DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

CERA - Klausur
Quantitative Methoden des ERM

19.05.2012

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **120**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **60** Punkte erreicht werden.

Aufgaben

1. Risikomaße. (35 Punkte)

a) (6 Punkte) Die Verteilungsfunktion F der Verlustgröße X lautet

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2}; & x \geq 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie Value at Risk und Expected Shortfall von X zum Niveau 0,99.

b) (4 Punkte) Nennen Sie zwei Funktionen des Risikokapitals und erläutern diese jeweils anhand eines Beispiels.

c) (9 Punkte) Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels, dass der Value at Risk im Allgemeinen nicht subadditiv ist. Geben Sie ein Argument an, weshalb ein nicht subadditives Risikomaß aus der Perspektive der Aufsicht problematisch sein könnte.

d) (10 Punkte) Prüfen Sie, welche Kohärenzaxiome gemäß Artzner, Delbaen, Eber und Heath das Risikomaß $\rho(X) = \mathbb{E}(X) + 2 \cdot \sigma(X)$ erfüllt, wobei $\sigma(X)$ die Standardabweichung von X bezeichnet. Hinweis: achten Sie besonders auf die Monotonie.

e) (6 Punkte) Wir betrachten eine integrierbare Zufallsgröße X mit streng wachsender Verteilungsfunktion F und stetig differenzierbarer Dichte f und untersuchen das asymptotische Verhältnis von Value at Risk und Expected Shortfall

$$\kappa := \lim_{\alpha \nearrow 1} \frac{VaR_\alpha(X)}{ES_\alpha(X)}.$$

Es gilt folgende äquivalente Darstellung, die Sie ohne Beweis verwenden können:

$$\kappa = 1 + \lim_{\alpha \nearrow 1} \frac{1}{1 + (\ln f)'(F^{-1}(\alpha)) \cdot F^{-1}(\alpha)}.$$

Werten Sie diesen Ausdruck für die Standardnormalverteilung und die Verteilung aus Teilaufgabe a) aus und interpretieren Sie das Ergebnis mit Hilfe der Eigenschaften der betrachteten Risikomaße und der beiden Verteilungen.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

2. Simulation, Abhängigkeitsstrukturen. (20 Punkte) Sie verfügen über einen Zufallsgenerator, der Zufallszahlen aus der Gleichverteilung auf $[0, 1]$ erzeugt.

a) (10 Punkte) Geben Sie einen Algorithmus an, der 1000 Zufallsvektoren aus der zweidimensionalen Verteilung F generiert, deren Abhängigkeitsstruktur durch die zweidimensionale Gauß-Copula mit Parameter 0,3 beschrieben wird und deren Ränder exponentialverteilt mit Parameter 1 sind.

b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass Spearman's rho ρ_S der unteren Fréchet-Schranke -1 beträgt.

c) (6 Punkte) Geben Sie einen Algorithmus an, der 1000 zweidimensionale Zufallsvektoren mit standardnormalverteilten Rändern und einem Spearman's rho von -1 erzeugt.

3. Bayesianische Statistik. (20 Punkte) Gegeben den Wert λ der unbekannten Intensität Λ seien die Ausfallzeiten T_i, $i = 1, \dots, n$, von n Kreditnehmern unabhängig und identisch verteilt gemäß $Exp(\lambda)$. Auf Basis einer Experteneinschätzung wird $Gamma(2, 1)$ als a priori Verteilung der unbekannten Intensität Λ angesetzt.
Hinweis. Die Dichte der Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ lautet

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x) 1_{(0,\infty)}(x).$$

Der Erwartungswert beträgt $\frac{\alpha}{\beta}$.

a) (4 Punkte) Sei X die zufällige Anzahl der während der Periode $[0, 1]$ ausgefallenen Kreditnehmer. Begründen Sie: Die bedingte Verteilung von X, gegeben den Wert λ der Ausfallintensität, ist die Binomialverteilung mit den Parametern n und $p(\lambda) = 1 - \exp(-\lambda)$.

b) (8 Punkte) Bestimmen Sie die a posteriori Verteilung von Λ, gegeben die Beobachtung $X = 0$ und berechnen Sie einen möglichen Schätzer für Λ, gegeben die Beobachtung $X = 0$.

