DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

# CERA - Klausur
# Quantitative Methoden des ERM

23.05.2015

**Hinweise:**

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **120**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **60** Punkte erreicht werden.

## Aufgaben

**1. Risikomaße.** (30 Punkte)

**a)** (6 Punkte) Bestimmen Sie Value at Risk und Expected Shortfall einer Pareto$(a, b)$-verteilten Schadengröße $X$ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$, wobei $a > 0$ und $b > 1$ gilt.
*Hinweis.* Die Pareto-Verteilung mit den Parametern $a$ und $b$, $a > 0$, $b > 0$ hat die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{a+x}\right)^b, \quad x \geq 0.$$

**b)** (5 Punkte) Berechnen Sie für die Verteilung aus a) das asymptotische Verhältnis von ES zu VaR,

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)},$$

und setzen Sie das Ergebnis in Beziehung zu allgemeinen Aussagen aus der Extremwerttheorie.

**c)** Ein Versicherungsunternehmen hat bisher seine jährlichen Verluste $X$ aus operationalen Risiken mit Hilfe der Paretoverteilung mit den Parametern $a = 10$ und $b = 2.5$ modelliert. Analysen des Risikomanagements haben ergeben, dass diese Verteilung in normalen Jahren angemessen ist, aber die Verluste in selten auftretenden Krisenjahren nicht hinreichend erfasst. Ein Workshop mit den Risk Ownern führt zu der Einschätzung, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Krisenjahr $\mathbb{P}(K) = 0.05$ beträgt und in einem Krisenjahr mit Wahrscheinlichkeit 0.9 mit einem Verlust von 8.5 und mit Wahrscheinlichkeit 0.1 mit einem Verlust von 100 zu rechnen ist. Der Risikomanager verfolgt zwei Ansätze, das Ergebnis des Workshops in die Verteilung von $X$ mit einzubinden.

**A)** $F_1(x) = 0.95 \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}\right) + 0.05 \cdot \left(0.9 \cdot 1_{[8.5,\infty)}(x) + 0.1 \cdot 1_{[100,\infty)}(x)\right).$

**B)** $F_2(x) = 0.95 \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}\right) + 0.05 \cdot \left(1 - \left(\frac{a_2}{a_2+x}\right)^{b_2}\right)$, wobei die Parameter $a_2$ und $b_2$ so gewählt werden, dass die Paretoverteilung mit diesen Parametern

- Erwartungswert $\frac{a_2}{b_2-1} = 17.65$ und
- Varianz $\frac{a_2^2 \cdot b_2}{(b_2-1)^2(b_2-2)} = 753.50$ hat.

Dies ist für $a_2 = 42.53$ und $b_2 = 3.41$ der Fall.

**i)** (4 Punkte) Erläutern Sie die Motivation der beiden Ansätze A) und B).

**ii)** (6 Punkte) Berechnen Sie für Ansatz A) Value at Risk und Tail Value at Risk von $X$ zum Niveau $\alpha = 0.994$.

**iii)** (3 Punkte) Geben Sie für Ansatz B) ein Integral zur Berechnung des Tail Value at Risk zum Niveau $\alpha = 0.994$ an, ohne im Integranden den Value at Risk zu verwenden. Benutzen Sie dabei ohne Nachweis den Value at Risk zum Niveau 0.994, $\mathrm{VaR}_{0.994}(X) = 75.41$.
*Hinweis.* Die Aufgabenstellung verlangt **nicht** die Berechnung des Integrals. Das korrekte Integral führt auf $\mathrm{TVaR}_{0.994}(X) = 130.27$.

**iv)** (6 Punkte) Vergleichen und beurteilen Sie die beiden Ansätze A) und B). Entwerfen Sie einen Vorschlag, wie eine zweite Runde des Workshops mit den Risk Ownern, die keine Mathematiker sind, gestaltet werden könnte, damit die Ergebnisse besser in die Modellierung eingebunden werden können.
*Hinweise.* Der Tail Value at Risk zum Niveau 99.4% beträgt für ein Normaljahr (Paretoverteilung mit den Parametern $a = 10$ und $b = 2.5$) nach Teilaufgabe a) 118.99. Je kleiner der Parameter $b$ ist, desto langsamer fällt die Dichtefunktion der Paretoverteilung ab, d.h. desto „gefährlicher" ist das abgebildete Risiko.

**2. Bayesianische Statistik.** (23 Punkte) Ein europäisches Versicherungsunternehmen führt eine Police zur Versicherung eines neuartigen Risikos ein. Da keine Beobachtungsdaten vorliegen, zieht das Unternehmen für die Kalkulation ein Bayesianisches Modell heran und macht dabei die folgenden Annahmen:

- Die Schadenhöhe $X$, gegeben den Wert $\theta$ des unbekannten Parameters $\Theta$, sei $LN(\theta, 4)$-verteilt.
- Auf Basis einer naturwissenschaftlichen Studie über das neuartige Risiko wird a priori $\Theta \sim \mathcal{N}(2, 1)$ angenommen.

*Hinweis.* Die Lognormalverteilung $LN(\theta, \sigma^2)$ hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0,$$

und den Erwartungswert $\exp(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)$.

**a)** (4 Punkte) Berechnen Sie den a priori Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$.

**b)** Im ersten Geschäftsjahr nach Produkteinführung werden drei Schadendaten beobachtet: $x_1 = 45$, $x_2 = 70$, $x_3 = 35$. Das Unternehmen holt zudem drei unabhängige Expertenmeinungen $\delta_i$, $i = 1, 2, 3$, über den Parameter $\Theta$ ein: $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 6$, $\delta_3 = 4$. Es nimmt an, dass die $\delta_i$, gegeben $\Theta = \theta$, $\mathcal{N}(\theta, 1)$-verteilt sind.

**i)** (9 Punkte) Bestimmen Sie die a posteriori Verteilung von $\Theta$, gegeben $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$.

**ii)** (2 Punkte) Geben Sie ein Integral zur Bestimmung der Vorhersageverteilung von $X$, gegeben $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, an.
*Hinweis.* Die Aufgabenstellung verlangt **nicht** die Berechnung des Integrals.

**c)** (8 Punkte) Vor dem Hintergrund, dass 3 Beobachtungsdaten wenig Information über das Risiko liefern, ist das Unternehmen beunruhigt, dass das Meinungsbild der Experten höhere Schäden erwarten lässt als das naturwissenschaftliche Modell. Eine genauere Analyse der Begründungen ergibt, dass alle drei US-amerikanischen Experten in ihren Einschätzungen von $\theta$ eine Erhöhung um 1.5 vorgenommen haben, um erhöhten Schadenersatzzahlungen für Gesundheitsschäden infolge sich abzeichnender Änderungen der Rechtssprechung Rechnung zu tragen. Welche Modelländerungen reflektieren jeweils diese Zusatzinformation unter den beiden folgenden Annahmen:

**A)** Im europäischen Markt sind keine Änderungen der Rechtssprechung und damit keine Änderung der Entschädigungszahlungen für Gesundheitsschäden zu erwarten.

**B)** Auch im europäischen Markt sind Änderungen der Rechtssprechung mit entsprechenden Auswirkungen auf Entschädigungszahlungen für Gesundheitsschäden zu erwarten.

Ordnen Sie die a posteriori Erwartungswerte der Schadenhöhe, die sich in Teilaufgabe b), in c) unter Annahme A) und in c) unter Annahme B) ergeben, der Größe nach an, **ohne** diese numerisch zu berechnen. Begründen Sie Ihre Anordnung.

**3. Zinsmodelle.** (16 Punkte) Betrachten Sie ein Kollektiv von $N$ Personen des Alters 50, die eine beitragsfreie reine Erlebensfallversicherung der Höhe $S$ mit Fälligkeit im Alter 70 besitzen. Die Wahrscheinlichkeit, das Alter 70 zu erreichen, beträgt ${}_{20}p_{50} = 93.85\%$. Die Short Rate $r(t)$ werde unter dem realen Maß im Vasicek-Modell mit den Parametern $a = 0.36$, $b = 0.06$ und $\sigma = 0.03$ und beschrieben:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad (*)$$

Es ist $r(0) = 0.02$. Bezeichnet $\lambda$ den Marktpreis des Risikos, so folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß $Q$ dem Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^Q$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$. Unter der Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, ermitteln Sie zum Zeitpunkt 0 das benötigte Risikokapital, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge des Zinsrisikos auszugleichen. Unterstellen Sie $\lambda = 0.2$.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

*Hinweis.* Unter der Dynamik (∗) ist der Erwartungswert des stochastischen Diskontierungsfaktors $D(t,T)$ gegeben durch $\mathbb{E}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp[-A(t,T) - B(t,T)r(t)]$ mit

$$\begin{aligned} A(t,T) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(T - t - B(t,T)) + \frac{\sigma^2}{4a}B(t,T)^2 \\ B(t,T) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-a(T-t))), \end{aligned}$$

und es gilt

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(r(0) + \exp(-at), b(1 - \exp(-at))\right).$$

**4. Anwendungen von copulas auf Schadendaten.** (12 Punkte) Ein Versicherungsunternehmen verfüge über Schadendaten der Form $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, wobei $X_i$ die Höhe des Schadens und $Y_i$ die sogenannten *allocated loss adjustment expenses* (ALAE) beschreibt. (Die ALAE umfassen beispielsweise Anwalts- und Gutachterkosten im Zusammenhang mit der Schadenabwicklung).

