DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

CERA - Klausur
Quantitative Methoden des ERM

13.05.2011

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **120**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **48** Punkte erreicht werden.

Aufgaben

1. Risikomaße, Komonotonie. (20 Punkte)
Die Zufallsgrößen X und Y seien komonoton. Die Verteilungsfunktion F von X lautet

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2}; & \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion G von Y lautet

$$G(y) = \begin{cases} 0 & ; \quad y < 1 \\ 1 - \frac{1}{y^3}; & \quad y \geq 1. \end{cases}$$

a) (5 Punkte) Definieren Sie Komonotonie und geben Sie eine ökonomische Interpretation an.

b) (8 Punkte) Berechnen Sie Value at Risk und Expected Shortfall von Y zum Niveau 0,999. (Erinnerung: $\mathrm{ES}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_z(Y)\,dz$.)

c) (5 Punkte) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion H des Zufallsvektors (X, Y).

d) (2 Punkte) Stellen Sie das obere partielle Moment 2. Ordnung von $X + Y$ zur Schwelle 5 als Integral bezüglich der gemeinsamen Verteilungsfunktion H von (X, Y) dar.

2. Risikomaße und multivariate Modellierung (20 Punkte)

a) (10 Punkte) Zeigen Sie anhand eines selbstgewählten Beispiels, dass der Value at Risk im Allgemeinen nicht subadditiv ist. Diskutieren Sie kurz die Relevanz der Subadditivität für praktische Anwendungen.

b) (10 Punkte) Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)'$ sei multivariat normalverteilt. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Risikopositionen der Form $L = \sum_{i=1}^d \lambda_i X_i$. Zeigen Sie, dass für $\alpha > 0.5$ VaR_α kohärent ist auf $\mathcal{M}$.

3. Bayesianische Statistik. (15 Punkte) Seien $X \sim Pois(\lambda)$ und $\lambda \sim Gamma(2,1)$.
Hinweis. Die Dichte der Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ lautet

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x) 1_{(0,\infty)}(x).$$

a) (9 Punkte) Leiten Sie die a-posteriori Verteilung des Parameters und die Randverteilung von X her.

b) (6 Punkte) Wir testen $H_0 : \lambda \leq 1$ gegen $H_1 : \lambda > 1$. Geben Sie für die Beobachtung $x = 1$ die a-posteriori Wahrscheinlichkeit für H_0 und die Testentscheindung unter der gewichteten 0-1 Verlustfunktion an.

4. Copulas. (15)

a) (8 Punkte) Die bivariate Pareto-Verteilung hat die Überlebensfunktion

$$\bar{F}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\beta_1} + \frac{x_2}{\beta_2} + 1\right)^{-\alpha} \text{ für } x_1, x_2, \alpha, \beta_1, \beta_2 > 0\,.$$

Berechnen Sie die zugehörige Überlebenscopula $\hat{C}$, d.h. die copula mit der Eigenschaft, dass

$$\bar{F}(x_1, \ldots, x_d) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \ldots, \bar{F}_d(x_d)).$$

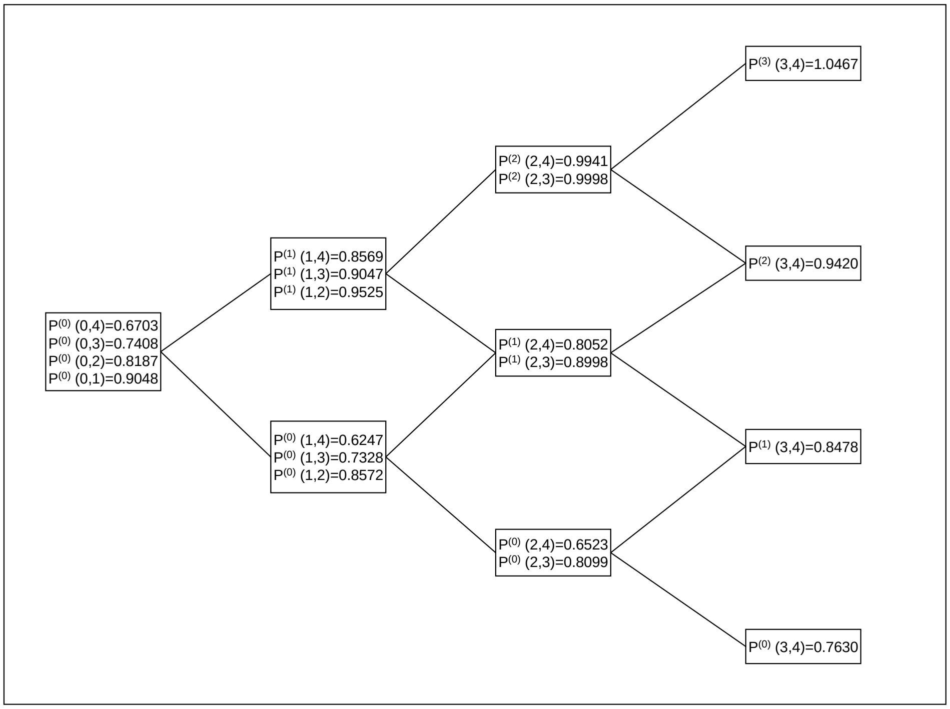
b) (7 Punkte) Definieren Sie für zwei Zufallsvariablen X_1 and X_2 mit stetiger Randverteilung den Koeffizient der lower tail dependence λ_l. Begründen Sie, dass λ_l mit Hilfe der copula von X_1 und X_2 ausgedrückt werden kann. Warum ist tail dependence potentiell wichtig bei der Messung von Finanzrisiken?

