DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

CERA - Klausur
Quantitative Methoden des ERM

17.05.2014

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **120**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **60** Punkte erreicht werden.

Aufgaben

1. Risikomaße. (25 Punkte)

a) Betrachten Sie die Schadengröße X mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \exp\left(-0,1\sqrt{x}\right), \quad x \geq 0.$$

i) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Risikomaße $\mathrm{VaR}_{0,99}(X)$ und den expected shortfall $\mathrm{ES}_{0,99}(X)$.

ii) (6 Punkte) Berechnen Sie die Shortfallwahrscheinlichkeit und die mittlere Überschreitung der Schwelle 2000 von X.

Hinweis.

- $\int (\ln(x))^2 \, dx = x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x$
- $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} x(\ln(x))^2 = 0$
- $\int x^2 \exp(ax)\, dx = \exp(ax)\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$

b) (4 Punkte) Nennen Sie zwei Funktionen des Risikokapitals und erläutern diese jeweils anhand eines Beispiels.

c) (9 Punkte) Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels, dass der Value at Risk im Allgemeinen nicht subadditiv ist. Geben Sie ein Argument an, weshalb ein nicht subadditives Risikomaß aus der Perspektive der Aufsicht problematisch sein könnte.

2. Bayesianische Statistik. (20 Punkte) Der Parameter Θ sei Gamma(α, β)-verteilt. Gegeben den Wert θ von Θ, habe die Schadengröße X die Dichte

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{2\sqrt{x}} \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(x).$$

Hinweis. Die Dichte der Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ lautet

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \theta^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

Der Erwartungswert beträgt $\frac{\alpha}{\beta}$, die Varianz $\frac{\alpha}{\beta^2}$.

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung $x_1 \in \mathbb{R}^+$ von X, sowie die Randdichte von X.

b) (6 Punkte) Zeigen Sie iterativ, dass die Vorhersageverteilung von X, gegeben die Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, die Verteilungsfunktion

$$F(x|x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}} \right)^{\alpha+n}, \quad x \geq 0,$$

besitzt.

Hinweis. Die korrekte Randdichte aus a) führt auf die Randverteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + \sqrt{x}} \right)^\alpha$$

von X.

c) (7 Punkte) Die Analyse des asymptotischen Verhaltens für $n \to \infty$ führt auf folgende Ergebnisse:

1. Die Varianz der a posteriori Verteilung von Θ, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, konvergiert gegen 0. Die Grenzverteilung ordnet einem Wert θ^* die Wahrscheinlichkeit 1 zu.
2. Für den Value at Risk $\mathrm{VaR}_\lambda^{(n)}$ der Vorhersageverteilung von X, gegeben die Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{VaR}_\lambda^{(n)} = \left(\frac{1}{\theta^*} \cdot \ln(1-\lambda)\right)^2$

Geben Sie eine ökonomische Erklärung für die Eigenschaften 1. und 2. an. Überlegen Sie sich dazu, welches Risikomaß welcher Größe der Grenzwert $\left(\frac{1}{\theta^*} \cdot \ln(1-\lambda)\right)^2$ darstellt.

3. Zinsmodelle. (25 Punkte)

a) (12 Punkte) Auf welche Weise kann ein Receiver Swap mit Nominalwert 1 und Fixingterminen 1, 2, 3 (d.h. Zahlungszeitpunkten 2 und 3) zum Zeitpunkt 0 mit Hilfe von Zerobonds repliziert werden? Geben Sie eine geeignete Handelsstrategie mit dem Replikationsportfolio an.

b) (13 Punkte) Sei $S > T > 0$. $P(T,S)$ bezeichne den Preis eines Zerobonds mit Fälligkeit S zur Zeit T. Im Gaußschen Zinsmodell mit konstanter Volatilität σ hat $P(T,S)$ die Darstellung

$$P(T,S) = \frac{P(0,S)}{P(0,T)} \cdot Z,$$

wobei $Z \sim LN\left(-\frac{1}{2}\tau, \tau\right)$ unter dem T-Forward Maß und $Z \sim LN\left(\frac{1}{2}\tau, \tau\right)$ unter dem S-Forward Maß mit $\tau := \sigma^2(S-T)^2 T$ gilt. Die aktuelle Zinsstrukturkurve sei durch die Preise $P(0,t) = \exp(-0,02 \cdot t)$ der Zerobonds mit Fälligkeit t gegeben. Bestimmen Sie den Preis zur Zeit $t = 0$ einer europäischen Call-Option mit Ausübungszeitpunkt 1 und Strike $K = 0,95$ auf einen Zerobond mit Fälligkeit 2. Gehen Sie von $\sigma = 0,1$ aus und verwenden Sie die Standardnormalverteilungsfunktion in der Darstellung Ihres Ergebnisses.

4. Risikomaße und Kapitalallokation (20 Punkte) Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftseinheiten, deren Verluste durch die Zufallsvariablen L_i, $1 \leq i \leq d$ beschrieben werden. Der Gesamtverlust ist also $L := \sum_{i=1}^d L_i$. Sei ϱ ein positiv homogenes Risikomaß wie etwa VaR_α oder der expected shortfall ES_α und sei $\varrho(L)$ das Risikokapital für das Gesamtunternehmen. In diesem Zusammenhang ordnet ein Kapitalallokationsprinzip den einzelnen Geschäftsbereichen das ökonomische Kapital $\mathrm{EC}_1, \ldots, \mathrm{EC}_d$ zu, wobei die sogenannte full allocation property $\varrho(L) = \sum_{i=1}^d \mathrm{EC}_i$ gelten muss.

a) (5 Punkte) Definieren Sie für $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)'$ die Zufallsvariable $L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i L_i$ und setzen Sie $r_\varrho(\boldsymbol{\lambda}) = \varrho(L(\boldsymbol{\lambda}))$. In diesem Zusammenhang ist das Euler-Kapitalallokationsprinzip gegeben durch

$$\mathrm{EC}_i = \frac{\partial r_\varrho}{\partial \lambda_i}(\mathbf{1}), \quad 1 \leq i \leq d.$$

Erklären Sie kurz, warum Kapitalallokationsprinzipien bei der risikoadjustierten performance-Messung zum Einsatz kommen und erläutern Sie mindestens einen Vorteil des Euler Prinzips.

b) (5 Punkte) Betrachten Sie eine Zufallsvariable L die gemäß $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist. Zeigen Sie, dass für den expected shortfall von L die Beziehung

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}$$

gilt, wobei φ die Dichte und q_α das α Quantil der Standard Normalverteilung bezeichnen. Hinweis: es gilt $\int x e^{-x^2/2} dx = -e^{-x^2/2}$.