**a)** (1 Punkt) Begründen Sie qualitativ, warum man Abhängigkeiten zwischen Schadenhöhe $X$ und ALAE $Y$ erwarten sollte.

**b)** (5 Punkte) Zur Modellierung der gemeinsamen Verteilung von $X$ und $Y$ wird eine Gumbel copula mit Parameter $\theta$ verwendet; es gilt

$$C_\theta^{\text{Gu}}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad 1 \le \theta < \infty.$$

Zur Modellierung der Verteilung von $X$ und $Y$ werde eine Pareto Verteilung mit Parametern $a_X, b_X$ bzw. $a_Y, b_Y$ verwendet, für die $a_X, a_Y > 0$, $b_X, b_Y > 1$ gilt, d.h.

$$P(X > x) = \left(\frac{a_X}{a_X + x}\right)^{b_X}, \quad x \ge 0,$$

und analog für $Y$.

Geben Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ an. Was passiert für $\theta = 1$ bzw. $\theta \to \infty$ ? Welche qualitative Eigenschaft der Daten wird durch die Gumbel copula modelliert?

**c)** (3 Punkte) Entwickeln Sie eine Methode zur Schätzung von $\theta$.

**d)** (3 Punkte) Betrachten Sie einen stilisierten loss layer (ein Rückversicherungsprodukt) mit retention level $R$ und Auszahlung

$$g(X,Y) = \begin{cases} 0 & \text{für} X \le R. \\ X - R + \frac{(X-R)}{X}Y, & \text{für } X > R. \end{cases}$$

Diskutieren Sie qualitativ das Verhalten des erwarteten Schadens $E(g(X,Y))$ für wachsendes $\theta$ bei gegebenem hohen Wert von $R$.

**5. Risikoaggregation und Korrelationsschranken.** (18 Punkte) Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit zwei Geschäftsbereichen und zugehörigem loss $L_1$, $L_2$ so dass $L_1$ und $L_2$ lognormalverteilt sind, $L_1 \sim \mathrm{LN}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $L_2 \sim \mathrm{LN}(\mu_2, \sigma_2^2)$. (Details zur Lognormalverteilung unten). Das Risikokapital der einzelnen Geschäftsbereiche werde mit VaR gemessen, d.h. es gelte $\mathrm{SCR}_i = \mathrm{VaR}_\alpha(L_i)$. (SCR steht für solvency capital requirement). Das Unternehmen verwendet zur Aggregation des Risikokapitals der beiden Geschäftsbereiche eine Regel der Form

$$\mathrm{SCR} = \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}; \tag{1}$$

hierbei ist $\rho \in [0, 1]$ ein vom Regulator exogen vorgegebener Korrelationsparameter.

**a)** (3 Punkte) Existiert immer ein mathematisches Modell mit den vorgegebenen Randverteilungen und der vorgegebenen linearen Korrelation $\rho$? Ist ein derartiges Modell durch diese Parameter eindeutig festgelegt? Was passiert, wenn statt linearer Korrelation Rangkorrelationen verwendet werden?

**b)** (3 Punkte) Diskutieren Sie allgemein Stärken und Schwächen einer Kapitalaggregationsregel vom Typ (1).

**c)** (10 Punkte) Berechnen Sie für den Fall $L_1 \sim \mathrm{LN}(0, 1)$, $L_2 \sim \mathrm{LN}(0, 4)$ die maximal erreichbare lineare Korrelation.

**d)** (2 Punkte) Kommentieren Sie die Aussage "Eine Korrelation zweier Risiken nahe bei Null bedeutet hohes Diversifikationspotential". Betrachten Sie dabei nur den Fall positiv korrelierter Risiken.

*Hinweis.* $L$ folgt einer Lognormalverteilung mit Parametern $\mu$ und $\sigma^2$ ($L \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$), falls $L = \exp(Z)$ für $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. In diesem Fall gilt für Erwartungswert und Varianz

$$E(L) = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right) \quad \text{und } \mathrm{var}(L) = \exp(2\mu + \sigma^2)\left(\exp(\sigma^2) - 1\right).$$

**6. Copulas und Kreditrisiko.** (9 Punkte)
Es seien $\tau_1, \tau_2$ die Ausfallzeitpunkte zweier Firmen. Nehmen Sie an, dass die $\tau_i$ exponentialverteilt sind mit Parametern $\lambda_i$, $i = 1, 2$, ($P(\tau_i \leq t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$.). Mit Hilfe des Satzes von Sklar kann man eine bivariate Verteilung $F$ konstruieren, so dass $\tau_i \sim Exp(\lambda_i)$ und so dass die Abhängigkeitsstruktur des Zufallsvektors $(\tau_1, \tau_2)$ durch $C_\rho^{\mathrm{Ga}}$, die Gauss copula mit Korrelationsparameter $\rho = 0.3$, gegeben ist.

**a)** (5 Punkte) Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige Realisationen einer eindimensionalen Standardnormalverteilung generiert. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der es Ihnen erlaubt, 100 unabhängige Realisationen $(\tau_1, \tau_2)$ zu generieren, die gemäß $F$ verteilt sind.

**b)** (4 Punkte) Nehmen Sie $\lambda_1 = \lambda_2$ (homogenes Portfolio) an. Wie wirkt sich die Erhöhung des Parameters $\rho$ qualitativ auf die folgenden Wahrscheinlichkeiten aus:

- $P(\{\tau_1 \leq T\} \cap \{\tau_2 \leq T\})$ (beide Firmen fallen vor dem festen Zeitpunkt $T$ aus)
- $P(\{\tau_1 \leq T\} \cup \{\tau_2 \leq T\})$ (mindestens eine Firma fällt vor $T$ aus)

Was bedeutet diese Analyse qualitativ für die Bewertung einer senior tranche eines CDO Kontrakts (ein Finanzprodukt, bei dem der Investor Verluste erleidet, sobald die Ausfälle in einem Kreditportfolio über einer bestimmten hohen Schranke liegen).

**7. Kreditrisiko.** (12 Punkte)

**a)** (3 Punkte) Diskutieren Sie kurz die Relevanz von Kreditrisiken aus der Sicht eines Versicherungsunternehmens.

**b)** (3 Punkte) Betrachten Sie einen Investor am Anleihenmarkt, der erwartet, dass die Bonität von Emittent A in Zukunft sinken wird. Entwickeln Sie eine Strategie, um mit Hilfe von credit default swaps von dieser Markteinschätzung zu profitieren. Welche Risiken treten auf?

**c)** (6 Punkte) Betrachten Sie ein einfaches Kreditrisikomodell in reduzierter Form mit konstanter Zinsrate $r > 0$, konstanter hazard-rate $\gamma > 0$ (unter dem zur Bewertung verwendeten risikoneutralen Maß $Q$) und konstantem LGD $\delta$. Geben Sie in Abhängigkeit von $r$, $\gamma$ und $\delta$ den Preis $V^{\text{def}}$ in $t = 0$ des default-payment legs eines CDS mit einer Restlaufzeit $T = 5$ Jahre an. Erläutern Sie dazu die Herleitung der Formel

$$V^{\text{def}} = \delta \int_0^T \gamma e^{-(r+\gamma)t} dt \,.$$

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

# Lösungen

## 1. Risikomaße.

**a)** Auflösen der Gleichung $1-\left(\frac{a}{a+x}\right)^b=\alpha$ nach $x$ führt auf den Value at Risk

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X)=a(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}-a.$$

Mit der Definition berechnen wir den Expected Shortfall

$$\begin{aligned}\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_z(X)\,dz\\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(a(1-z)^{-\frac{1}{b}}-a\right)\,dz\\ &= -\frac{a}{1-\alpha}\left[\frac{b}{b-1}(1-z)^{1-\frac{1}{b}}\right]_\alpha^1-a\\ &= \frac{ab}{b-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}-a.\end{aligned}$$

**b)** Da $(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}$ für $\alpha\to1$ gegen unendlich konvergiert, gilt

$$\lim_{\alpha\to1}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}=\lim_{\alpha\to1}\frac{\frac{ab}{b-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}}{a(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}}=\frac{b}{b-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{b}}\,.$$

Da die Überlebensfunktion der Pareto Verteilung polynomial mit Parameter $\xi=1/b$ abfällt, ist dies ein Spezialfall der in der EVT hergeleiteten Asymptotik für das Verhältnis $\mathrm{ES}_\alpha(X)/\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$.