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die a posteriori Verteilung von Λ, gegeben die Beobachtung $T_1 = t$.

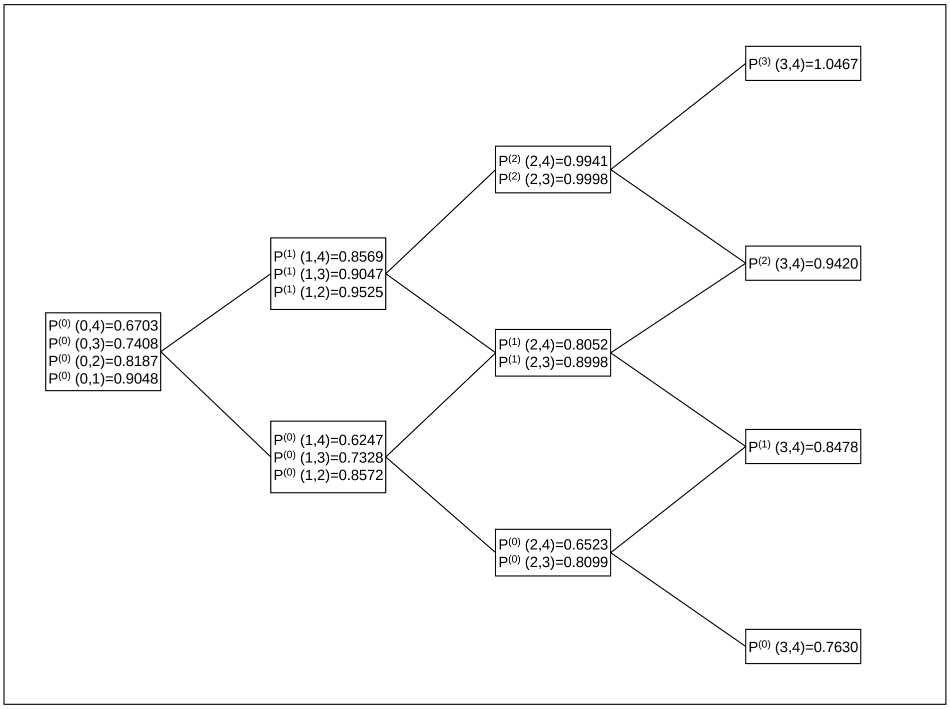
d) (4 Punkte) Sind die Ausfallzeiten der Kreditnehmer (unbedingt) unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Zinsmodelle. (20 Punkte)

a) (10 Punkte) Auf welche Weise kann ein Zerobond der Laufzeit $T = 3$ durch einen Zerobond der Laufzeit $T = 2$ und eine forward rate agreement repliziert werden? Geben Sie eine geeignete Handelsstrategie mit dem Replikationsportfolio an.

b) (10 Punkte) Betrachten Sie den folgenden Baum der Diskontierungsfaktoren $P^{(i)}(t, T)$ in einem Ho-Lee-Modell, wobei der obere Index (i) die Anzahl der bisherigen Aufwärtsbewegungen und $[t, T]$ das Zeitintervall der Diskontierung angibt. Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung beträgt $\pi = 0,5$.

Berechnen Sie zum Zeitpunkt 0 den Preis eines Caplets mit Auszahlungszeitpunkt $t = 3$ und Strike 0,10.