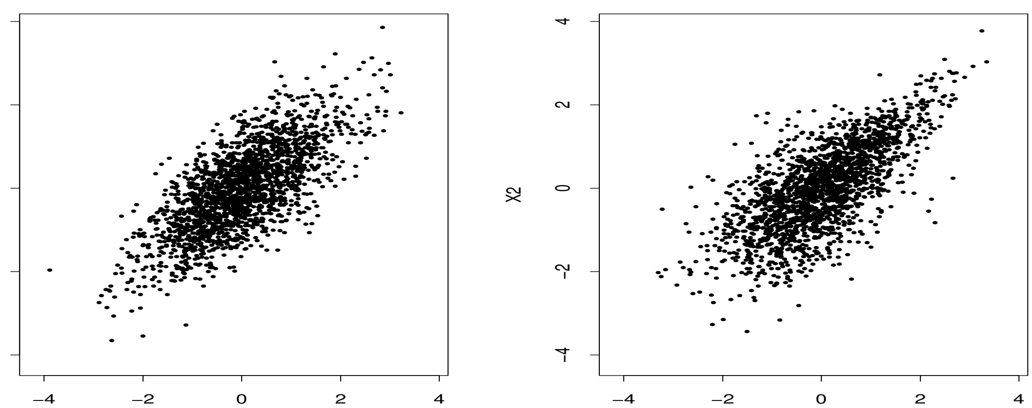
c) (10 Punkte) Nehmen Sie an, dass $(L_1, \ldots, L_d)$ multivariat normalverteilt ist mit Mittelwert 0 und Kovarianzmatrix Σ. Berechnen Sie die Euler-Kapitalallokation für $\varrho = \mathrm{ES}_\alpha$, die sogenannten expected shortfall contributions. Hinweis: Zeigen Sie zunächst unter Verwendung von b), dass

$$\mathrm{ES}_\alpha\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i L_i\right) = (\boldsymbol{\lambda}' \Sigma \boldsymbol{\lambda})^{1/2} \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}.$$

Geben Sie eine alternative Darstellung der expected shortfall contributions an.

5. Copulas und Abhängigkeitsmaße (15 Punkte)

a) (4 Punkte) Betrachten Sie die folgenden beiden Scatter Plots von meta-Verteilungen mit normalverteilten Rändern. Ein Plot basiert auf der Gauss Copula, der andere Plot basiert auf der Gumbel Copula. Ordnen Sie die beiden Plots zu und begründen Sie Ihre Antwort.



b) (6 Punkte) Definieren Sie für zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit stetiger Randverteilung F_i den Koeffizient der lower tail dependence λ_l. Begründen Sie, dass λ_l mit Hilfe der Copula von X_1 und X_2 ausgedrückt werden kann. Warum ist tail dependence potentiell wichtig bei der Messung von Finanzrisiken?

c) (5 Punkte) Sie möchten ein Risikomodell für eine Versicherung konstruieren, bei dem die Verluste L_1 aus dem underwriting business *lognormal* verteilt sind mit Parameter (μ, σ^2); die Verluste L_2 aus dem investment business sollen *normalverteilt* sein, ebenfalls mit Parametern (μ, σ^2). Ausserdem soll das Modell "konservativ" sein, d.h. es wird angenommen dass die Korrelation von L_1 und L_2 gleich 1 ist. Ist dies möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

6. Copulas und Kreditrisiko (15 Punkte)

a) (8 Punkte) Aus der Analyse von Marktdaten sei bekannt, dass die Verteilung der Ausfallzeiten τ_1, τ_2 von zwei Firmen einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$ genügt, d.h. $P(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$. Um die gemeinsame Verteilung zu beschreiben, nehmen wir an, dass der Zufallsvektor (τ_1, τ_2) eine Gauss Copula mit parameter $\rho \in (0, 1]$ hat. Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen generieren kann. Geben Sie einen Algorithmus an, der die Realisierung (z_1, z_2) von zwei unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsgrößen Z_1 und Z_2 in eine Realisierung von (τ_1, τ_2) transformiert.

b) (7 Punkte) Betrachten Sie ein einfaches Kreditrisikomodell in reduzierter Form mit konstanter Zinsrate $r > 0$ und konstanter hazard-rate $\gamma > 0$ (unter dem zur Bewertung verwendeten risikoneutralen Maß Q). Geben Sie in Abhängigkeit von r und γ den Preis in $t = 0$ einer ausfallbehafteten Anleihe mit Nennwert 1 und Fälligkeitsdatum T an. Nehmen

Sie dabei an, dass im Fall eines Konkurses zum Zeitpunkt $\tau \leq T$ ein Betrag von 0.5 direkt in τ an den Halter der Anleihe ausgezahlt wird.

Nehmen Sie umgekehrt an, dass Sie die hazard-rate γ aus dem Marktpreis der Anleihe bestimmt haben. Kann die Ausfallwahrscheinlichkeit $P(\tau \leq T) = 1 - e^{-\gamma T}$ direkt bei der Bestimmung des VaR der Anleihe über den Horizont T verwendet werden?

DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

Lösungen

1. Risikomaße.

a)

i) Auflösen der Gleichung $1 - \exp(-0,1\sqrt{x}) = \alpha$ nach x führt auf den Value at Risk

$$VaR_\alpha(X) = 100(\ln(1-\alpha))^2.$$

Wir erhalten $VaR_{0,99}(X) = 2120,76$. Mit der Definition berechnen wir den Expected Shortfall:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_{0,99}(X) &= \frac{1}{1-0,99}\int_{0,99}^{1} VaR_z(X)\,dz \\
&= 10000\int_{0,99}^{1} (\ln(1-z))^2\,dz \\
&= 10000\int_{0}^{0,01} (\ln(z))^2\,dz \\
&= 10000[z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z]_0^{0,01} \\
&= 10000(0,01\cdot(\ln(0,01))^2 - 0,02\cdot\ln(0,01) + 0,02) \\
&= 3241,79.
\end{aligned}$$

ii) Die Shortfallwahrscheinlichkeit beträgt

$$\mathbb{P}(X > 2000) = 1 - F(2000) = \exp(-0,1\sqrt{2000}) = 0,0114.$$

Die mittlere Überschreitung der Schwelle 2000 ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X-2000)^+) &= \int_{2000}^{\infty} (x-2000)\cdot\frac{0,1}{2\sqrt{x}}\exp(-0,1\sqrt{x})\,dx \\
&= 0,1\int_{\sqrt{2000}}^{\infty} y^2\exp(-0,1y)\,dy - 2000\cdot\exp(-0,1\sqrt{2000}) \\
&= 0,1[\exp(-0,1y)(-10y^2 - 200y - 2000)]_{\sqrt{2000}}^{\infty} - 22,846 \\
&= 12,50.
\end{aligned}$$

b)

- Pufferfunktion gegen adverse Entwicklungen
  Beispiele: ökonomisches Risikokapital, Solvenzkapital, Margin an der Börse
- Vergleichsfunktion
  Beispiel: Vergleich des Kreditrisikos und des Aktienkursrisikos anhand der Kennzahl des benötigten Risikokapitals

- Steuerungsfunktion
  Beispiel: Eine Obergrenze für das benötigte Risikokapital begrenzt das autorisierte Aktienvolumen.
- Bewertungsfunktion
  Beispiel: Risikoadäquate Versicherungsprämien können als Summe von Erwartungswert und anteiligen Kapitalkosten für das benötigte Risikokaptital ermittelt werden.