**c) i)** Beide Ansätze stellen eine Mischung der Verteilungsfunktionen für ein normales Jahr und für ein Krisenjahr dar:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\le x) &= (1-\mathbb{P}(K))\cdot\mathbb{P}(X\le x\mid\bar{K})+\mathbb{P}(K)\cdot\mathbb{P}(X\le x\mid K)\\ &= 0.95\cdot\left(1-\left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}\right)+0.05\cdot\mathbb{P}(X\le x\mid K),\end{aligned}$$

wobei ein normales Jahr durch die Pareto-Verteilung mit den Parametern 10 und 2.5 beschrieben wird. Ansatz A) übersetzt die Aussage des Workshops über das Krisenjahr direkt in eine Bernoulliverteilung, die den beiden Szenariowerten 8.5 bzw. 100 die Wahrscheinlichkeiten 0.9 bzw. 0.1 zuordnet, während Ansatz B) diese diskrete Verteilung in eine Paretoverteilung mit demselben Erwartungswert und derselben Varianz überführt. Da die Paretoverteilung eine heavy-tailed Verteilung ist und die reale Schadenentwicklung kontinuierliche Werte annimmt, liegt es nahe, wie bereits für die Normaljahre auch für die Krisenjahre eine Paretoverteilung zu wählen. Da die Paretofamilie zwei Parameter hat, werden die ersten beiden Momente herangezogen.

**ii)** Wegen $F_1(100-) = 0.9926 < 0.994 < 0.9976 = F_1(100)$ gilt $\mathrm{VaR}_{0.994}(X) = 100$ nach Definition.

Für $x > 100$ hat die Verteilungsfunktion die Gestalt $F_1(x) = 1 - 0.95 \cdot \left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}$. Mit der Definition des Tail Value at Risk als bedingter Erwartungswert berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_{0.994}(X) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X > 100)} \int_{100}^{\infty} x \cdot F_1'(x)\, dx \\
&= \frac{1}{1 - 0.9976} \cdot 0.95 \cdot 10^{2.5} \cdot 2.5 \cdot \int_{100}^{\infty} x(10+x)^{-3.5}\, dx \\
&= 317264.677 \cdot \left( \int_{100}^{\infty} (10+x)^{-2.5}\, dx - 10 \int_{100}^{\infty} (10+x)^{-3.5}\, dx \right) \\
&= 317264.677 \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot (10+x)^{-1.5} \Big|_{100}^{\infty} + 4 \cdot (10+x)^{-2.5} \Big|_{100}^{\infty} \right) \\
&= 317264.677 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 110^{-1.5} - 4 \cdot 110^{-2.5} \right) \\
&= 173.33
\end{aligned}$$

**iii)** Unter Verwendung der Verteilungsfunktion $F_2(x) = 1 - 0.95 \left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5} - 0.05 \left(\frac{42.53}{42.53+x}\right)^{3.41}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_{0.994}(X) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X > 75.41)} \int_{75.41}^{\infty} x \cdot F_2'(x)\, dx \\
&= \frac{1}{1 - 0.994} \cdot 0.95 \cdot 10^{2.5} \cdot 2.5 \cdot \int_{75.41}^{\infty} x(10+x)^{-3.5}\, dx \\
&\quad + \frac{1}{1 - 0.994} \cdot 0.05 \cdot 42.53^{3.41} \cdot 3.41 \cdot \int_{75.41}^{\infty} x(42.53+x)^{-4.41}\, dx.
\end{aligned}$$

*Anmerkung.* Außerhalb der Aufgabenstellung berechnen wir nun die Integrale.

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_{0.994}(X) &= 125173.49 \cdot \left( \int_{75.41}^{\infty} (10+x)^{-2.5}\,dx - 10 \int_{75.41}^{\infty} (10+x)^{-3.5}\,dx \right) \\
&\quad + 10172422.46 \cdot \left( \int_{75.41}^{\infty} (42.53+x)^{-3.41}\,dx \right. \\
&\qquad \left. - 42.53 \int_{75.41}^{\infty} (42.53+x)^{-4.41}\,dx \right) \\
&= 125173.49 \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot (10+x)^{-1.5} \Big|_{75.41}^{\infty} + 4 \cdot (10+x)^{-2.5} \Big|_{75.41}^{\infty} \right) \\
&\quad + 10172422.46 \cdot \left( -\frac{1}{2.41} \cdot (42.53+x)^{-2.41} \Big|_{75.41}^{\infty} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{42.53}{3.41} \cdot (42.53+x)^{-3.41} \Big|_{75.41}^{\infty} \right) \\
&= 125173.49 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 85.41^{-1.5} - 4 \cdot 85.41^{-2.5} \right) \\
&\quad + 10172422.46 \cdot \left( \frac{1}{2.41} \cdot 117.94^{-2.41} - \frac{42.53}{3.41} \cdot 117.94^{-3.41} \right) \\
&= 98.29 + 31.98 \\
&= 130.27
\end{aligned}$$

**iv)** Ansatz A) übersetzt die beiden im Workshop genannten Werte und deren Wahrscheinlichkeiten direkt in eine diskrete Bernoulli-Verteilung. Ansatz B) geht davon aus, dass auch in einem Krisenjahr die Schäden kontinuierliche Werte annehmen, wählt deshalb wie in Normaljahren die Paretoverteilung und passt deren Parameter durch Gleichsetzen der ersten beiden Momente mit denen der Bernoulli-Verteilung an. Beide Ansätze liefern zwar einen höheren Risikokapitalbedarf als die Paretoverteilung eines Normaljahres. Es fällt jedoch auf, dass Ansatz B), der zunächst wegen der Verteilungsklasse besser geeignet erscheint, zu einem deutlich niedrigeren Risikokapitalbedarf führt als Ansatz A). Darüber hinaus ist der entscheidende Parameter $b_2$ größer als der Parameter $b$ in Normaljahren, was der Logik widerspricht, dass Krisenjahr „gefährlicher“ als Normaljahre sind. Die Risk Owner sollten daher in einer zweiten Runde Fragen beantworten, die sich für die Anpassung einer stetigen Verteilung besser eignen, etwa die Frage nach dem Median oder höheren Quantilen. Konsequenzen der darauf hin kalibrierten Pareto-Verteilung sollten mit den Risk Ownern diskutiert werden und gegebenfalls zu weiteren Adjustierungen der Verteilung führen.

**2. Bayesianische Statistik.**

**a)** Der a priori Erwartungswert von $X$ ergibt sich durch Mittelung über die a priori Dichte.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\Theta)\right) \\ &= \int \exp(\theta+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\theta-2)^2\right)d\theta \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\theta-3)^2\right)\cdot\exp(4.5)\,d\theta \\ &= \exp(4.5) = 90.02\end{aligned}$$

**b) i)** Bis auf eine Konstante ist die a posteriori Dichte von $\Theta$, gegeben die Beobachtungen $x_1$, $x_2$, $x_3$ und die Expertenmeinungen $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, gegeben durch

$$\begin{aligned}&\pi(\theta|x_1,x_2,x_2,\delta_1,\delta_2,\delta_3) \\ &\propto\ f_\Theta(\theta)\cdot\prod_{i=1}^3 f_X(x_i|\theta)\cdot\prod_{i=1}^3 f_\delta(\delta_i|\theta) \\ &\propto\ \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta-2)^2\right)\cdot\prod_{i=1}^3\exp\left(-\frac{(\ln(x_i)-\theta)^2}{2\cdot 4}\right)\cdot\prod_{i=1}^3\exp\left(-\frac{1}{2}(\delta_i-\theta)^2\right) \\ &\propto\ \exp\left(-\theta^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{2}\right)+\theta\left(2+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^3\ln(x_i)+\sum_{i=1}^3\delta_i\right)\right) \\ &\propto\ \exp\left(-\frac{1}{2\cdot\frac{4}{19}}(\theta-3.5584)^2\right).\end{aligned}$$

Dies ist bis auf eine Konstante die Dichte von $\mathcal{N}(3.5584, 0.2105)$.