5. Risk Integration. (15 Punkte) Betrachten Sie eine Versicherung mit zwei business lines (Investment und underwriting), deren Verlust (negative P& L) durch die Zufallsvariablen L_i, $i = 1, 2$ gegeben ist. Jede business line hat ein eigenes Risikomanagement-System und es sei bekannt, dass $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und dass $L_2 \sim LN(\mu_2, \sigma_2^2)$ (d.h. $\ln L_2$ ist $N(\mu_2, \sigma_2^2)$-verteilt). Allerdings gibt es kein firmenweites Risikomanagementmodell, so dass die Verteilung von $\mathbf{L} = (L_1, L_2)$ nicht bekannt ist.

a) (7 Punkte) Konstruieren Sie mit Hilfe der Gauss copula mit Parameter ρ ein konsistentes Modell für die Verteilungsfunktion F von $\mathbf{L}$ und beschreiben Sie einen Algorithmus, um Datenpunkte gemäß F zu simulieren.

b) (4 Punkte) Diskutieren Sie eine Methode zur Schätzung von ρ, falls Beobachtungen $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_{10}$ aus den letzten 10 Jahren zur Verfügung stehen.

c) (4 Punkte) Führen Sie kurz einige Vor- und Nachteile des in a) und b) beschriebenen Ansatzes zur Risikoaggregation auf.

6. Kreditrisiko. (10 Punkte) Betrachten Sie ein einfaches Kreditrisikomodell in reduzierter Form mit konstanter Zinsrate $r > 0$ und konstanter hazard-rate $\gamma > 0$ (unter dem zur Bewertung verwendeten risikoneutralen Maß Q). Geben Sie in Abhängigkeit von r und γ den Preis in $t = 0$ einer ausfallbehafteten Anleihe mit Nennwert 1 an. Nehmen Sie dabei an, dass im Fall eines

Konkurses zum Zeitpunkt $\tau \leq T$ ein Betrag von 0.5 direkt in τ an den Halter der Anleihe ausgezahlt wird.
Nehmen Sie umgekehrt an, dass Sie die Ausfallintensität γ aus dem Marktpreis der Anleihe bestimmt haben. Kann die Ausfallwahrscheinlichkeit $P(\tau \leq T) = e^{-\gamma T}$ direkt bei der Bestimmung des VaR der Anleihe über den Horizont T verwendet werden?

DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

Lösungen

1. Risikomaße.

a) Die Gleichung

$$1 - \frac{1}{(\mathrm{VaR}_{0,99}(X))^2} = 0,99$$

führt auf den Value at Risk $\mathrm{VaR}_{0,99}(X) = 10$. Der Expected Shortfall ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_{0,99}(X) &= \frac{1}{1-0,99}\int_{0,99}^{1} \mathrm{VaR}_z(X)\,dz \\
&= 100 \cdot \int_{0,99}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right) dz \\
&= 100 \cdot [-2\sqrt{1-z}]_{0,99}^{1} \\
&= 20.
\end{aligned}$$

b)
- Pufferfunktion gegen adverse Entwicklungen
  Beispiele: ökonomisches Risikokapital, Solvenzkapital, Margin an der Börse
- Vergleichsfunktion
  Beispiel: Vergleich des Kreditrisikos und des Aktienkursrisikos anhand der Kennzahl des benötigten Risikokapitals
- Steuerungsfunktion
  Beispiel: Eine Obergrenze für das benötigte Risikokapital begrenzt das autorisierte Aktienvolumen.
- Bewertungsfunktion
  Beispiel: Risikoadäquate Versicherungsprämien können als Summe von Erwartungswert und anteiligen Kapitalkosten für das benötigte Risikokaptital ermittelt werden.

Bemerkung. Es waren nur zwei Funktionen mit jeweils einem Beispiel gefragt.

c) Hier gibt es viele Möglichkeiten. Im Folgenden betrachten wir zwei ausfallbehaftete Anleihen mit unabhängigem default und identischer Ausfallwahrscheinlichkeit von $p = 0.9\%$. Der heutige Preis der Anleihen sei gleich 100, der Nennwert sei 105, und die recovery rate sei gleich Null. Sei L_i der 'Verlust' (negative P&L) von Anleihe i. Es gilt

$$L_i = \begin{cases} -(105-100) = -5 & \text{(no default, probability } 1-p = 0.991) \\ -(0-100) = 100 & \text{(default, probability } p = 0.009)\,. \end{cases}$$

Setze $\alpha = 0.99$. Es gilt $P(L_i < -5) = 0$ und $P(L_i \le -5) = 0.991 > \alpha$ und daher $\mathrm{VaR}_\alpha(L_i) = -5$.