Bemerkung. Es waren nur zwei Funktionen mit jeweils einem Beispiel gefragt.

c) Hier gibt es viele Möglichkeiten. Im Folgenden betrachten wir zwei ausfallbehaftete Anleihen mit unabhängigem default und identischer Ausfallwahrscheinlichkeit von $p = 0.9\%$. Der heutige Preis der Anleihen sei gleich 100, der Nennwert sei 105, und die recovery rate sei gleich Null. Sei L_i der 'Verlust' (negative P&L) von Anleihe i. Es gilt

$$L_i = \begin{cases} -(105-100) = -5 & \text{(no default, probability } 1-p = 0.991) \\ -(0-100) = 100 & \text{(default, probability } p = 0.009)\,. \end{cases}$$

Setze $\alpha = 0.99$. Es gilt $P(L_i < -5) = 0$ und $P(L_i \leq -5) = 0.991 > \alpha$ und daher $\mathrm{VaR}_\alpha(L_i) = -5$.

Betrachte nun $L = L_1 + L_2$, d.h. ein Portfolio, das je eine Anleihe jeder Firma enthält. Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Ausfälle folgt

$$L = \begin{cases} -10 & \text{(no default, probability } (1-p)^2 = 0.982) \\ -(105-200) = 95 & \text{(exactly 1 default, probability } 2p(1-p)\text{)} \\ 200 & \text{(2 defaults, probability } p^2) \end{cases}$$

Insbesondere ist $P(L \leq -10) = 0.982 < 0.99$ und $P(L \leq 95) > 0.99$ und somit $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = 95$. Daher ist VaR_α in diesem Beispiel nicht kohärent.

Probleme bei fehlender Subadditivität:

- Nicht subadditive Risikomaße können einen Anreiz schaffen, Konzentrationsrisiken einzugehen.
- Nicht subadditive Risikomaße können dazu führen, dass Einheiten eines Unternehmens künstlich, d.h. ohne ökonomischen oder organisatorischen Grund, unterteilt werden, um den Solvenzkapitalbedarf zu reduzieren.

Bemerkung. Es war nur ein Argument gefragt.

2. Bayesianische Statistik.

a) Die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung x_1, ergibt sich modulo konstanter Terme zu

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x_1) &\propto f(x_1|\theta)\cdot\pi(\theta) \\ &\propto \theta\exp\left(-\theta\sqrt{x_1}\right)\cdot\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta) \\ &= \theta^\alpha\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta). \end{aligned}$$

Dies ist bis auf eine Konstante die Dichte von Gamma$(\alpha+1, \beta+\sqrt{x_1})$. Folglich gilt

$$\pi(\theta|x_1) = \frac{(\beta+\sqrt{x_1})^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \theta^\alpha \cdot \exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

Die Randdichte $m(x)$ von X erhalten wir als Quotient von gemeinsamer Dichte und a posteriori Dichte:

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\theta|x)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \Big/ \frac{(\beta+\sqrt{x_1})^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \frac{\alpha\beta^\alpha}{2\sqrt{x}} \cdot (\beta+\sqrt{x})^{-(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

b) Die Randverteilungsfunktion F von X ergibt sich durch Integration der Dichte m aus a):

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+\sqrt{x}}\right)^\alpha.$$

Wie die Randverteilungsdichte durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a priori Dichte entsteht, so entsteht die Vorhersagedichte durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a posteriori Dichte:

$$\begin{aligned} m(x) &= \int f(x|\theta) \cdot \pi(\theta)\, d\theta, \\ f(x|x_1) &= \int f(x|\theta) \cdot \pi(\theta|x_1)\, d\theta. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung, indem wir in der Randverteilungsfunktion die Parameter der a priori Verteilung durch diejenigen der a posteriori Verteilung ersetzen:

$$F(x|x_1) = 1 - \left(\frac{\beta+\sqrt{x_1}}{\beta+\sqrt{x_1}+\sqrt{x}}\right)^{\alpha+1}.$$

Iterativ ergibt sich die Vorhersageverteilung auf Basis von n Beobachtungen

$$F(x|x_1,\ldots,x_n) = 1 - \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}+\sqrt{x}}\right)^{\alpha+n}.$$

c) Der Grenzwert $VaR_\lambda^{(\infty)} := \left(\frac{1}{\theta} \cdot \ln(1-\lambda)\right)^2$ ist der Value at Risk der Beobachtungsverteilung zum Niveau α unter der Voraussetzung, dass θ der richtige Parameterwert ist. Dies überprüft man leicht durch Einsetzen in die Verteilungsfunktion der Beobachtungsverteilung

$$F(x|\theta) = 1 - \exp(-\theta\sqrt{x}).$$

Mit jeder Beobachtung wächst die Information über den Parameter Θ an. Im Grenzübergang $n \to \infty$ verschwindet die Varianz der a posteriori Verteilung, d.h. es besteht keine Parameterunsicherheit mehr. Der Wert θ ist bekannt. Daher konvergiert der Value at Risk der Vorhersageverteilung $VaR_\lambda^{(n)}$ gegen den Value at Risk $VaR_\lambda^{(\infty)}$ der Beobachtungsverteilung, gegeben θ.

Wir führen noch den Nachweis der angegebenen Resultate, der *nicht Bestandteil der Aufgabenstellung* ist.