**ii)** Die Vorhersageverteilung von $X$ ergibt sich durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a posteriori Dichte des Parameters.

$$\begin{aligned}&f_X(x|x_1,x_2,x_3,\delta_1,\delta_2,\delta_3) \\ &= \int f_X(x|\theta)\cdot\pi(\theta|x_1,x_2,x_3,\delta_1,\delta_2,\delta_3)\,d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\cdot x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-\theta)^2}{2\cdot 4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 0.2105}}\exp\left(-\frac{(\theta-3.5584)^2}{2\cdot 0.2105}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 4.2105}\cdot x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-3.5584)^2}{2\cdot 4.2105}\right) \\ &\quad\cdot\int_{\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{4.2105}}{\sqrt{2\pi\cdot 4\cdot 0.2105}}\exp\left(-\frac{4.2105}{2\cdot 4\cdot 0.2105}\left(\theta-\frac{0.2105\cdot\ln(x)+4\cdot 3.5584}{4.2105}\right)^2\right)d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 4.2105}\cdot x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-3.5584)^2}{2\cdot 4.2105}\right).\end{aligned}$$

*Anmerkung.* Die Vorhersageverteilung ist also $LN(3.5584, 4.2105)$ und hat den Erwartungswert 288.21. Die Aufgabenstellung verlangte lediglich die Integraldarstellung nach dem zweiten Gleichheitszeichen.

**c)** Unter Annahme A) sind die Experteneinschätzungen $\delta_i$, $i = 1, 2, 3$, jeweils um 1.5 zu reduzieren, da die zugrundegelegten Mehrbelastungen auf den europäischen Markt nicht zutreffen. Mit den reduzierten $\delta_i$ wird dann die a posteriori Verteilung mit der gleichen Rechnung wie unter b) bestimmt. Da der Lageparameter der a posteriori Verteilung ein gewichtetes Mittel der Mittelwerte der a priori Verteilung, der logarithmierten Beobachtungsdaten und der Experteneinschätzungen ist, wird der a posteriori Erwartungswert der Schadenhöhe geringer ausfallen als in Teilaufgabe b). Unter Annahme B) war die Anfangskalkulation auf Basis der a priori Verteilung des Parameters unzureichend. Da der Einfluss der a priori Verteilung in einem Bayesianischen Modell nur allmählich mit neuen Beobachtungen abnimmt, ist unter Annahme B) die a priori Verteilung zu readjustieren, indem zumindest der Lageparameter der Normalverteilung um 1.5 erhöht werden sollte. Dadurch wird der a posteriori Erwartungswert der Schadenhöhe höher ausfallen als in Teilaufgabe b).

**3. Zinsmodelle.** Die Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, blendet das versicherungstechnische Risiko aus, so dass das Risikokapital als Puffer gegen einen Marktwertanstieg der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge eines Zinsrückgangs zu bestimmen ist. Der stochastische Barwert der Versicherungsleistungen zur Zeit $t$ ist dann gegeben durch

$$PV(t) = S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50} \cdot D(t, 20).$$

Der Marktwert ist unter dem risikoneutralen Maß zu berechnen. Zum Zeitpunkt 0 beträgt der Marktwert

$$\begin{aligned} MV(0) &= \mathbb{E}_Q(PV(0)) = S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50} \cdot \exp\left(-A_\lambda(0,20) - B_\lambda(0,20) \cdot r(0)\right) \\ &= 0.444688 \cdot S \cdot N, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\begin{aligned} A_\lambda(0,20) &= \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(20 - B(0,20)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(0,20)^2 = 0.691395, \\ B_\lambda(0,20) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-20a)) = 2.775704 \end{aligned}$$

verwendet haben. Das 95%-Quantil des Marktwertes der Verbindlichkeiten zur Zeit 1 ergibt sich für das 5%-Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Mit den Parametern der Normalverteilung unter dem realen Maß

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r(1)) &= r(0)\exp(-a) + b(1 - \exp(-a)) = 0.032093, \\ Var(r(1)) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a)) = 0.000642 \end{aligned}$$

erhalten wir als 5%- Quantil

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{Var(r(1))} \cdot \Phi^{-1}(0.05) = -0.0096.$$

In diesem VaR-Szenario ergibt sich der Marktwert der Verbindlichkeiten

$$\begin{aligned} MV_{0.95}(1) &= \mathbb{E}_Q(PV(1) \mid r(1) = -0.0096) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{20}p_{50} \cdot \exp\left(-A_\lambda(1,20) - B_\lambda(1,20) \cdot r(1)\right) \\ &= S \cdot N \cdot 0.9385 \cdot \exp\left(-0.651567 - 2.774805 \cdot (-0.0096)\right) \\ &= S \cdot N \cdot 0.9385 \cdot 0.535255 \\ &= 0.502336 \cdot S \cdot N. \end{aligned}$$

Um einen Marktwertanstieg der Verbindlichkeiten mit Wahrscheinlichkeit 0.95 puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta MV) &= MV_{0.95}(1) \cdot P(0,1) - MV(0) \\ &= (0.502336 \cdot 0.976654 - 0.444688) \cdot S \cdot N \\ &= 0.045921 \cdot S \cdot N. \end{aligned}$$

zu stellen.

**4. Copulas und Schadendaten.**

a) Gründe für Abhängigkeit: Gebühren sind oft proportional zum Streitwert; bei größeren Schadensummen wird man mehr Aufwand bei der Schadenhöhenermittlung treiben etc.

b) Nach Sklar gilt

$$\begin{aligned} F(x,y) &= C_\theta^{\mathrm{Gu}}(F_X(x), F_y(x)) \\ &= \exp\left(-\left(\left(-\log(1-\left(\frac{a_X}{a_X+x}\right)^{b_X})\right)^\theta + \left(-\log(1-\left(\frac{a_Y}{a_Y+y}\right)^{b_Y})\right)^\theta\right)^{1/\theta}\right). \end{aligned}$$

Für $\theta = 1$ erhalten wir Unabhängigkeit, für $\theta \to \infty$ Komonotonie. Die Gumbel copula modelliert upper tail dependence (für $\theta > 1$).

c) $\theta$ kann durch MLE geschätzt werden.

- Schritt 1: Schätzen der Parameter der Randverteilungen.
- Schritt 2: Bilden der Pseudodaten $(U_{i,1}, U_{i,2}) = (F_X(X_i), F_Y(Y_i))$, $1 \le i \le n$.
- Schritt 3: Bilden der log likelihood $L(\theta, \mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_n) = \sum_{i=1}^n \log c(U_{i,1}, U_{i,2}; \theta)$ wobei $c(u_1, u_2; \theta) = \frac{\partial^2 C_\theta^{\mathrm{Gu}}}{\partial u_1 \partial u_2}$.
- Schritt 4: Maximieren von $L$ über $\theta$.

d) Steigendes $\theta$ führt zu höheren erwarteten Auszahlungen für den Rückversicherungskontrakt, denn bei großem $\theta$ gehen Schadenhöhen, die den retention level überschreiten, meist mit besonders hohen ALAE einher (und nur die ALAEs zu derartigen Schäden sind relevant für die Auszahlung). Dieser Effekt spielt vor allem bei großem $R$ eine Rolle.

**5. Risikoaggregation und Korrelationsschranken.**

a) Ein derartiges Modell existiert nicht immer: da die beiden Verteilungen nicht vom gleichen Typ sind, ist die Menge der erreichbaren Korrelationen eine abgeschlossene echte Teilmenge von $[-1, 1]$. Falls überhaupt ein derartiges Modell existiert, so gibt es unterschiedliche copulas, die auf dieselbe lineare Korrelation bei den vorgegebenen Randverteilungen führen. Verwendet man Rangkorrelationen, so ist die Existenz gesichert; Eindeutigkeit gilt natürlich wiederum nicht.

b)
- Stärke: einfach berechenbar.
- Schwächen: nicht modellbasiert (außer für elliptische Verteilungen); baut auf dem problematischen Konzept der linearen Korrelation auf; Bestimmung des Parameters $\rho$ problematisch.

c) Nach dem Satz von Höffding wird die maximale Korrelation $\rho_{\max}$ erreicht, wenn die beiden Risiken komonoton sind. Wir setzen also $L_1 = \exp(Z)$, $L_2 = \exp(2Z)$ für dieselbe Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Wir berechnen zunächst die Kovarianz von $L_1, L_2$. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(L_1, L_2) &= E(L_1 L_2) - E(L_1)E(L_2) = E(\exp(3Z)) - \exp(1/2)\exp(2) \\ &= \exp(9/2) - \exp(5/2) \end{aligned}$$

Die Varianz von $L_1$ und $L_2$ lässt sich mit den angegebenen Formeln leicht berechnen. Insgesamt erhält man für die Korrelation $\rho_{\max}$

$$\rho_{\max} = \frac{e^2 - 1}{\sqrt{(e-1)(e^4-1)}} = 0.666.$$

d) Aussage so nicht korrekt; je nach Wahl der Randverteilung können auch komonotone (perfekt abhängige) Risiken niedrige lineare Korrelation aufweisen. Die Aussage ist allerdings korrekt für elliptische Verteilungen.