Betrachte nun $L = L_1 + L_2$, d.h. ein Portfolio, das je eine Anleihe jeder Firma enthält. Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Ausfälle folgt

$$L = \begin{cases} -10 & \text{(no default, probability } (1-p)^2 = 0.982) \\ -(105-200) = 95 & \text{(exactly 1 default, probability } 2p(1-p)\text{)} \\ 200 & \text{(2 defaults, probability } p^2) \end{cases}$$

Insbesondere ist $P(L \le -10) = 0.982 < 0.99$ und $P(L \le 95) > 0.99$ und somit $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = 95$. Daher ist VaR_α in diesem Beispiel nicht kohärent.

Probleme bei fehlender Subadditivität:

- Nicht subadditive Risikomaße können einen Anreiz schaffen, Konzentrationsrisiken einzugehen.
- Nicht subadditive Risikomaße können dazu führen, dass Einheiten eines Unternehmens künstlich, d.h. ohne ökonomischen oder organisatorischen Grund, unterteilt werden, um den Solvenzkapitalbedarf zu reduzieren.

Bemerkung. Es war nur ein Argument gefragt.

d)
- Die Translationsinvarianz ist erfüllt: Für $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\rho(X+c) = \mathbb{E}(X+c) + 2\sigma(X+c) = \mathbb{E}(X) + c + 2\sigma(X) = \rho(X) + c.$$

- Die positive Homogenität ist erfüllt: Für $c > 0$ gilt

$$\rho(cX) = \mathbb{E}(cX) + 2\sigma(cX) = c \cdot \mathbb{E}(X) + 2c \cdot \sigma(X) = c \cdot \rho(X).$$

- Sei $\varrho(X,Y)$ die Korrelation von X und Y. Wegen

$$\begin{aligned} \sigma^2(X+Y) &= Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\varrho(X,Y)\sigma(X)\sigma(Y) \\ &\le \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\sigma(X)\sigma(Y) = (\sigma(X) + \sigma(Y))^2 \end{aligned}$$

  haben wir

$$\rho(X+Y) = \mathbb{E}(X+Y) + 2\sigma(X+Y) \le \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + 2(\sigma(X) + \sigma(Y)) = \rho(X) + \rho(Y),$$

  so dass auch Subadditivität vorliegt.

- Die Monotonie ist verletzt, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt. Sei X gleichverteilt auf $[0,1]$ und $Y \equiv 1$. Dann gilt $X \le Y$ f.s. und $\rho(X) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.5 > 1 = \rho(Y)$.

e) Wir leiten zunächst außerhalb der Aufgabenstellung die angegebene Darstellung von κ her. Nach Voraussetzung ist F invertierbar. Ausgehend von den Definitionen der Risikomaße erhalten wir durch zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}
\kappa &= \lim_{\alpha\to 1}\frac{VaR_\alpha(X)}{ES_\alpha(X)} = \lim_{\alpha\to 1}\frac{F^{-1}(\alpha)(1-\alpha)}{\int_\alpha^1 F^{-1}(z)\,dz} \\
&= \lim_{\alpha\to 1}\frac{\frac{1-\alpha}{f(F^{-1}(\alpha))} - F^{-1}(\alpha)}{-F^{-1}(\alpha)} = 1 + \lim_{\alpha\to 1}\frac{\alpha-1}{f(F^{-1}(\alpha))F^{-1}(\alpha)} \\
&= 1 + \lim_{\alpha\to 1}\frac{1}{\frac{f'(F^{-1}(\alpha))F^{-1}(\alpha)}{f(F^{-1}(\alpha))}+1} \\
&= 1 + \lim_{\alpha\to 1}\frac{1}{(\ln f)'(F^{-1}(\alpha))F^{-1}(\alpha)+1}.
\end{aligned}$$

Im Falle der Standardnormalverteilung haben wir $\ln(f(x)) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}x^2$, also $(\ln f)'(x) = -x$. Daraus folgt $\kappa = 1$, d.h. Expected Shortfall und Value at Risk sind (für sehr hohe Konfidenzniveaus) asymptotisch äquivalent.