Mit dem Gesetz der großen Zahl beobachten wir die Konvergenz der Erwartungswerte der a posteriori Verteilung

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\Theta|x_1,\ldots,x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha+n}{\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} \\
&= = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{n}+1}{\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}
\end{aligned}$$

und die Konvergenz der Varianzen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Var(\Theta|x_1,\ldots,x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha+n}{\left(\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} \\
&= = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{n^2}+\frac{1}{n}}{\left(\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} = \frac{0}{\left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Folglich konvergieren die a posteriori Verteilungen von $\Theta|x_1,\ldots,x_n$ gegen das Dirac-Maß im Punkt $\theta = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

Der Value at Risk der Vorhersageverteilung aus b) zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ ist gegeben durch

$$VaR_\lambda^{(n)} := VaR_\lambda(X|x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha+n}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2,$$

wie man durch Einsetzen in die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung unter b) überprüft. Im Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} VaR_\lambda^{(n)} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\alpha+n}\right)^2 \left(\frac{(1-\lambda)^{-\frac{1}{\alpha+n}}-1}{\frac{1}{\alpha+n}}\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2 \cdot (-\ln(1-\lambda))^2 \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\ln(1-\lambda)\right)^2.
\end{aligned}$$

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

3. Zinsmodelle.

a) Sei K der feste Zinssatz. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden K Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit $T = 2$ und $1 + K$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit $T = 3$ gekauft sowie ein Zerobond mit Fälligkeit $T = 1$ verkauft. Der Preis des Replikationsportfolios beträgt

$$P = K \cdot P(0,2) + (1+K) \cdot P(0,3) - P(0,1),$$

wobei $P(t,T)$ den Preis des Zerobonds mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Zum Zeitpunkt $t = 1$ werden $\frac{1}{P(1,2)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 2 verkauft, um eine Geldeinheit an den Inhaber des zur Zeit 1 fällig gewordenen Zerobonds auszuzahlen. Es verbleiben $K - \frac{1}{P(1,2)} = K - L(1,2) - 1$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 2.

Zum Zeitpunkt $t = 2$ zahlt der Receiver Swap den Betrag $K - L(1,2)$ aus. Um die verbleibende Position von -1 Geldeinheit auszugleichen, werden $\frac{1}{P(2,3)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 3 verkauft. Es verbleiben

$$1 + K - \frac{1}{P(2,3)} = K - L(2,3)$$

Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 3, die zum Zeitpunkt 3 den Betrag $K - L(2,3)$ auszahlen.

b) Die Call-Option zahlt zur Zeit $T = 1$ den Betrag

$$C_1 = (P(1,2) - K)^+ = P(1,2) \cdot 1_{P(1,2)>K} - K \cdot 1_{P(1,2)>K}$$

Wir berechnen den Preis C_0 zum Zeitpunkt $t = 0$, indem wir den ersten Summanden unter dem $(S = 2)$-Forward-Maß $Q^{(2)}$ und den zweiten unter dem $(T = 1)$-forward Maß $Q^{(1)}$ bewerten:

$$\begin{aligned}
C_0 &= P(0,2) \cdot \mathbb{E}^{(2)} \left(\frac{1}{P(1,2)} \cdot P(1,2) \cdot 1_{P(1,2)>K} \right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot \mathbb{E}^{(1)} \left(\frac{1}{P(1,1)} \cdot 1_{P(1,2)>K} \right) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)}(P(1,2) > K) - P(0,1) \cdot Q^{(1)}(P(1,2) > K) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)} \left(Z > K \frac{P(0,1)}{P(0,2)} \right) - P(0,1) \cdot Q^{(1)} \left(Z > K \frac{P(0,1)}{P(0,2)} \right) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)} \left(\frac{\ln(Z) - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} > \frac{\ln(\exp(0,02)K) - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} \right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot Q^{(1)} \left(\frac{\ln(Z) + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} > \frac{\ln(\exp(0,02)K) + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} \right) \\
&= P(0,2) \cdot \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln(K) + 0,02 - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} \right) \right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln(K) + 0,02 + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} \right) \right) \\
&= \exp(-0,04) \cdot (1 - \Phi(-0,36293)) - 0,95 \cdot \exp(-0,02) \cdot (1 - \Phi(-0,26293)) \\
&= 0,05435.
\end{aligned}$$

Anmerkung. Das konkrete numerische Ergebnis war nicht Bestandteil der Aufgabenstellung. Gefragt war die Darstellung mit Hilfe von Φ.

4. Kapitalallokation **a)** Verwendet man zur performance-Messung ein risikoadjustiertes performance maß der Form $\text{RORAC}_i \approx$ expected return von unit $i/\,\text{EC}_i$, so muss man das ökonomische Kapital EC_i bestimmen. Um hierbei die Beziehung von L_i und L korrekt zu berücksichtigen, werden Kapitalallokationsprinzipien eingesetzt. Das Euler Prinzip gibt korrekte Signale für die RORAC basierte performance Messung und es belohnt Diversifikation. (nur ein Punkt gefragt, allerdings etwas detaillierter).
b Da ES translationsinvariant und positiv homogen gilt, dass

$$\text{ES}_\alpha = \mu + \sigma E\left(\frac{L-\mu}{\sigma} \,\middle|\, \frac{L-\mu}{\sigma} \geq q_\alpha\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right);$$

daher reicht es aus, den expected shortfall für die standard Normalverteilung zu berechnen. Hier erhält man mit $\tilde{L} := (L-\mu)/\sigma$.

$$\text{ES}_\alpha(\tilde{L}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha}^{\infty} l\varphi(l)\,dl = \frac{1}{1-\alpha}[-\varphi(l)]_{q_\alpha}^{\infty} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}.$$

c) Da $(L_1,\dots,L_d) \sim N_d(0,\Sigma)$ folgt, dass $L(\boldsymbol{\lambda}) \sim N(0,\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$ mit $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. Nach Aufgabe b) folgt also

$$\text{ES}_\alpha(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}\,.$$

Damit erhalten wir für das Euler-Prinzip

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i} r_{\text{ES}_\alpha}(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha})\frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\text{SD}(L)} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}\frac{\text{cov}(L_i,L)}{\text{SD}(L)}.$$

Die expected shortfall contributions haben die alternative Darstellung

$$\text{EC}_i = E(L_i \mid L > \text{VaR}_\alpha(L)).$$

5. Copulas **a)** Der linke scatter Plot gehört zur Gauss Copula, der rechte scatter Plot zur Gumbel Copula. Dies lässt sich beispielsweise mit der upper tail dependence der Gumbel Copula begründen (Massierung von Punkten in der oberen rechten Ecke des rechten Plots) oder mit der Symmetrie des linken Plots (die Gauss Copula ist radial symmetrisch, die Gumbel copula nicht).
b) Der Koeffizient der lower tail dependence des Zufallsvektors $(X_1,X_2)'$ ist

$$\begin{aligned}\lambda_l(X_1,X_2) &= \lim_{q\to 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(q) \mid X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q)) \\ &= \lim_{q\to 0^+} \frac{C(q,q)}{q}\end{aligned}$$

nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. Lower tail dependence ist ein Indikator für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von gemeinsamen Extremereignissen im linken tail der Verteilung.

c). Ein Modell mit den spezifizierten Eigenschaften existiert nicht, da nach dem Satz von Höffding zwei Zufallsvariablen genau dann Korrelation 1 haben wenn die Verteilungen vom selben Typ sind; dies ist hier nicht der Fall.

