lambda$ and a random number $\theta_i$ from the posterior distribution of $\Theta$.
2. Draw a random number $n_i$ from Poisson$(\lambda_i)$.
3. Draw $n_i$ random numbers $x_{ij}$, $j = 1, \ldots, n_i$, from $LN(\theta_i, 4)$.
4. Set $l_i := \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$.

The above calculation of the value at risk takes account of parameter risk by using the whole distribution of the parameters instead of mere estimators for $\lambda$ and $\theta$. If the parameters $\alpha$ and $\beta$ turn out to be uncertain, they may be modelled as random variables following a prior distribution in an extended hierarchical model. The variance of their prior distribution then may be chosen so as to appropriately reflect the extent of the risk of error.

**c)** A possibility consists in adapting the model in an evolutionary manner. Then, the expert opinions $\delta_k$, $k = 1, \ldots, p$, are incorporated in the derivation of the new posterior distribution:

$$\begin{aligned} &\pi_{\texttt{new posterior}}(\theta|x_1, \ldots, x_n, \delta_1, \ldots, \delta_p) \\ \propto\quad &\pi_{\texttt{last posterior}}(\theta) \cdot \prod_{i=1}^{n} f_{\texttt{data}}(x_i|\theta) \cdot \prod_{k=1}^{p} f_{\texttt{expert}}(\delta_k|\theta) \end{aligned}$$

Advantages of this approach include that the individual loss experience of the company is still taken into account, the choice of $f_{\texttt{expert}}$ can reflect the uncertainty of expert information that becomes manifest in the controversial discussions in a transparent manner and the Bayesian model automatically determines the weights of the two sources of informations, data and expert opinions. Drawbacks may result from the fact that the individual loss experience underlying $\pi_{\texttt{last posterior}}$ dates back to the period before the amendment and consequently implies a level of losses that is too low. Furthermore, a bias of the expert opinions will be corrected only slowly in the course of time with the help of new data.

Another possibility would be to restart the model by replacing the previous posterior distribution with a newly derived prior distribution taking into account expert opinion and past individual data of the company that have to be adjusted for the sructural change. Advantages of this approach include the transparent restart of the model avoiding an implicit bias from too low past data and the possibility to assess the uncertainty underlying the assumptions on the new prior distribution from an up-to-date perspective. A disadvantage is the interruption of the process of continous learning of the Bayesion model and the risk of losing individual information on the company. Once again, a bias of the expert opinions will be corrected only slowly in the course of time with the help of new data.

**3. Term Structure Models.**

**a)** Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number means that we do not take into account insurance risk. As a consequence, we have to determine the required risk capital needed to buffer an increase in market value of insurance liabilities due to decreasing interest rates. The stochastic present value of the insurance liabilities at time $t$ is given by

$$PV(t) = S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50} \cdot D(t, 20).$$

The market value is determined under the risk neutral measure. At time 0, we have

$$\begin{aligned} MV(0) &= \mathbb{E}_Q(PV(0)) = S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50} \cdot \exp\left(-A_\lambda(0, 20) - B_\lambda(0, 20) \cdot r(0)\right) \\ &= 0.444688 \cdot S \cdot N, \end{aligned}$$

where

$$A_\lambda(0,20) = \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(20 - B(0,20)) + \frac{\sigma^2}{4a}B(0,20)^2 = 0.691395,$$
$$B_\lambda(0,20) = \frac{1}{a}(1-\exp(-20a)) = 2.775704.$$

The 95%-quantile of the market value of the insurance liabilities at time 1 derives from the 5%-quantile of the normally distributed short rate $r(1)$. With the parameters of the normal distribution under the real-world measure

$$\mathbb{E}(r(1)) = r(0)\exp(-a) + b(1-\exp(-a)) = 0.032093,$$
$$Var(r(1)) = \frac{\sigma^2}{2a}(1-\exp(-2a)) = 0.000642$$

we obtain the 5%- quantile

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{Var(r(1))}\cdot\Phi^{-1}(0.05) = -0.0096.$$

In this VaR-scenario, the market value of insurance liabilities is given by

$$\begin{aligned} MV_{0.95}(1) &= \mathbb{E}_Q(PV(1) \mid r(1) = -0.0096) \\ &= S\cdot N\cdot {}_{20}p_{50}\cdot \exp\left(-A_\lambda(1,20) - B_\lambda(1,20)\cdot r(1)\right) \\ &= S\cdot N\cdot 0.9385\cdot \exp\left(-0.651567 - 2.774805\cdot(-0.0096)\right) \\ &= S\cdot N\cdot 0.9385\cdot 0.535255 \\ &= 0.502336\cdot S\cdot N. \end{aligned}$$

In order to compensate an increase in market value of the insurance liabilities with probability 0.95, at time 0, we need the risk capital

$$\begin{aligned} VaR_{0.95}(\Delta MV) &= MV_{0.95}(1)\cdot P(0,1) - MV(0) \\ &= (0.502336\cdot 0.976654 - 0.444688)\cdot S\cdot N \\ &= 0.045921\cdot S\cdot N. \end{aligned}$$

**b)** The zero bonds with maturity 1 will pay out

$$Nom := \frac{0.2\cdot S\cdot N\cdot {}_{20}p_{50}\cdot P(0,20)}{P(0,1)} = \frac{0.2\cdot S\cdot N\cdot {}_{20}p_{50}}{1+19F(0,1,20)}.$$

This is the nominal amount of the receiver-swaption that the insurance company buys.