Im Falle der Verteilung aus Teilaufgabe a) haben wir $f(x) = 2x^{-3}$ für $x \geq 1$, woraus $\ln(f(x)) = \ln(2) - 3\ln(x)$, also $(\ln f)'(x) = -\frac{3}{x}$ folgt. Es folgt $\kappa = \frac{1}{2}$, d.h. der Expected Shortfall ist asymptotisch doppelt so hoch wie der Value at Risk.

Vor dem Hintergrund, dass die Normalverteilung light-tailed ist, während die Verteilung aus a) heavy-tailed ist, reflektieren die beiden Ergebnisse, dass der Value at Risk im Gegensatz zum Expected Shortfall den Tail einer Verteilung jenseits des Quantils ausblendet.

2. Simulation, Abhängigkeitsstrukturen.

a) Ziehe zunächst Zufallszahlen r_j, $j = 1, \ldots, 2000$, aus der Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Bezeichnet Φ die Standardnormalverteilungsfunktion, so sind

$$(\tilde{y}_{j1}, \tilde{y}_{j2}) := (\Phi^{-1}(r_j), \Phi^{-1}(r_{1000+j})), \quad j = 1, \ldots, 1000,$$

1000 Zufallsvektoren aus der zweidimensionalen Standardnormalverteilung und

$$(y_{j1}, y_{j2}) := (\tilde{y}_{j1}, 0,3 \cdot \tilde{y}_{j1} + \sqrt{1-(0,3)^2}\cdot \tilde{y}_{j2}), \quad j = 1, \ldots, 1000,$$

1000 Zufallsvektoren, die die Gauß-Copula C mit Parameter 0,3 und standardnormalverteilte Ränder haben; denn aufgrund der Unabhängigkeit von $\tilde{y}_{j1}$ und $\tilde{y}_{j2}$ haben wir $Cov(y_{j1}, y_{j2}) = 0,3$ und $Var(y_{j1}) = Var(y_{j2}) = 1$. Schließlich stellen

$$(x_{j1}, x_{j2}) := (-\ln(1-\Phi(y_{j1})), -\ln(1-\Phi(y_{j2}))), \quad j = 1, \ldots, 1000,$$

Zufallsvektoren aus der zweidimensionalen Verteilung mit Copula C und exponentialverteilten Rändern $Exp(1)$ dar. Dabei haben wir benutzt, dass die Inverse der Verteilungsfunktion von $Exp(1)$ gerade $F_{X_i}^{-1}(y) = -\ln(1-y)$ ist und die Copula unter streng monoton wachsenden Transformationen der Komponenten invariant bleibt.

b) Für die untere Fréchet-Schranke $C(u,v) = \max(0, u+v-1)$ berechnen wir Spearman's rho:

$$
\begin{aligned}
\varrho_S &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \max(0, u+v-1)\, du\, dv - 3 \\
&= 12 \int_0^1 \int_{1-v}^1 (u+v-1)\, du\, dv - 3 \\
&= 12 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-v)^2 + v^2 - v \right) dv - 3 \\
&= 6 \int_0^1 v^2\, dv - 3 \\
&= 2 - 3 = -1
\end{aligned}
$$

Alternativer Ansatz: $\rho_S = \mathrm{corr}(U, 1-U)$ für U gleichverteilt auf $[0,1]$ und direkte Berechnung.