6. Copulas und Kreditrisiko **a)** Im ersten Schritt konstruieren wir eine Realisation (u_1, u_2) der Gauss copula mit Parameter ρ via $u_1 = \phi(z_1)$, $u_2 = \phi\big(\rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2} z_2\big)$. Anschließend setzen wir $\tau_i = F_i^{-1}(u_i)$ wobei die Quantilfunktion der Exponentialverteilung gegeben ist durch $F_i^{-1}(u) = \frac{-1}{\lambda_i} \ln(1-u)$.
b) Die Auszahlung der Anleihe kann in zwei Teile zerlegt werden. Falls kein Ausfall eintritt, so erhält man den Nennwert; der Preis dieses survival claims ist

$$E^Q(e^{-rT} 1_{\{\tau > T\}}) = e^{-rT} Q(\tau > T) = e^{-(r+\gamma)T} .$$

Der Preis des recovery payments ist

$$E^Q\Big(0.5 e^{-r\tau} 1_{\{\tau \leq T\}}\Big) = 0.5 \int_0^T e^{-rt} \gamma e^{-\gamma t} dt = 0.5 \frac{\gamma}{r+\gamma} \big(1 - e^{-(r+\gamma)T}\big).$$

Die Ausfallintensität γ wurde aus Marktpreisen kalibriert und ist daher eine risikoneutrale Größe, während zur VaR Bestimmung (statistisch bestimmte) Parameter der Verlustverteilung unter dem historischen Maß herangezogen werden sollten.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

CERA - Exam
Quantitative Methods of ERM

17.05.2014

Hints.

- You may use a pocket calculator.
- You can reach up to **120** points. You will have passed the exam if you reach at least **60** points.

Problems

1. Risk Measures (25 points)

a) Consider a loss variable X with cumulative distribution function

$$F(x) = 1 - \exp\left(-0.1\sqrt{x}\right), \quad x \geq 0.$$

i) (6 points) Determine the risk measures value at risk $\mathrm{VaR}_{0.99}(X)$ and expected shortfall $\mathrm{ES}_{0.99}(X)$.

ii) (6 points) Compute the shortfall probability and the mean excess of X over the threshold 2000.

Hint.

- $\int (\ln(x))^2 \, dx = x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x$
- $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} x(\ln(x))^2 = 0$
- $\int x^2 \exp(ax)\, dx = \exp(ax)\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$

b) (4 points) State two roles of risk capital and illustrate them with the help of an example.

c) (9 points) Describe an example of your own choice showing that the value at risk is not subadditive in general. State one argument that a supervisory authority might bring forward against a risk measure which is not subadditive.

2. Bayesian Statistics. (20 points)

Let the parameter Θ be Gamma(α, β)-distributed. Assume that, given the value θ of Θ, the loss variable X has the density

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{2\sqrt{x}} \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(x).$$

Hint. The Gamma-distribution with parameters $\alpha, \beta > 0$ has the density

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \theta^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

The expected value is given by $\frac{\alpha}{\beta}$ and the variance by $\frac{\alpha}{\beta^2}$.

a) (7 points) Determine the posterior density of Θ, given the observation $x_1 \in \mathbb{R}^+$ of X as well as the marginal density of X.

b) (6 points) Show iteratively that the predictive distribution of X, given the observations $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, has the cumulative distribution function

$$F(x|x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}} \right)^{\alpha+n}, \quad x \geq 0.$$

Hint. The correct marginal density from part a) gives rise to the following marginal cumulative distribution function of X:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + \sqrt{x}} \right)^\alpha$$

c) (7 points) Analysing the asymptotic behaviour when $n \to \infty$ we observe the following results:

1. The variance of the posterior distribution of Θ, given $x_1, \ldots, x_n$, converges to 0. The limiting distribution assigns probability 1 to some value θ_0.
2. Given the observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$, for the value at risk $\mathrm{VaR}_\lambda^{(n)}$ of the predictive distribution of X at confidence level $\lambda \in (0,1)$, it holds that $\lim_{n\to\infty} \mathrm{VaR}_\lambda^{(n)} = \left(\frac{1}{\theta_0} \cdot \ln(1-\lambda)\right)^2$.

Explain properties 1. and 2. To this end, reflect which risk measure of which variable takes the value of the limit $\left(\frac{1}{\theta_0} \cdot \ln(1-\lambda)\right)^2$.

3. Term Structure Models. (25 points)

a) (12 points) How can a receiver swap with nominal value 1 and reset dates 1, 2, 3 (i.e. payment times 2 and 3) be replicated at time 0 by means of zero bonds? State a suitable trading strategy together with the replication portfolio.

b) (13 points) Let $S > T > 0$ and $P(T, S)$ denote the price of a zero bond with maturity S at time T. In the Gaussian interest rate model with constant volatility σ, we are given the representation

$$P(T, S) = \frac{P(0, S)}{P(0, T)} \cdot Z,$$

where $Z \sim LN\left(-\frac{1}{2}\tau, \tau\right)$ holds under the T-forward measure and $Z \sim LN\left(\frac{1}{2}\tau, \tau\right)$ under the S-forward measure with $\tau := \sigma^2(S-T)^2 T$. Assume that the present term structure is given by the prices $P(0,t) = \exp(-0.02 \cdot t)$ of zero bonds with maturity t. Determine the price at time $t = 0$ of a european call option with expiration date 1 and strike $K = 0.95$ on a zero bond with maturity 2. Assume that $\sigma = 0.1$ and use the cumulative normal distribution function Φ when stating your result.