At time 1, the insurance company can buy risk free zero bonds with term 19 and nominal amount

$$Nom_1 := \frac{Nom}{P(1,20)} = Nom\cdot(1+19L(1,20)).$$

In the scenario of an increase in interest rates, it holds that $L(1,20) > F(0,1,20)$, such that the insurance liabilities are covered: $Nom_1 > S\cdot N\cdot {}_{20}p_{50}$. The receiver-swaption is out of the money.

In the scenario of a decrease in interest rates, the payments of the zero bonds and the receiver-swaption at time 20 add up to the expected value of the insurance liabilities:

$$\begin{aligned} Nom_1 + Nom\cdot 19\cdot(F(0,1,20) - L(1,20)) &= Nom\cdot(1+19F(0,1,20)) \\ &= 0.2\cdot S\cdot N\cdot {}_{20}p_{50} \end{aligned}$$

The receiver-swaption eliminates interest rate risk inasmuch as it guarantees the forward rate $F(0,1,19)$ as minimal rate of return in the period $[1,19]$. Depending on the realization of insurance risk, the nominal value of the receiver-swaption may turn out to be too high oder too low, i.e. there is no perfect hedge against a decrease in interest rates.

Furthermore, the insurance company is exposed to the risk that the counterparty of the swaption defaults as the swaption is bought OTC and has a long term.

**c)** At each of the 19 points in time $t = 2, 3, \ldots, 20$, the receiver-swaption pays $Nom \cdot (F(0,1,20) - L(t-1,t))$ in the scenario of decreasing interest rates, thus ensuring the minimal guaranteed rate of return $F(0,1,20)$ on $Nom$ per period of 1 year when $Nom$ is invested in zero bonds with term 1 in a rolling manner. As interest rates may become negative in the Vasicek model, the periodic payments of the receiver-swaption give rise to reinvestment risk. Consequently, the remaining risk for the insurance company is higher than under b).

**4. Risk aggregation.**

**a)** Note that $L$, $L_1$ and $L_2$ are normally distributed and that

$$\mathrm{sd}(L) = \left(\mathrm{sd}(L_1)^2 + 2\rho\,\mathrm{sd}(L_1)\,\mathrm{sd}(L_2) + \mathrm{sd}(L_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Moreover, one has $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{sd}(L)$ and similarly for $L_1$ and $L_2$. Here $\Phi$ represents the df of $N(0,1)$. This gives

$$\begin{aligned} \mathrm{SCR} &= \mathrm{VaR}_\alpha(L) = \left(\Phi^{-1}(\alpha)^2\,\mathrm{sd}(L_1)^2 + 2\Phi^{-1}(\alpha)^2\rho\,\mathrm{sd}(L_1)\,\mathrm{sd}(L_2) + \Phi^{-1}(\alpha)^2\,\mathrm{sd}(L_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho\cdot\mathrm{SCR}_1\cdot\mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

**b)** Pros and cons:

- Pros: easy to compute.
- Cons: not model-based (except in the special case of elliptical distributions), ie. rules-based and not principles-based; relies heavily on linear correlations which might lead to consistency issues; the parameter $\rho$ is difficult to determine.

**c)** The quantity $\left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho\cdot\mathrm{SCR}_1\cdot\mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)$ is strictly increasing in $\rho$ (as $\mathrm{SCR}_i > 0$), and hence SCR is strictly increasing as well. The estimate $\mathrm{SCR} \leq \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$ follows for $\rho = 1$. This inequality is wrong in general as VaR is not subadditive.

**d)** zu i) According to Sklar's theorem one has $F(l_1, l_2) = C(F_1(l_1), F_2(l_2))$.

- Pros: Easy to sample from; simple moment estimator for $\rho$ via Kendall's $\tau$
- Cons: no tail dependence

ad ii)

a) Draw random numbers $x_j$, $j = 1, \ldots, 200$ from $\mathcal{N}(0,1)$. Then $(\tilde{x}_{j1}, \tilde{x}_{j2}) := (x_j, x_{100+j})$, $\quad j = 1, \ldots, 100$, are 100 realisations of bivariate standard normally distributed random vectors. It follows that

$$(y_{j1}, y_{j2}) := (\tilde{x}_{j1}, 0.3\tilde{x}_{j1} + \sqrt{1-(0.3)^2}\cdot\tilde{x}_{j2}), \quad j = 1, \ldots, 100,$$

are 100 realisations of bivariate normal vectors with correlation 0.3 and standard normal margins.