c) Ist U gleichverteilt auf $[0,1]$, so auch $1-U$. U und $1-U$ sind countermonoton und haben daher Spearman's rho gleich -1. Ziehe Zufallszahlen u_j, $j = 1, \ldots, 1000$, aus der Gleichverteilung auf $[0,1]$. Dann sind $(u_j, 1-u_j)$, $j = 1, \ldots, 1000$, Zufallsvektoren aus der zweidimensionalen Verteilung, deren Verteilungsfunktion die untere Fréchet-Schranke ist. Bezeichnet Φ die Standardnormalverteilungsfunktion, so sind $(\Phi^{-1}(u_j), \Phi^{-1}(1-u_j))$, $j = 1, \ldots, 1000$, Zufallsvektoren aus der zweidimensionalen Verteilung mit standardnormalverteilten Rändern und der unteren Fréchet-Schranke als Copula. Diese Verteilung hat Spearman's rho gleich -1.

3. Bayesianische Statistik.

a) Gegeben λ beträgt die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kreditnehmers

$$\mathbb{P}(T_i \leq 1 \mid \lambda) = 1 - \exp(-\lambda).$$

Aufgrund der Annahme der bedingten Unabhängigkeit stellt die Anzahl X der ausgefallenen Kreditnehmer die Anzahl der Erfolge in einer n-fachen Wiederholung eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit $1 - \exp(-\lambda)$ dar, ist also binomialverteilt mit Parametern n und $1 - \exp(-\lambda)$.

b) Wir rechnen jeweils modulo einer Konstanten und nutzen bei der Identifikation der Ergebnisse aus, dass eine Dichte entsteht. Wir bezeichnen die a-priori Dichte mit $\pi(\lambda)$, die Beobachtungsdichte mit $f(x|\lambda)$ sowie die a-posteriori Dichte mit $\pi(\lambda|x)$. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\pi(\lambda|0) &\propto f(0|\lambda) \cdot \pi(\lambda) \\
&\propto \exp(-n\lambda) \cdot \lambda^{2-1} \cdot \exp(-\lambda) \\
&\propto \exp(-(n+1)\lambda) \cdot \lambda, \quad \lambda \geq 0.
\end{aligned}
$$

Dies ist eine Gamma Verteilung mit $\alpha = 2, \beta = n+1$. Ein möglicher Schätzer für Λ ist der Erwartungswert der a-posteriori-Verteilung. Dieser ist gegeben durch $2/(n+1)$.

c) Die Dichte von T_1 gegeben $\Lambda = \lambda$ ist $f_{T_1}(t|\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$. Damit gilt

$$\pi(\lambda|T_1) \propto f_{T_1}(t|\lambda) \cdot \pi(\lambda) \propto \lambda^2 e^{-\lambda(1+t)};$$

dies ist die Dichte einer Gamma Verteilung mit $\alpha = 3, \beta = 1 + t$.

d) Die Ausfallzeiten T_i, $i = 1, \ldots, n$, sind im Bayesianischen Modell nicht unabhängig, da der unbekannte Parameter Λ ein gemeinsamer Risikofaktor ist. Formal sieht man das etwa in der Rechnung

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \leq 1, T_2 \leq 1) &= \int \mathbb{P}(T_1 \leq 1, T_2 \leq 1 \mid \Lambda = \lambda)\pi(\lambda)\, d\lambda \\
&= \int_0^\infty (1 - \exp(-\lambda))^2 \pi(\lambda)\, d\lambda \\
&\geq \left(\int_0^\infty (1 - \exp(-\lambda))\pi(\lambda)\, d\lambda\right)^2 \\
&= \mathbb{P}(T_1 \leq 1) \cdot \mathbb{P}(T_2 \leq 1),
\end{aligned}$$

wobei wir die vorausgesetzte bedingte Unabhängigkeit, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und $\int_0^\infty \pi(\lambda)\, d\lambda = 1$ ausgenutzt haben.

Bemerkung. Die formale Rechnung war in der Aufgabenstellung nicht gefordert.