4. Risk measures and capital allocation (20 points) Consider an insurance company with d business units. The loss of these units is described by the random variables L_i, $1 \leq i \leq d$ so that the total loss is given by $L := \sum_{i=1}^d L_i$. Let ϱ by a positively homogenous risk measure such as VaR_α or the expected shortfall ES_α, and let $\varrho(L)$ be the risk capital for the entire company. In this context a capital allocation principle allocates the economic capital $\mathrm{EC}_1, \ldots, \mathrm{EC}_d$ to the individual business units, where the so-called full allocation property $\varrho(L) = \sum_{i=1}^d \mathrm{EC}_i$ has to hold.

a) (5 points) Define for $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)'$ the random variable $L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i L_i$ and let $r_\varrho(\boldsymbol{\lambda}) = \varrho(L(\boldsymbol{\lambda}))$. Then the *Euler capital allocation principle* is given by I

$$\mathrm{EC}_i = \frac{\partial r_\varrho}{\partial \lambda_i}(\mathbf{1}), \quad 1 \leq i \leq d.$$

Explain briefly why capital allocation principles are used in risk adjusted performance measurement and discuss at least one advantage of the Euler principle.

b) (5 points) Consider a random variable $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ and show that the expected shortfall is given by

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha},$$

where φ denotes the density and q_α the α quantile of the standard normal distribution. Hint: it holds that $\int x e^{-x^2/2} dx = -e^{-x^2/2}$.

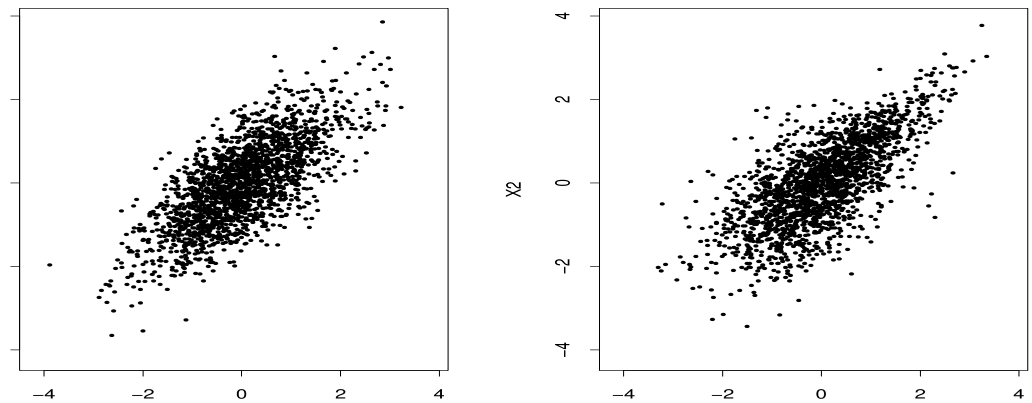
c) (10 points) Assume that $(L_1, \ldots, L_d)$ is multivariate normal with mean $\mu = 0$ and covariance matrix Σ. Compute the Euler capital allocations for $\varrho = \mathrm{ES}_\alpha$, the so-called expected shortfall contributions. Hint: show using b) that

$$\mathrm{ES}_\alpha(\sum_{i=1}^d \lambda_i L_i) = (\boldsymbol{\lambda}' \Sigma \boldsymbol{\lambda})^{1/2} \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}.$$

Give an alternative representation of the expected shortfall contributions.

5. Copulas and dependence measures (15 points)

a) (4 points) Consider the following two scatter plots of meta-distributions with normal margins where one plot is based on a Gauss copula and the other plot is based on a Gumbel copula. Which is which? Justify your answer.



b) (6 points) Define for two rvs X_1 and X_2 with continuous marginal distributions the coefficient of lower tail dependence λ_l. Show that λ_l can be expressed in terms of the copula of X_1 and X_2. Why is tail dependence relevant in the measurement of financial risk?

c) (5 points) You want to construct a risk model for an insurance company where the losses L_1 from the underwriting business are *lognormally* distributed with parameters (μ, σ^2); the loss L_2 from the investment business are *normallly distributed*, again with parameters (μ, σ^2). Moreover, the model should be "conservative", that is one assumes that the correlation of L_1 and L_2 is equal to 1. Does a model with these properties exist? Justify your answer.

6. Copulas and credit risk (15 points)

a) (8 points) An analysis of market data shows that the distribution of the default times τ_1, τ_2 of two companies is an exponential distribution with parameter von $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, that is $P(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$. In order to determine the joint distribution it is assumed that the random vector (τ_1, τ_2) has a Gauss copula with parameter $\rho \in (0, 1]$. You have a random number generator at your disposal that generates independent $N(0, 1)$-distributed random variables. Describe an algorithm that transforms a realisation (z_1, z_2) of two independent $N(0, 1)$-distributed random variables Z_1 and Z_2 into a realisation of (τ_1, τ_2).

b) (7 points) Consider a simple reduced-form credit risk model with constant interest rate $r > 0$ and constant hazard-rate $\gamma > 0$ (under the risk-neutral pricing measure Q). Compute the price in $t = 0$ of a defaultable bond with nominal value 1 and maturity date T as a function of r and γ. Assume that in case of a default at the random time point $\tau \leq T$ an amount of 0.5 is paid to the holder of the bond directly at τ.

Assume conversely that the hazard rate γ was determined by calibration to the observed market price of the bond. Is it possible to use the default probability $P(\tau \leq T) = 1 - e^{-\gamma T}$ directly in determining the VaR of the bond over the horizon T ?

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

Solutions

1. Risk Measures

a)

i) Solving the equation $1-\exp(-0.1\sqrt{x})=\alpha$ gives the value at risk:

$$VaR_\alpha(X)=100(\ln(1-\alpha))^2.$$

We obtain $VaR_{0.99}(X)=2120.76$. Using the definition, we calculate the expected shortfall:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_{0.99}(X) &= \frac{1}{1-0.99}\int_{0.99}^{1} VaR_z(X)\,dz \\
&= 10000\int_{0.99}^{1}(\ln(1-z))^2\,dz \\
&= 10000\int_{0}^{0.01}(\ln(z))^2\,dz \\
&= 10000[z(\ln(z))^2-2z\ln(z)+2z]_0^{0.01} \\
&= 10000(0.01\cdot(\ln(0.01))^2-0.02\cdot\ln(0.01)+0.02) \\
&= 3241.79.
\end{aligned}$$

ii) The shortfall probability is given by

$$\mathbb{P}(X>2000)=1-F(2000)=\exp(-0.1\sqrt{2000})=0.0114.$$

The mean excess over the threshold 2000 is given by

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X-2000)^+) &= \int_{2000}^{\infty}(x-2000)\cdot\frac{0.1}{2\sqrt{x}}\exp(-0.1\sqrt{x})\,dx \\
&= 0.1\int_{\sqrt{2000}}^{\infty} y^2\exp(-0.1y)\,dy-2000\cdot\exp(-0.1\sqrt{2000}) \\
&= 0.1[\exp(-0.1y)(-10y^2-200y-2000)]_{\sqrt{2000}}^{\infty}-22.846 \\
&= 12.50.
\end{aligned}$$

b)
- buffer against adverse deviations
  examples: economic risk capital, solvency capital, margin requirement at a stock exchange
- comparison function
  example: camparing credit risk and equity risk by means of required risk capital

- management function
  example: An upper bound for the required risk capital limits the authorized volume of the equity portfolio.
- valuation function
  example: Risk adjusted insurance premiums can be calculated as a sum of the expected value of the claim and the cost of capital of the required risk capital.