**6. Copulas und Kreditrisiko.**

a) Ziehen Sie zunächst Zufallszahlen $r_j$, $j = 1, \ldots, 200$, aus $\mathcal{N}(0, 1)$. Dann sind

$$(\tilde{y}_{j1}, \tilde{y}_{j2}) := (r_j, r_{100+j}), \quad j = 1, \ldots, 100,$$

100 bivariat standard normalverteilte Zufallsvektoren. Es folgt, dass

$$(y_{j1}, y_{j2}) := (\tilde{y}_{j1}, 0.3 \cdot \tilde{y}_{j1} + \sqrt{1 - (0.3)^2} \cdot \tilde{y}_{j2}), \quad j = 1, \ldots, 100,$$

100 bivariat normalverteilte Zufallsvektoren mit Korrelation 0.3 und standard normalverteilten Rändern sind. Es bezeichne $\Phi$ die VF der standard Normalverteilung; dann sind

$$(t_{j1}, t_{j2}) := \left(-\frac{1}{\lambda_1}\ln(1 - \Phi(y_{j1})), -\frac{1}{\lambda_2}\ln(1 - \Phi(y_{j2}))\right), \quad j = 1, \ldots, 100,$$

gemäß dem Satz von Sklar die gewünschten Realisierungen. Hierbei haben wir verwendet, dass die Quantilfunktion von $Exp(\lambda)$ durch $F_{X_i}^{-1}(t) = -1/\lambda_i \ln(1 - t)$ gegeben ist.

b) Die erste Wahrscheinlichkeit ist wachsend in $\rho$, die zweite Wahrscheinlichkeit fällt in $\rho$. Der Wert einer senior CDO tranche ist ebenfalls fallend in $\rho$, da der Kontrakt nur Verluste erleidet, falls sehr viele Firmen gleichzeitig ausfallen.

**7. Kreditrisiko.**

a) Kreditrisiko ist aus verschiedenen Gründen relevant für VUs:

   – Kreditrisiken auf der Aktivseite der Bilanz, da VUs stark in ausfallbehafteten Anleihen investiert sind.
   – Gegenparteirisiko sowohl auf der Anlageseite als auch gegenüber Rückversicherern.
   – Viele VUs zeichnen aktiv Kreditausfallversicherungen.

   (andere Punkte ebenfalls möglich)

b) Eine mögliche Investitionsstrategie ist, eine protection buyer Position in einem CDS auf A einzugehen und diese dann nach Verschlechterung der Bonität und Ansteigen des credit spreads von A durch Eingehen einer protection seller Position zu neutralisieren. Der Gewinn ist die positive Differenz der spreads.

   Risiken: Gegenparteirisiko der CDS Position; erwartete Bonitätsverschlechterung tritt wider Erwarten nicht ein.

c) Herleitung der Formel gemäß Skript; die Rechnung ist wie folgt:

$$V^{\mathrm{def}} = \delta \int_0^5 \gamma e^{-(r+\gamma)t} dt = \delta \left[ \frac{-\gamma}{r+\gamma} e^{-(r+\gamma)t} \right]_0^5 = \frac{\delta\gamma}{r+\gamma} \left(1 - e^{-(r+\gamma)5}\right)$$

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

# CERA - Exam
# Quantitative Methods of ERM

23.05.2015

**Hints.**

- You may use a pocket calculator.
- You can reach up to **120** points. You will have passed the exam if you reach at least **60** points.

## Problems

**1. Risk Measures** (30)

**a)** (6 points) Let $X$ be a loss variable following a Pareto$(a,b)$-distribution with parameters $a>0$ and $b>1$. Determine the risk measures value at risk $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ and expected shortfall $\mathrm{ES}_\alpha(X)$ at the confidence level $\alpha \in (0,1)$.
*Hint.* The cumulative distribution function of the Pareto distribution with parameters $a$ and $b$, $a>0$, $b>0$ is given by

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{a+x}\right)^b, \quad x \geq 0.$$

**b)** (5 points) For the distribution from part a), compute the asymptotic ratio of ES and VaR,

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)},$$

and explain the result making reference to general statements of extreme value theory.

**c)** An insurance company has been modelling its yearly losses $X$ due to operational risks by means of the Pareto distribution with parameters $a=10$ and $b=2.5$ so far. Investigations of the risk management function have provided evidence that this distribution fits in well with normal years but does not capture adequately the losses occuring in rare distressed years. A workshop with the risk owners leads to the conclusion that the probability of a year becoming distressed is $\mathbb{P}(K)=0.05$ and that a distressed year will result in a loss of 8.5 with probability 0.9 and a loss of 100 with probability 0.1. The risk manager conceives two approaches to incorporate the results of the workshop into the distribution of $X$.

**A)** $F_1(x) = 0.95 \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}\right) + 0.05 \cdot \left(0.9 \cdot 1_{[8.5,\infty)}(x) + 0.1 \cdot 1_{[100,\infty)}(x)\right).$

**B)** $F_2(x) = 0.95 \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}\right) + 0.05 \cdot \left(1 - \left(\frac{a_2}{a_2+x}\right)^{b_2}\right)$, where the parameters $a_2$ and $b_2$ are chosen such that the Pareto distribution with these parameters has

- expected value $\frac{a_2}{b_2-1} = 17.65$ and
- variance $\frac{a_2^2 \cdot b_2}{(b_2-1)^2(b_2-2)} = 753.50.$

This is the case for $a_2 = 42.53$ and $b_2 = 3.41$.

**i)** (4 points) Explain the motivation of the two approaches A) and B).

**ii)** (6 points) For approach A), compute the value at risk $\mathrm{VaR}_{0.994}$ and the tail value at risk $\mathrm{TVaR}_{0.994}$ of $X$ at the confidence level $\alpha = 0.994$.

**iii)** (3 points) For approach B), state an integral giving the tail value at risk $\mathrm{TVaR}_{0.994}(X)$ at the confidence level $\alpha = 0.994$ without using the value at risk in the integrand. You are allowed to use the value at risk at the confidence level 0.994, $\mathrm{VaR}_{0.994}(X) = 75.41$ without proof.
*Hint.* You are **not** expected to compute the integral. The correct integral leads to $\mathrm{TVaR}_{0.994}(X) = 130.27$.

**iv)** (6 points) Compare and assess the two approaches A) and B). Develop a proposal how to design a second round of the workshop with the risk owners, who are not mathematicians, in order to obtain results which are more helpful for modelling the loss distribution.
*Hints.* For a normal year, the tail value at risk at the confidence level 99.4% (Pareto distribution with parameters $a = 10$ and $b = 2.5$) equals 118.99 according to part a). The smaller the parameter $b$ is, the more slowly the density of the Pareto distribution decreases, i.e. the more „dangerous“ the underlying risk is.

**2. Bayesian Statistics.** (23)

A european insurance company introduces a policy protecting against an emerging risk. Since there is no claims experience available, the company opts for a Bayesian model to price the policy. It makes the following assumptions.

- The claim size $X$, given the value $\theta$ of the unknown parameter $\Theta$, is supposed to be $LN(\theta, 4)$-distributed.
- Based on a scientific study on the emerging risk, the prior distribution of the parameter $\Theta$ is supposed to be $\mathcal{N}(2, 1)$.

*Hint.* The lognormal distribution $LN(\theta, \sigma^2)$ has the density

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0,$$

and the expected value $\exp(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)$.

**a)** (4 points) Compute the prior expected value $\mathbb{E}(X)$.

**b)** In the first business year after introduction of the policy, three claims are observed: $x_1 = 45$, $x_2 = 70$, $x_3 = 35$. Further, the company asks three independent experts to assess the parameter $\Theta$. The three expert opinions are: $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 6$, $\delta_3 = 4$. The company assumes that conditionally, given $\Theta = \theta$, the expert opinions $\delta_i$, $i = 1, 2, 3$, are $\mathcal{N}(\theta, 1)$-distributed.

**i)** (9 points) Determine the posterior distribution of $\Theta$, given $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$.

**ii)** (2 points) State an integral that determines the predictive distribution of $X$, given $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$.
*Hint.* You are **not** expected to compute the integral.

**c)** (8 points) Considering that 3 observations provide little information on the emerging risk, the insurance company is concerned about the fact, that the three expert opinions together give rise to expect higher claims than the scientific study. Analyzing more closely the arguments of the three experts from the USA reveals that all three experts have increased their estimate of $\theta$ by 1.5 in order to take into account higher payments to indemnify damages to health due to looming changes in dispensation of justice. Discuss how to incorporate this additional information into the Bayesian model under the following alternative assumptions.