4. Zinsmodelle.

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden $\frac{1}{1+F(0,2,3)}$ Anteile eines Zerobonds mit Laufzeit $T = 2$ gekauft und eine Terminzinsvereinbarung über den Nominalbetrag $\frac{1}{1+F(0,2,3)}$ abgeschlossen, die den Austausch $F(0, 2, 3) - L(2, 3)$ von variablem Zins $L(2, 3)$ und festem Zins $F(0, 2, 3)$ für die Periode $[2, 3]$ beinhaltet.

Zum Zeitpunkt $t = 2$ ermöglicht die Auszahlung des Zerobonds den Kauf von $\frac{1}{(1+F(0,2,3))P(2,3)}$ Zerobonds mit Fälligkeit $T = 3$.

Zum Zeitpunkt $t = 3$ erhalten wir insgesamt die Auszahlung

$$\frac{1}{1 + F(0, 2, 3)} \left(\frac{1}{P(2, 3)} + F(0, 2, 3) - L(2, 3)\right) = 1,$$

da $L(2, 3) = \frac{1-P(2,3)}{P(2,3)}$ ist.

Der Preis der Terminzinsvereinbarung ist 0. Die erworbenen Anteile des Zerobonds mit Laufzeit $T = 2$ kosten zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\frac{1}{1 + F(0, 2, 3)} \cdot P(0, 2) = \frac{1}{\frac{P(0,2)}{P(0,3)}} \cdot P(0, 2) = P(0, 3).$$

b) Die Auszahlung eines Caplets mit Strike K zum Zeitpunkt t ist

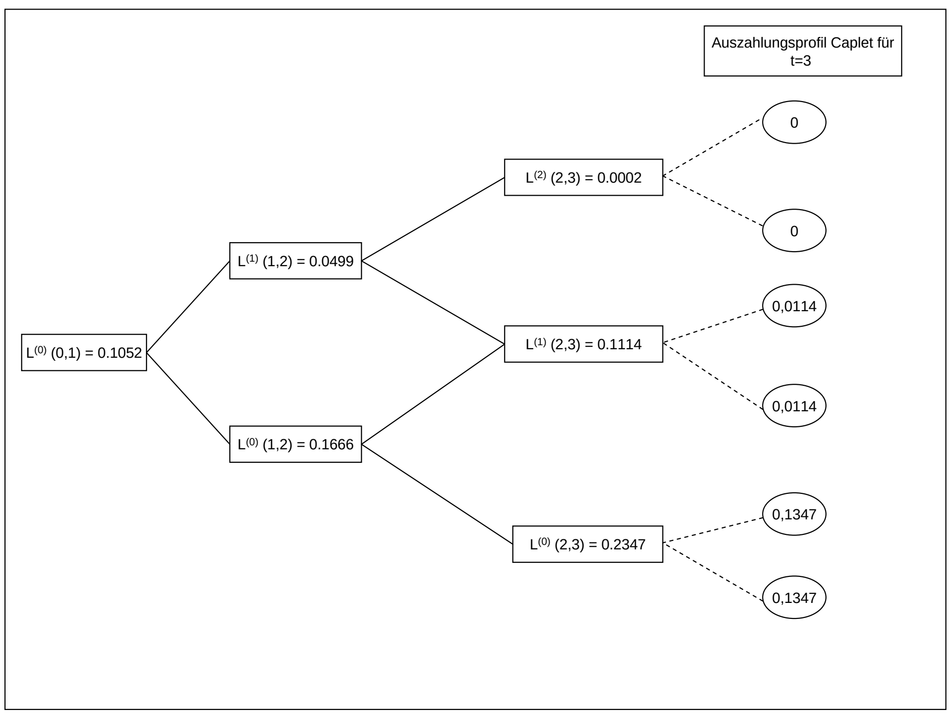
$$(L^{(i)}(t - 1, t) - K)^+$$

mit dem variablen Zins

$$L^{(i)}(t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P^{(i)}(t,T)} - 1\right).$$