Remark. Only two functions together with an example are expected.

c) There are many possible solutions. In the following, we consider two risky bonds with independent default an identical default probability of $p = 0.9\%$. Assume that the price of the bonds is equal to 100, the nominal is 105, and the recovery rate is equal to zero. Let L_i be the 'loss' (negative P&L) of bond i. It holds that

$$L_i = \begin{cases} -(105-100) = -5 & \text{(no default, probability } 1-p = 0.991) \\ -(0-100) = 100 & \text{(default, probability } p = 0.009)\,. \end{cases}$$

Set $\alpha = 0.99$. It holds that $P(L_i < -5) = 0$ and $P(L_i \leq -5) = 0.991 > \alpha$ and therefore $\mathrm{VaR}_\alpha(L_i) = -5$.

Consider now $L = L_1 + L_2$, i.e. a portfolio consisting of one bond of each firm. As defaults are assumed to be independent it follows that

$$L = \begin{cases} -10 & \text{(no default, probability } (1-p)^2 = 0.982) \\ -(105-200) = 95 & \text{(exactly 1 default, probability } 2p(1-p)\text{)} \\ 200 & \text{(2 defaults, probability } p^2) \end{cases}$$

In particular, we have $P(L \leq -10) = 0.982 < 0.99$ and $P(L \leq 95) > 0.99$ and thus $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = 95$. Therfore, VaR_α fails to be coherent in this example.

A supervisory authority might point out the following problems due to the lack of subadditivity:

- incentives to take concentration risk
- incentive to divide a company into several entities without any economic or organisational reason, only to reduce the required solvency capital

Remark. Only one argument is expected.

2. Bayesian Statistics.

a) When calculating the posterior density of Θ, given the observation x_1, we may introduce and delete constants as convenient:

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x_1) &\propto f(x_1|\theta) \cdot \pi(\theta) \\ &\propto \theta \exp\left(-\theta\sqrt{x_1}\right) \cdot \theta^{\alpha-1} \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta) \\ &= \theta^{\alpha} \cdot \exp\left(-(\beta + \sqrt{x_1})\theta\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta). \end{aligned}$$

Up to a constant, this is the density of the Gamma$(\alpha+1, \beta+\sqrt{x_1})$ distribution. Therefore, it holds that

$$\pi(\theta|x_1) = \frac{(\beta+\sqrt{x_1})^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \theta^\alpha \cdot \exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

The marginal density $m(x)$ of X is given by the quotient of the joint density and the posterior density:

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\theta|x)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \Big/ \frac{(\beta+\sqrt{x_1})^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \frac{\alpha\beta^\alpha}{2\sqrt{x}} \cdot (\beta+\sqrt{x})^{-(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

b) Integrating the density function m from part a), we get the marginal cumulative distribution function F of X:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+\sqrt{x}}\right)^\alpha.$$

In the same way as the marginal density is obtained by averaging the sample density over the prior density, the predictive density is obtained by averaging the sample density over the posterior density:

$$\begin{aligned} m(x) &= \int f(x|\theta) \cdot \pi(\theta)\, d\theta, \\ f(x|x_1) &= \int f(x|\theta) \cdot \pi(\theta|x_1)\, d\theta. \end{aligned}$$

Therefore, we get the cumulative distribution function of the predictive distribution by replacing the parameters of the prior distribution in the marginal distribution function by those of the posterior distribution:

$$F(x|x_1) = 1 - \left(\frac{\beta+\sqrt{x_1}}{\beta+\sqrt{x_1}+\sqrt{x}}\right)^{\alpha+1}.$$

By iteration, we get the predictive distribution based on n observations:

$$F(x|x_1,\ldots,x_n) = 1 - \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}+\sqrt{x}}\right)^{\alpha+n}.$$

c) The limit $\mathrm{VaR}_\lambda^{(\infty)} := \left(\frac{1}{\theta} \cdot \ln(1-\lambda)\right)^2$ is the value at risk of the sample distribution at confidence level α provided that θ_0 is the true parameter. This is easily verified by inserting $\mathrm{VaR}_\lambda^{(\infty)}$ into the cumulative distribution function of the sample distribution

$$F(x|\theta) = 1 - \exp(-\theta\sqrt{x}).$$

Each observation increases the available information on the parameter Θ. In the limit $n \to \infty$ the variance of the posterior distribution vanishes, i.e. there is no longer any uncertainty of the parameter. Its value θ_0 is known. Therefore, the value at risk of the predictive distribution $\mathrm{VaR}_\lambda^{(n)}$ converges to the value at risk $\mathrm{VaR}_\lambda^{(\infty)}$ of the sample distribution, given θ_0.

We now prove the results stated in this exercise. This proof is *not required* in this exercise.

By the law of large numbers, we observe the following convergence of the expected values of the posterior distribution

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\Theta|x_1,\ldots,x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha+n}{\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} \\
&= = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{n}+1}{\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}
\end{aligned}
$$

and the following convergence of the variances

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Var(\Theta|x_1,\ldots,x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha+n}{\left(\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} \\
&= = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{n^2}+\frac{1}{n}}{\left(\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} = \frac{0}{\left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Consequently, the posterior distributions of $\Theta|x_1,\ldots,x_n$ converge to the Dirac measure in the point $\theta_0 = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

The value at risk of the predictive distribution from part b) at confidence level $\lambda \in (0,1)$ is given by

$$
\mathrm{VaR}_\lambda^{(n)} := \mathrm{VaR}_\lambda(X|x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha+n}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2,
$$

as can be easily verified by inserting into the cumulative distribution function of the predictive distribution from part b). Letting tend $n \to \infty$, we obtain

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{VaR}_\lambda^{(n)} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\alpha+n}\right)^2 \left(\frac{(1-\lambda)^{-\frac{1}{\alpha+n}}-1}{\frac{1}{\alpha+n}}\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2 \cdot (-\ln(1-\lambda))^2 \\
&= \left(\frac{1}{\theta_0}\ln(1-\lambda)\right)^2.
\end{aligned}
$$

3. Term Structure Models.

a) Let K be the fixed rate. At time $t = 0$ we buy K shares of the zero bond with maturity $T = 2$ and $1 + K$ shares of the zero bond with maturity $T = 3$ and we sell a zero bond with maturity $T = 1$. The price of the replicating portfolio is given by

$$P = K \cdot P(0,2) + (1+K) \cdot P(0,3) - P(0,1),$$

where $P(t,T)$ denotes the price of the zero bond with maturity T at time t.