**A)** In the european market, there is no risk of changes in the dispensation of justice and consequently, no risk of increasing payments to indemnify damages to health.

**B)** In the european market, there are experts expecting changes in the dispensation of justice that might entail higher payments to indemnify damages to health.

Arrange the posterior expected values of the claim size, that arise in part b), in part c) under assumption A) and in part c) under assumption B), in ascending order **without** calculating them numerically. Give reasons for your ordering.

**3. Term Structure Models.** (16)

Consider a portfolio of $N$ insured persons aged 50 that hold a paid-up pure endowment policy paying the sum $S$ at the age of 70. Suppose that the probability of reaching the age of 70 is ${}_{20}p_{50} = 93.85\%$ and the short rate $r(t)$ follows the Vasicek model with parameters $a = 0.36$, $b = 0.06$ and $\sigma = 0.03$ under the real world measure:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \qquad (*)$$

with initial value $r(0) = 0.02$. If $\lambda$ denotes the market price of risk, then, under the risk-neutral measure $Q$, $r(t)$ follows the Vasicek model

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^Q$$

with $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$. Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number, determine the amount of risk capital at time 0 that is needed in order to buffer the potential increase in insurance liabilities at time 1 due to interest rate risk with probability 0.95. Suppose that $\lambda = 0.2$.

*Hint.* Under the dynamics $(*)$, the expected value of the stochastic discount factor $D(t,T)$ is given by $\mathbb{E}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp[-A(t,T) - B(t,T)r(t)]$ with

$$\begin{aligned} A(t,T) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(T - t - B(t,T)) + \frac{\sigma^2}{4a}B(t,T)^2 \\ B(t,T) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-a(T-t))), \end{aligned}$$

and it holds that

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(r(0) + \exp(-at), b(1 - \exp(-at))\right).$$

**4. Application of copulas to claim data.** (12 points) An insurance company has claim data of the form $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. Here $X_i$ models the size of claim $i$ and $Y_i$ models the associated *allocated loss adjustment expenses* (ALAE). (The ALAE comprise among others lawyer fees and claim investigation costs).

**a)** (1 point) Explain qualitatively, why one would expect claim size $X$ and ALAE $Y$ to be dependent.

**b)** (5 points) The company uses a Gumbel copula with parameter $\theta$ to model the joint distribution of $X$ and $Y$; recall that

$$C_\theta^{\mathrm{Gu}}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad 1 \le \theta < \infty.$$

The marginal distribution of $X$ and $Y$ is modelled by a Pareto distribution with parameters $a_X, b_X$ resp. $a_Y, b_Y$ with $a_X, a_Y > 0$, $b_X, b_Y > 1$, that is

$$P(X > x) = \left(\frac{a_X}{a_X + x}\right)^{b_X}, \quad x \geq 0,$$

and similarly for $Y$.

Write down the joint df $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. What happens for $\theta = 1$ resp. for $\theta \to \infty$ ? Which qualitative property of the data is modelled by the Gumbel copula?

**c)** (3 points) Develop an approach for estimating $\theta$.

**d)** (3 points) Consider a stylized loss layer (a reinsurance product) with retention level $R$ and payoff

$$g(X, Y) = \begin{cases} 0 & \text{for} X \leq R. \\ X - R + \frac{(X-R)}{X} Y, & \text{for } X > R. \end{cases}$$

Discuss the property of the expected payoff $E(g(X, Y))$ for increasing $\theta$. Consider in particular the case where $R$ is high (but fixed).

**5. Risk aggregation and correlation bounds.** (18 Punkte) Consider an insurance company with two business lines and associated loss $L_1$, $L_2$. Assume that $L_1$ and $L_2$ are lognormally distributed, $L_1 \sim \mathrm{LN}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $L_2 \sim \mathrm{LN}(\mu_2, \sigma_2^2)$. (Details on the lognormal distribution are given below.) The risk capital of the business lines is measured using VaR, so that $\mathrm{SCR}_i = \mathrm{VaR}_\alpha(L_i)$. (SCR is short for solvency capital requirement). The company uses a rule of the form D

$$\mathrm{SCR} = \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}; \tag{1}$$

for risk aggregation; here $\rho \in [0, 1]$ is a correlation parameter determined by the regulator.

**a)** (3 points) Does a model with the given marginal distributions and the given correlation parameter $\rho$ always exist? Is such a model uniquely determined by these parameters? How does your answer change if you use rank correlations instead of standard linear correlations?

**b)** (3 points) Discuss strenghts and weaknesses of a capital aggregation rule of the form (1).

**c)** (10 points) Compute the maximally attainable correlation for the case $L_1 \sim \mathrm{LN}(0, 1)$, $L_2 \sim \mathrm{LN}(0, 4)$.

**d)** (2 points) Comment on the statement "A correlation of two risks close to zero implies a high potential for diversification." (Concentrate on the case of positive correlation.)

*Hint.* $L$ is lognormally distributed with parameters $\mu$ and $\sigma^2$ ($L \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$), if $L = \exp(Z)$ for $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. In this case one has the following formulas for expectation and variance:

$$E(L) = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right) \quad \text{and } \mathrm{var}(L) = \exp(2\mu + \sigma^2)\left(\exp(\sigma^2) - 1\right).$$

**6. Copulas and credit risk.** (9 points)

Denote by $\tau_1, \tau_2$ the default times of two companies. Assume that the $\tau_i$ are exponentially distributed with parameters $\lambda_i$, $i = 1, 2$, ($P(\tau_i \le t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$). Using Sklars theorem it is possible to construct a bivariate distribution $F$ such that $\tau_i \sim Exp(\lambda_i)$ and such that the dependence structure of $(\tau_1, \tau_2)$ is given by $C_\rho^{\mathrm{Ga}}$, the Gauss copula with correlation parameter $\rho$. In this exercise we take $\rho = 0.3$.

**a)** (5 points.) You are given a random number generator which draws random numbers from the one-dimensional standard normal distribution. Develop an algorithm how to draw 100 random vectors $(\tau_1, \tau_2)$ from the two-dimensional distribution with distribution function $F$.

**b)** (4 points) Assume that $\lambda_1 = \lambda_2$ (homogenous portfolio). How does an increase in $\rho$ affect the following probabilities? (give a qualitative answer)

- $P(\{\tau_1 \le T\} \cap \{\tau_2 \le T\})$ (both firms default before $T$)
- $P(\{\tau_1 \le T\} \cup \{\tau_2 \le T\})$ (at least one firm defaults before $T$)

What does this analysis imply qualitatively for the valuation of a senior CDO tranche (an investment product where the investor suffers a loss as soon as the losses due to default in a given credit portfolio exceed a given high bound).

**7. Credit risk.** (12 points)

**a)** (3 points) Discuss the relevance of credit risk for insurance companies.

**b)** (3 points) Consider a bond investor who expects the credit quality of bond issuer $A$ to decrease. Develop a strategy to profit from this view by a suitable useof CDS contracts and discuss the ensuing risks.

**c)** (6 points) Consider a simple reduced-form credit risk model with constant interest rate $r > 0$, constant hazard-rate $\gamma > 0$ (under the risk-neutral measure $Q$) and constant LGD $\delta$. Give the price $V^{\mathrm{def}}$ in $t = 0$ of the default-payment leg of a CDS with time to maturity $T = 5$ (years). Explain for this the derivation of the formula

$$V^{\mathrm{def}} = \delta \int_0^T \gamma e^{-(r+\gamma)t} dt\,.$$

# Solutions

## 1. Risk Measures

**a)** Solving the equation $1-\left(\frac{a}{a+x}\right)^b=\alpha$ gives the value at risk

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X)=a(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}-a.$$

Using the definition, we calculate the expected shortfall

$$\begin{aligned}\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_z(X)\,dz \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(a(1-z)^{-\frac{1}{b}}-a\right)dz \\ &= -\frac{a}{1-\alpha}\left[\frac{b}{b-1}(1-z)^{1-\frac{1}{b}}\right]_\alpha^1-a \\ &= \frac{ab}{b-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}-a.\end{aligned}$$

**b)** Since $(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}$ tends to infinity when $\alpha\to 1$, it holds that

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{\frac{ab}{b-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}}{a(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}}=\frac{b}{b-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{b}}.$$

Since the survival function of the Pareto distribution decays like a power function with exponent $\xi=1/b$, this is a special case of the general asymptotic ratio $\mathrm{ES}_\alpha(X)/\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ which is derived in extreme value theory.