b) For the df $F$ of the Pareto distribution with parameter $\alpha$ it holds that $F^{-1}(y) = (1-y)^{-\frac{1}{\alpha}}$. The second part of Sklar's theorem implies that

$$(\ell_{j1}, \ell_{j2}) := \left(1 - \Phi(y_{j1})^{-\frac{1}{\alpha}}, 1 - \Phi(y_{j2})^{-\frac{1}{\alpha}}\right), \quad j = 1, \dots, 100,$$

are the desired realisations.

ad iii) Estimation via Kendall's $\tau$ uses the fact that for the copula of a two-dimensional normal mean-variance mixture (such as the Gauss copula) it holds that $\rho = \sin(\pi\rho_\tau/2)$ where $\rho_\tau$ is Kendall's $\tau$ and $\rho$ the correlation parameter of the copula. An estimator for $\rho_\tau$ given $n$ observations $(L_{i,1}, L_{i,2})'$, $1 \le i \le n$ is

$$\hat{\rho_\tau} = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \le i < j \le n} \operatorname{sgn}\left[(L_{i,1} - L_{j,1})(L_{i,2} - L_{j,2})\right],$$

an estimator for $\rho$ is then given by $\hat{\rho} = \sin(\pi\hat{\rho}_\tau/2)$.

In the specific case from the example one has $\binom{4}{2} = 6$ and

$$\hat{\rho_\tau} = \frac{1}{6}(1 + 1 + (-1) + (-1) + 1 + 1) = 0.3333;$$

this leads to $\hat{\rho} = 0.5$.

**5. Credit risk**

**a)** **a)** In Merton's model default happens in $T$ if $V_T < B$. The value of equity at the maturity date $T$ is therefore equal to $S_T = (V_T - B)^+$ (call on $V$ with strike price $B$); for the liabilities it follows that

$$B_T = \min(V_T, B) = B - (B - V_T)^+;$$

this is the value of a risk-free bond minus a put on $V$).

**b)** The default probability satisfies (derivation not necessary)

$$P(V_T < B) = P(\ln V_T < \ln B) = \Phi\left(\frac{\ln \frac{F}{V_0} - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right).$$

Substitution of parameters gives

$$P(V_T < B) = \Phi\left(\frac{\ln(1/2) - (0.1 - \frac{1}{2}0.04)}{0.2}\right) = 5,5 \cdot 10^{-5}.$$

For these parameters the default probability is decreasing in $\mu_V$ and increasing in $\sigma_V$: higher expected growth rate of the assets $\Rightarrow$ lower default probability, higher volatility implies more fluctuations in $V$ and hence higher default probability.

**c)** strengths: clear economic interpretation of default event, calibration to economic quantities such as balance sheet data possible
weaknesses: unrealistically low short term credit spreads.

**6. Counterparty risk**

**a)** Denote by $E(V_t^+)$ the expected positive part of the market value in $t$. (B suffers a loss only if the market value of the contract is positive for him.) $\overline{F}_B(t)$: probability that $\tau_B > t$. Hence formula gives expected loss for B if S defaults before maturity and if B defaults after S.

**b)** As a start we compute $E(V_t^+)$. For $X \sim N(0, \alpha)$ it holds that

$$E(X^+) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} dx = \frac{1}{2\pi\alpha^2} \Big[ -\alpha^2 e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \Big]_0^\infty = \frac{\alpha}{2\pi}\,.$$

(using the hint that the primitive of $xe^{-x^2/(2\alpha^2)}$ equals $-\alpha^2 e^{-x^2/(2\alpha^2)}$.) This gives $E(V_t^+) = (\sigma t)/(2\pi)$. Substituting in the CVA formula we obtain

$$\begin{aligned}
\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} &= \delta_S \frac{\sigma}{2\pi} \gamma_S \int_0^T t e^{-(\gamma_S+\gamma_B+r)t} dt \\
&= \delta_S \frac{\sigma\gamma_S}{2\pi(\gamma_S+\gamma_B+r)} \left( \frac{1}{\gamma_S+\gamma_B+r} - e^{-(\gamma_S+\gamma_B+r)T} \Big( \frac{1}{\gamma_S+\gamma_B+r} + T \Big) \right),
\end{aligned}$$

(using that for generic $\gamma$ the primitive of $te^{-\gamma t}$ equals $-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t}\big(\frac{1}{\gamma} + t\big)$.)

**c)** In case that S is a big reinsurance company one would expect that $E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+)$: a default of S could be caused by a catastrophic event that leads to an increase of the premia for reinsurance contracts. Moreover, the event that caused the default of S might be covered by the reinsurance contract between S and B so that B does not receive the claim payment he is entitled to.

d) possible techniques: collateralization, netting, hedging with CDS contracts (including a brief explanation).