At time $t = 1$, we sell $\frac{1}{P(1,2)}$ shares of the zero bond with maturity 2 in order pay back one unit of currency to the holder of the zero bond with maturity 1. Then, $K - \frac{1}{P(1,2)} = K - L(1,2) - 1$ shares of the zero bond with maturity 2 remain.

At time $t = 2$ the receiver swap pays the amount $K - L(1,2)$. In order to clear the remaining position of -1 unit of currency, we sell $\frac{1}{P(2,3)}$ shares of the zero bond with maturity 3. The remaining

$$1 + K - \frac{1}{P(2,3)} = K - L(2,3)$$

shares of the zero bond with maturity 3 will pay $K - L(2,3)$ at time 3.

b) At time $T = 1$, the call option pays the amount

$$C_1 = (P(1,2) - K)^+ = P(1,2) \cdot 1_{P(1,2)>K} - K \cdot 1_{P(1,2)>K}.$$

When calculating the price C_0 at time $t = 0$, we valuate the first summand under the $(S = 2)$-forward measure $Q^{(2)}$ and the second one under the $(T = 1)$-forward measure $Q^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
C_0 &= P(0,2) \cdot \mathbb{E}^{(2)}\left(\frac{1}{P(1,2)} \cdot P(1,2) \cdot 1_{P(1,2)>K}\right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot \mathbb{E}^{(1)}\left(\frac{1}{P(1,1)} \cdot 1_{P(1,2)>K}\right) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)}(P(1,2) > K) - P(0,1) \cdot Q^{(1)}(P(1,2) > K) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)}\left(Z > K\frac{P(0,1)}{P(0,2)}\right) - P(0,1) \cdot Q^{(1)}\left(Z > K\frac{P(0,1)}{P(0,2)}\right) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)}\left(\frac{\ln(Z) - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} > \frac{\ln(\exp(0,02)K) - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot Q^{(1)}\left(\frac{\ln(Z) + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} > \frac{\ln(\exp(0,02)K) + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right) \\
&= P(0,2) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) + 0.02 - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) + 0.02 + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \\
&= \exp(-0.04) \cdot (1 - \Phi(-0.36293)) - 0.95 \cdot \exp(-0.02) \cdot (1 - \Phi(-0.26293)) \\
&= 0.05435.
\end{aligned}$$

Remark. The concrete numerical result is not part of the exercise. The representation based on Φ is expected.

4. Capital allocation. **a)** If one uses a risk adjusted performance measure of the form $\text{RORAC}_i \approx$ expected return of unit $i/\,\text{EC}_i$, one needs to determine the economic capital EC_i. Capital allocation principles are used at this point in order to take into account the relation of L_i and L in an appropriate way. The Euler principle gives correct signals for RORAC based performance measurement (RORAC compatibility) and it rewards diversification if based on some coherent risk measure. (only one point necessary).

b) Since ES is translation invariant and positively homogeneous it holds that

$$\text{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma E\left(\frac{L-\mu}{\sigma} \;\middle|\; \frac{L-\mu}{\sigma} \geq q_\alpha\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right);$$

hence it is enough to determine expected shortfall for a standard normal variable. Here we get with $\tilde{L} := (L-\mu)/\sigma$.

$$\text{ES}_\alpha(\tilde{L}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha}^{\infty} l\varphi(l)\,dl = \frac{1}{1-\alpha}[-\varphi(l)]_{q_\alpha}^{\infty} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}.$$

c) Since $(L_1,\ldots,L_d) \sim N_d(0,\Sigma)$ it follows that $L(\boldsymbol{\lambda}) \sim N(0,\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$ with $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. According to b) we thus get

$$\text{ES}_\alpha(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}\,.$$

Hence we get for the Euler-principle

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i} r_{\text{ES}_\alpha}(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha})\frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\text{SD}(L)} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{1-\alpha}\frac{\text{cov}(L_i,L)}{\text{SD}(L)}.$$

The expected shortfall contributions have the alternative representation

$$\text{EC}_i = E(L_i \mid L > \text{VaR}_\alpha(L)).$$

5. Copulas **a)** The scatter plot on the left corresponds to the Gauss copula, the scatter plot on the right corresponds to the Gumbel copula. This can be justified among others by the upper tail dependence of the Gumbel Copula (a thick point cloud at the upper right corner of the right plot) or using the symmetry of the left plot (the Gauss copula ist radially symmetric, in contrast to the Gumbel copula).

b) The coefficient of lower tail dependence of the random vector $(X_1,X_2)'$ is

$$\begin{aligned}\lambda_l(X_1,X_2) &= \lim_{q\to 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(q) \mid X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q))\\ &= \lim_{q\to 0^+}\frac{C(q,q)}{q}\end{aligned}$$

Lower tail dependence is an indicator for the probability of joint extreme events in the left tail of the distribution.

c). There is no model with the specified properties: according to Hoeffdings theorem X_1 and X_2 have a correlation of 1 if and only if they are of the same type; this is not the case here.

6. Copulas and credit risk **a)** In a fist step one constructs a realisation (u_1, u_2) of the Gauss copula with parameter ρ via $u_1 = \phi(z_1)$, $u_2 = \phi\big(\rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2} z_2\big)$.In the second step we set $\tau_i = F_i^{-1}(u_i)$ where the quantile function of the exponential distribution is given by $F_i^{-1}(u) = \frac{-1}{\lambda_i} \ln(1-u)$.

b) The payoff of the bond can be decomposed in two parts. If there is no default one gets the nominal value 1; the price of this survival claim is

$$E^Q(e^{-rT} 1_{\{\tau > T\}}) = e^{-rT} Q(\tau > T) = e^{-(r+\gamma)T}\,.$$

The price of the recovery payment equals

$$E^Q\Big(0.5 e^{-r\tau} 1_{\{\tau \le T\}}\big) = 0.5 \int_0^T e^{-rt} \gamma e^{-\gamma t} dt = 0.5 \frac{\gamma}{r+\gamma}\big(1 - e^{-(r+\gamma)T}\big).$$

The hazard rate γ was calibrated from market prices and is thus a risk-neutral quantity, whereas for the determination of VaR one seeds (statistically estimated) patrameters of the loss distribution under the historical measure P.