**c) i)** Both approaches use a mixture of the cumulative distribution functions of a normal year and a distressed year:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\le x) &= (1-\mathbb{P}(K))\cdot\mathbb{P}(X\le x\mid\bar{K})+\mathbb{P}(K)\cdot\mathbb{P}(X\le x\mid K) \\ &= 0.95\cdot\left(1-\left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}\right)+0.05\cdot\mathbb{P}(X\le x\mid K),\end{aligned}$$

where a normal year is described by the Pareto distribution with the parameters 10 and 2.5. Approach A) translates directly the result of the workshop on a distressed year into a Bernoulli distribution, assigning to the scenario values 8.5 and 100 the probabilities 0.9 and 0.1, respectively. Approach B) however transforms this discrete distribution into a Pareto distribution with the same expected value and the same variance. Since the Pareto distribution is heavy-tailed and the real claims take continuous values, it appears reasonable to use the Pareto distribution not only for normal, but also for distressed years. Since the Pareto family has two parameters, the first two moments are used to fit the distribution.

**ii)** Because of $F_1(100-)=0.9926<0.994<0.9976=F_1(100)$, the definition entails $\mathrm{VaR}_{0.994}(X)=100$.

For $x > 100$, the cumulative distribution function is given by $F_1(x) = 1 - 0.95 \cdot \left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}$. Using the definition of the tail value at risk as a conditional expected value, we compute

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_{0.994}(X) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X > 100)} \int_{100}^{\infty} x \cdot F_1'(x)\, dx \\
&= \frac{1}{1 - 0.9976} \cdot 0.95 \cdot 10^{2.5} \cdot 2.5 \cdot \int_{100}^{\infty} x(10+x)^{-3.5}\, dx \\
&= 317264.677 \cdot \left( \int_{100}^{\infty} (10+x)^{-2.5}\, dx - 10 \int_{100}^{\infty} (10+x)^{-3.5}\, dx \right) \\
&= 317264.677 \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot (10+x)^{-1.5} \Big|_{100}^{\infty} + 4 \cdot (10+x)^{-2.5} \Big|_{100}^{\infty} \right) \\
&= 317264.677 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 110^{-1.5} - 4 \cdot 110^{-2.5} \right) \\
&= 173.33.
\end{aligned}$$

**iii)** Using the cumulative distribution function $F_2(x) = 1 - 0.95\left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5} - 0.05\left(\frac{42.53}{42.53+x}\right)^{3.41}$, we get

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_{0.994}(X) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X > 75.41)} \int_{75.41}^{\infty} x \cdot F_2'(x)\, dx \\
&= \frac{1}{1 - 0.994} \cdot 0.95 \cdot 10^{2.5} \cdot 2.5 \cdot \int_{75.41}^{\infty} x(10+x)^{-3.5}\, dx \\
&\quad + \frac{1}{1 - 0.994} \cdot 0.05 \cdot 42.53^{3.41} \cdot 3.41 \cdot \int_{75.41}^{\infty} x(42.53+x)^{-4.41}\, dx.
\end{aligned}$$

*Remark.* We now compute the integrals. This is *not* required in this exercise.

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_{0.994}(X) &= 125173.49 \cdot \left( \int_{75.41}^{\infty} (10+x)^{-2.5}\, dx - 10 \int_{75.41}^{\infty} (10+x)^{-3.5}\, dx \right) \\
&\quad + 10172422.46 \cdot \left( \int_{75.41}^{\infty} (42.53+x)^{-3.41}\, dx \right. \\
&\qquad \left. - 42.53 \int_{75.41}^{\infty} (42.53+x)^{-4.41}\, dx \right) \\
&= 125173.49 \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot (10+x)^{-1.5} \Big|_{75.41}^{\infty} + 4 \cdot (10+x)^{-2.5} \Big|_{75.41}^{\infty} \right) \\
&\quad + 10172422.46 \cdot \left( -\frac{1}{2.41} \cdot (42.53+x)^{-2.41} \Big|_{75.41}^{\infty} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{42.53}{3.41} \cdot (42.53+x)^{-3.41} \Big|_{75.41}^{\infty} \right) \\
&= 125173.49 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 85.41^{-1.5} - 4 \cdot 85.41^{-2.5} \right) \\
&\quad + 10172422.46 \cdot \left( \frac{1}{2.41} \cdot 117.94^{-2.41} - \frac{42.53}{3.41} \cdot 117.94^{-3.41} \right) \\
&= 98.29 + 31.98 \\
&= 130.27
\end{aligned}$$

**iv)** Approach A) directly translates the two values stated in the workshop and their probabilities into a discrete Bernoulli distribution. Supposing that the claims take continuous values in distressed years, too, Approach B) chooses the Pareto distribution both in normal and in distressed years. For a distressed year, Approach B) fits the parameters of the Pareto distribution such that the first two moments coincide with the first two moments of the Bernoulli distribution. Both approaches yield a higher required risk capital than the Pareto distribution of a normal year. However, it is striking that Approach B), which, at first glance seems to be more appropriate because of its choice of the distribution family, leads to a considerably lower required risk capital than Approach A). Furthermore, the decisive parameter $b_2$ turns out to be greater than the parameter $b$ for normal years. This a contradiction to the logical requirement that a distressed year be more „dangerous“ than a normal year. Therefore, in a second round of the workshop, the risk owners should answer questions that are more suitable for fitting a continuous distribution. For example, they could estimate the median, some range between two quantiles or higher quantiles. Such questions may be addressed in a fairly non-mathematical way. Consequences of the Pareto distribution calibrated according to their answers should be discussed with the risk owners and, if necessary, entail further adjustments of the distribution.

**2. Bayesian Statistics.**

**a)** We get the prior expected value of $X$ by taking the average over the prior density.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\Theta)\right) \\
&= \int \exp(\theta+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\theta-2)^2\right)d\theta \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\theta-3)^2\right)\cdot\exp(4.5)\,d\theta \\
&= \exp(4.5) = 90.02
\end{aligned}$$

**b) i)** Up to a constant, the posterior density of $\Theta$, given the observations $x_1$, $x_2$, $x_3$ and the expert opinions $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, is given by

$$\begin{aligned}
&\pi(\theta|x_1,x_2,x_2,\delta_1,\delta_2,\delta_3) \\
&\propto\; f_\Theta(\theta)\cdot\prod_{i=1}^{3} f_X(x_i|\theta)\cdot\prod_{i=1}^{3} f_\delta(\delta_i|\theta) \\
&\propto\; \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta-2)^2\right)\cdot\prod_{i=1}^{3}\exp\left(-\frac{(\ln(x_i)-\theta)^2}{2\cdot 4}\right)\cdot\prod_{i=1}^{3}\exp\left(-\frac{1}{2}(\delta_i-\theta)^2\right) \\
&\propto\; \exp\left(-\theta^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{2}\right)+\theta\left(2+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\ln(x_i)+\sum_{i=1}^{3}\delta_i\right)\right) \\
&\propto\; \exp\left(-\frac{1}{2\cdot\frac{4}{19}}(\theta-3.5584)^2\right).
\end{aligned}$$

Up to a constant, this is the density of $\mathcal{N}(3.5584, 0.2105)$.

**ii)** We obtain the predictive distribution of $X$ by averaging the sample density over the posterior density of the parameter.

$$\begin{aligned}
&f_X(x|x_1,x_2,x_3,\delta_1,\delta_2,\delta_3)\\
&= \int f_X(x|\theta)\cdot\pi(\theta|x_1,x_2,x_3,\delta_1,\delta_2,\delta_3)\,d\theta\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\cdot x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-\theta)^2}{2\cdot 4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 0.2105}}\exp\left(-\frac{(\theta-3.5584)^2}{2\cdot 0.2105}\right)\,d\theta\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 4.2105}\cdot x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-3.5584)^2}{2\cdot 4.2105}\right)\\
&\quad\cdot\int_{\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{4.2105}}{\sqrt{2\pi\cdot 4\cdot 0.2105}}\exp\left(-\frac{4.2105}{2\cdot 4\cdot 0.2105}\left(\theta-\frac{0.2105\cdot\ln(x)+4\cdot 3.5584}{4.2105}\right)^2\right)\,d\theta\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 4.2105}\cdot x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-3.5584)^2}{2\cdot 4.2105}\right).
\end{aligned}$$

*Remark.* Thus, the predictive distribution is $LN(3.5584, 4.2105)$ and has expected value 288.21. Only the integral after the second equals sign is required in this exercise.