Wir erhalten für den Preis P des Caplets mit Auszahlungszeitpunkt $t = 3$:

$$\begin{aligned} P &= \Big[(0,0114 \cdot 0,5 + 0,0114 \cdot 0,5) \cdot P^{(1)}(2,3) \cdot (0,5 \cdot P^{(0)}(1,2) + 0,5 \cdot P^{(1)}(1,2)) \\ &\quad + (0,1347 \cdot 0,5 + 0,1347 \cdot 0,5) \cdot P^{(0)}(2,3) \cdot 0,5 \cdot P^{(0)}(1,2)\Big] \cdot 0,5 \cdot P^{(0)}(0,1) \\ &= 0,0254 \end{aligned}$$



5. Risk-Integration.

a) Verwendet man die Gauss copula C_ρ^{Ga} zur Konstruktion eines mathematischen Modells, so ergibt sich für die gemeinsame Verteilung

$$F(l_1, l_2) = C_\rho^{\mathrm{Ga}}(F_1(l_1), F_2(l_2))$$

mit $F_1(l) = \Phi\big((l-\mu)/\sigma\big)$, $F_2 = \Phi\big((\ln l - \mu)/\sigma\big)$ und Φ der VF der Standardnormalverteilung. Für die Gauss-copula ergibt sich folgende explizite Formel

$$C_\rho^{\mathrm{Ga}}(u_1, u_2) == \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{ \frac{-(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)} \right\} ds_1\, ds_2.$$

Zur Simulation verwendet man die inverse Aussage von Sklars Theorem:

- Schritt 1. Simuliere Z_1, Z_2 unabhängig, $\sim N(0,1)$ und setze $X_1 = Z_1$, $X_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2$. Dann ist $\mathbf{U} = (\Phi(X_1), \Phi(X_2))'$ gemäß C_ρ^{Ga}-verteilt.
- Schritt 2. Setze $\mathbf{L} = (F_1^{-1}(U_1), F_2^{-1}(U_2))'$.

b) Die einfachste Methode zur Schätzung von ρ basiert auf Kendall's τ. Es gilt $\rho_\tau(L_1, L_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho$. Ein Momentenschätzer für ρ_τ ist Kendall's Rangkorrelationskoeffizient. Für die gegebenen 10 Beobachtungen erhält man

$$\hat{\rho}_\tau = \binom{10}{2}^{-1} \sum_{1 \le n < m \le 10} \operatorname{sign}((L_{n,1} - L_{m,1})(L_{n,2} - L_{m,2}))$$

Alternativ können natürlich auch Maximum Likelihood Methoden verwendet werden.

c) Vorteile des Ansatzes: Man hat ein mathematisch konsistentes Modell und eine prinzipienbasierte Methode zur Bestimmung der Gesamtverlustverteilung und des aggregierten Risikokapitals.

Nachteil: Die Ergebnisse (Gesamtkapital und Kapitalallokation) hängen natürlich von der Wahl der copula und ihrer Parameter ab, so dass der skizzierte Aggregationsansatz ein substantielles Modellrisiko beinhaltet.

6. Kreditrisiko. Die Auszahlung der Anleihe kann in zwei Teile zerlegt werden. Falls kein Ausfall eintritt, so erhält man den Nennwert; der Preis dieses survival claims ist (mit $T = 1$)

$$E^Q(e^{-rT} 1_{\{\tau > T\}}) = e^{-rT} Q(\tau > T) = e^{-(r+\gamma)T}.$$

Der Preis des recovery payments ist

$$E^Q\Big(0.5 e^{-r\tau} 1_{\{\tau \le T\}}\Big) = 0.5 \int_0^T e^{-rt} \gamma e^{-\gamma t} dt = 0.5 \frac{\gamma}{r+\gamma} \big(1 - e^{-(r+\gamma)T}\big).$$

Die Ausfallintensität γ wurde aus Marktpreisen kalibriert und ist daher eine risikoneutrale Größe, während zur VaR Bestimmung (statistisch bestimmte) Parameter der Verlustverteilung unter dem historischen Maß herangezogen werden sollten.