**c)** Under assumption A), the expert opinions $\delta_i$, $i = 1, 2, 3$, are to be reduced by 1.5 since there is no risk of increasing claims payments due to changing dispensation of justice in Europe. Using the reduced values of $\delta_i$, the posterior distribution is obtained in the same way as in part b). Since the location parameter of the posterior distribution is a weighted mean of the mean values of the prior distribution, the logarithmic observation data and the expert opinions, the posterior expected value of the claim size will be lower than in part b). Under assumption B), the prices of the initial calculation based on the priori distribution of the parameter are not sufficient. Since in a Bayesian model the impact of the prior distribution diminishes only gradually with new data being observed, the prior distribution has to be readjusted. At least, the location parameter of the normal distribution should be increased by 1.5. Consequently, the posterior expected value of the claim size will be higher than in part b).

**3. Term Structure Models.** Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number means that we do not take into account insurance risk. As a consequence, we have to determine the required risk capital needed to buffer an increase in market value of insurance liabilities due to decreasing interest rates. The stochastic present value of the insurance liabilities at time $t$ is given by

$$PV(t) = S\cdot N\cdot {}_{20}p_{50}\cdot D(t,20).$$

The market value is determined under the risk neutral measure. At time 0, we have

$$\begin{aligned}
MV(0) &= \mathbb{E}_Q(PV(0)) = S\cdot N\cdot {}_{20}p_{50}\cdot\exp\left(-A_\lambda(0,20)-B_\lambda(0,20)\cdot r(0)\right)\\
&= 0.444688\cdot S\cdot N,
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
A_\lambda(0,20) &= \left(b_\lambda-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(20-B(0,20))+\frac{\sigma^2}{4a}B(0,20)^2 = 0.691395,\\
B_\lambda(0,20) &= \frac{1}{a}(1-\exp(-20a)) = 2.775704.
\end{aligned}$$

The 95%-quantile of the market value of the insurance liabilities at time 1 derives from the 5%-quantile of the normally distributed short rate $r(1)$. With the parameters of the normal distribution under the real-world measure

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(r(1)) &= r(0)\exp(-a) + b(1-\exp(-a)) = 0.032093,\\ Var(r(1)) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1-\exp(-2a)) = 0.000642\end{aligned}$$

we obtain the 5%- quantile

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{Var(r(1))}\cdot\Phi^{-1}(0.05) = -0.0096.$$

In this VaR-scenario, the market value of insurance liabilities is given by

$$\begin{aligned}MV_{0.95}(1) &= \mathbb{E}_Q(PV(1)\mid r(1) = -0.0096)\\ &= S\cdot N\cdot {}_{20}p_{50}\cdot\exp\left(-A_\lambda(1,20) - B_\lambda(1,20)\cdot r(1)\right)\\ &= S\cdot N\cdot 0.9385\cdot\exp\left(-0.651567 - 2.774805\cdot(-0.0096)\right)\\ &= S\cdot N\cdot 0.9385\cdot 0.535255\\ &= 0.502336\cdot S\cdot N.\end{aligned}$$

In order to compensate an increase in market value of the insurance liabilities with probability 0.95, at time 0, we need the risk capital

$$\begin{aligned}VaR_{0.95}(\Delta MV) &= MV_{0.95}(1)\cdot P(0,1) - MV(0)\\ &= (0.502336\cdot 0.976654 - 0.444688)\cdot S\cdot N\\ &= 0.045921\cdot S\cdot N.\end{aligned}$$

**4. Copulas and claim data.**

a) Reasons for dependence: lawyer fees are often proportional to the size of the claim, large claims are investigated more thoroughly etc.

b) It follows from Sklar that

$$\begin{aligned}F(x,y) &= C_\theta^{\mathrm{Gu}}(F_X(x), F_y(x))\\ &= \exp\left(-\left(\left(-\log(1-\left(\frac{a_X}{a_X+x}\right)^{b_X})\right)^\theta + \left(-\log(1-\left(\frac{a_Y}{a_Y+y}\right)^{b_Y})\right)^\theta\right)^{1/\theta}\right).\end{aligned}$$

For $\theta = 1$ one has independence, for $\theta\to\infty$ one has comonotonicity. The Gumbel copula models upper tail dependence (for $\theta > 1$).

c) $\theta$ can be estimated via MLE

- Step 1: Estimate parameters of the marginal distributions.
- Step 2: Form the pseudo data $(U_{i,1}, U_{i,2}) = (F_X(X_i), F_Y(Y_i))$, $1\le i\le n$.
- Step 3: Form the log likelihood $L(\theta, \mathbf{U}_1,\ldots,\mathbf{U}_n) = \sum_{i=1}^n \log c(U_{i,1}, U_{i,2};\theta)$ where $c(u_1,u_2;\theta) = \frac{\partial^2 C_\theta^{\mathrm{Gu}}}{\partial u_1\partial u_2}$.
- Schritt 4: Maximize $L$ wrt $\theta$.

d) An increase in $\theta$ leads to a higher expected payoff for the reinsurance contract, since with large $\theta$ a claims $X$ that exceed the retention level usually lead to a high ALAE (and only the ALAEs for such claims matter for the payoff). This effect is most pronounced for large $R$.

**5. Risk aggregation and correlation bounds.**

a) A model with these properties does not always exist: since both distributions are not of the same type, the maximal attainable correlation is strictly smaller than one. If such a model exists so there are different copulas that lead to the same linear correlation for the given marginal distributions. The use of rank correlations such as Kendalls $\tau$ ensures the existence of such a model; uniqueness still does not hold.

b)
- Pro: easy to compute.
- Con: not model-based except for elliptical distributions; relies on the problematic notion of linear correlation; finding an appropriate value for $\rho$ is difficult.

c) According to Höffding's theorem maximal correlation $\rho_{\max}$ is attained if both risks are comonotonic. Hence we let $L_1 = \exp(Z)$, $L_2 = \exp(2Z)$ for the *same* random variable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

As a first step we compute the covariance of $L_1, L_2$. It holds that

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(L_1, L_2) &= E(L_1 L_2) - E(L_1)E(L_2) = E(\exp(3Z)) - \exp(1/2)\exp(2) \\ &= \exp(9/2) - \exp(5/2)\end{aligned}$$

The variance of $L_1$ and $L_2$ is easily computed with the formulas provided. Summarizing one has for $\rho_{\max}$ that

$$\rho_{\max} = \frac{e^2 - 1}{\sqrt{(e-1)(e^4-1)}} = 0.666.$$

d) The statement is in general not correct ; depending on the choice of the marginal distribution even comonotonic (perfectly dependent) risks may have low linear correlation. The statement is however correct for elliptical distributions.

**6. Copulas and credit risk.**

a) Draw standard normal random numbers $r_j$, $j = 1, \ldots, 200$ and let

$$(\tilde{y}_{j1}, \tilde{y}_{j2}) := (r_j, r_{100+j}), \quad j = 1, \ldots, 100,$$

Clearly,

$$(y_{j1}, y_{j2}) := (\tilde{y}_{j1}, 0.3 \cdot \tilde{y}_{j1} + \sqrt{1-(0.3)^2} \cdot \tilde{y}_{j2}), \quad j = 1, \ldots, 100,$$

are then 100 bivariate normal random vectors with correlation 0.3 and standard normal margins. Denote by $\Phi$ the df of $N(0,1)$; then

$$(t_{j1}, t_{j2}) := \left( -\frac{1}{\lambda_1} \ln(1 - \Phi(y_{j1})), -\frac{1}{\lambda_2} \ln(1 - \Phi(y_{j2})) \right), \quad j = 1, \ldots, 100,$$

are the desired realisations according to Sklars theorem. (We have used that the quantile function of $Exp(\lambda)$is given by $F_{X_i}^{-1}(t) = -1/\lambda_i \ln(1-t)$.)

b) The first probability is increasing in $\rho$ the second one is decreasing. The value of a senior CDO tranche is decreasing in $\rho$ since the contract suffers a loss only if unusually many companies default before $T$.

**7. Credit risk.**

a) Credit risk is relevant in insurance for a couple of reasons:

- credit risk on the asset side of the balance sheet (insurance companies are typically heavily invested in corporate bonds)
- Counterparty risk both on the asset side and towards reinsurers
- Many insurance companies sell credit insurance.

(other answers possible as well)

b) A possible strategy is to take a protection buyer in a CDS on A and to cancel the position after the spread of A has risen by taking a protection seller position as well. The profit is the positive spread difference.

Risks: counterparty risk of the CDS positions; expectations on development of spread of A might be wrong.

c) Derivation of the formula is detailed in the lecture notes; the computation is as follows:

$$V^{\text{def}} = \delta \int_0^5 \gamma e^{-(r+\gamma)t} dt = \delta \left[ \frac{-\gamma}{r+\gamma} e^{-(r+\gamma)t} \right]_0^5 = \frac{\delta\gamma}{r+\gamma} \big(1 - e^{-(r+\gamma)5}\big)$$