5. Risk Integration. (18 Punkte) Betrachten Sie eine Versicherung mit zwei business lines (Investment und underwriting), deren Verlust (negative P& L) durch die Zufallsvariablen L_i, $i = 1, 2$ gegeben ist. Jede business line hat ein eigenes Risikomanagement-System und es sei bekannt, dass $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und dass $L_2 \sim LN(\mu_2, \sigma_2^2)$ (d.h. $\ln L_2$ ist $N(\mu_2, \sigma_2^2)$-verteilt). Allerdings gibt es kein firmenweites Risikomanagementmodell, so dass die Verteilung von $\mathbf{L} = (L_1, L_2)$ nicht bekannt ist.

a) (8 Punkte) (Konstruieren Sie mit Hilfe der Gauss copula mit Parameter ρ ein konsistentes Modell für die Verteilungsfunktion F von $\mathbf{L}$ und beschreiben Sie einen Algorithmus, um Datenpunkte gemäß F zu simulieren.

b) (6 Punkte) Diskutieren Sie eine Methode zur Schätzung von ρ, falls Beobachtungen $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_{10}$ aus den letzten 10 Jahren zur Verfügung stehen.

c) (4 Punkte) Führen Sie kurz einige Vor- und Nachteile des in a) und b) beschriebenen Ansatzes zur Risikoaggregation auf.



6. Zinsmodelle. (14 Punkte) Betrachten Sie den obigen Baum der Diskontierungsfaktoren $P^{(i)}(t,T)$ in einem Ho-Lee-Modell, wobei der obere Index (i) die Anzahl der bisherigen Aufwärtsbewegungen und $[t,T]$ das Zeitintervall der Diskontierung angibt. Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung beträgt $\pi = 0.5$.
Berechnen Sie zum Zeitpunkt 0 den Preis eines Caplets mit Auszahlungszeitpunkt $t = 3$ und Strike 0.10.

7. Kreditrisiko. (18 Punkte)

a) (10 Punkte) Beschreiben Sie die Modellierung des Konkurses einer Firma im Merton-Modell. Zeigen Sie, dass sich der Preis einer Firmenanleihe als Preis eines ausfallfreien Bonds abzüglich einer Put-Option darstellen lässt und bewerten Sie die Firmenanleihe mit der Black-Scholes Formel. Wie wirkt sich eine Erhöhung der Volatilität des Firmenwerts auf den Preis der Firmenanleihe aus? Diskutieren Sie ökonomische Implikationen.

b) (8 Punkte) Betrachten Sie ein einfaches Kreditrisikomodell in reduzierter Form mit konstanter Zinsrate $r > 0$ und konstanter hazard-rate $\gamma > 0$ (unter dem zur Bewertung verwendeten risikoneutralen Maß Q. Geben Sie in Abhängigkeit von r und γ den Preis in $t = 0$ einer ausfallbehafteten Anleihe mit Nennwert 1 an. Nehmen Sie dabei an, dass im Fall eines Konkurses zum Zeitpunkt $\tau \leq T$ ein Betrag von 0.5 direkt in τ an den Halter der Anleihe ausgezahlt wird.

DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

Lösungen

1. Risikomaße, Komonotonie.

a) Zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind komonoton, falls es eine Zufallsvariable Z und wachsende Funktionen v_1, v_2 mit $X_i = v_i(Z)$, $i = 1, 2$, gibt. Komonotonie stellt eine perfekte Abhängigkeit dar; insbesondere ist bei komonotonen Risiken keine Diversifikation möglich.

b) Die Gleichung

$$1 - \frac{1}{(\mathrm{VaR}_{0,999}(Y))^3} = 0,999$$

führt auf den Value at Risk $\mathrm{VaR}_{0,999}(Y) = 10$. Der Expected Shortfall ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_{0,999}(Y) &= \frac{1}{1-0,999}\int_{0,999}^{1} \mathrm{VaR}_z(Y)\,dz \\
&= 1000 \cdot \int_{0,999}^{1} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{1/3} dz \\
&= 1500 \cdot [-(1-z)^{2/3}]_{0,999}^{1} \\
&= 15.
\end{aligned}$$

c) Wegen der Komonotonie hat der Zufallsvektor (X, Y) die Copula $C(u, v) = \min(u, v)$, so dass wir die gemeinsame Verteilungsfunktion

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{y^3}; & x^2 > y^3 \\ 1 - \frac{1}{x^2}; & x^2 \leq y^3 \end{cases}$$

erhalten.

d) Das obere partielle Moment 2. Ordnung von $X + Y$ zur Schwelle 5 ist gegeben durch

$$\mathrm{UPM}_{2,5}(X+Y) = \int_1^\infty \int_1^\infty (x+y-5)^2 \cdot 1_{[5,\infty)}(x+y)\,dH(x,y).$$

2. Risikomaße, multivariate Modelle. **a)** Hier gibt es viele Möglichkeiten. Im folgenden betrachten wir zwei ausfallbehaftete Anleihen mit unabhängigem default und identischer Ausfallwahrscheinlichkeit von $p = 0.9\%$. Der heutige Preis der Anleihen sei gleich 100, der Nennwert sei 105, und die recovery rate sei gleich Null. Sei L_i der 'Verlust' (negative P&L) von Anleihe i. Es gilt e

$$L_i = \begin{cases} -(105-100) = -5 & \text{(no default, probability } 1-p = 0.991) \\ -(0-100) = 100 & \text{(default, probability } p = 0.009)\,. \end{cases}$$

Setze $\alpha = 0.99$. Es gilt $P(L_i < -5) = 0$ und $P(L_i \leq -5) = 0.991 > \alpha$ und daher t $\mathrm{VaR}_\alpha(L_i) = -5$.

Betrachte nun $L = L_1 + L_2$, d.h. ein Portfolio das je eine Anleihe jeder Firma enthält. Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Ausfälle folgt

$$L = \begin{cases} -10 & \text{(no default, probability } (1-p)^2 = 0.982) \\ -(105-200) = 95 & \text{(exactly 1 default, probability } 2p(1-p)\text{)} \\ 200 & \text{(2 defaults, probability } p^2) \end{cases}$$

Insbesondere ist $P(L \leq -10) = 0.982 < 0.99$ und $P(L \leq 95) > 0.99$ und somit $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = 95$ Daher ist VaR_α in diesem Beispiel nicht kohärent.
Subadditivität eines Risikomaßes ist insbesondere wesentlich wenn risk taker (Händler/underwriter) gemäß risikoadjustierten Performance-Maßen bewertet werden und wenn gleichzeitig mit sehr schiefen Verlustverteilungen operiert wird. Ein nicht-subadditives Maß kann in solchen Situationen zu 'optimalen' (aus Sicht des risk takers) Portfolien führen, die hohe Konzentrationsrisiken aufweisen. Wichtig ist Subadditivität auch bei limit-Systemen.
b) Sei $L_1 = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^1 X_j$ und analog für L_2, und sei $L = L_1 + L_2$ Es gilt $L_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1,2$ und $L \sim N(\mu_L, \sigma_L^2)$ (hier verwendet man, dass Linearkombinationen von multivariat normalverteilten Zufallsvariablen wieder multivariat normal sind). Es gilt offensichtlich $\mu_L = \mu_1 + \mu_2$ und

$$\sigma_L^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leq (\sigma_1 + \sigma_2)^2$$

Hier bezeichnet $\rho \in [-1,1]$ die Korrelation zwischen L_1 und L_2. Es folgt $\mathrm{VaR}_\alpha(L_i) = \mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(\alpha)$ und somit wegen $\phi^{-1}(\alpha) > 0$ (da $\alpha > 0.5$)

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu_L + \sigma_L \phi^{-1}(\alpha) \leq \mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 + \sigma_2)\phi^{-1}(\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$$

3. Bayesianische Statistik.

a) Wir rechnen jeweils modulo einer Konstanten und nutzen bei der Identifikation der Ergebnisse aus, dass eine Dichte entsteht. Wir bezeichnen die a-priori Dichte mit $\pi(\lambda)$, die Beobachtungsdichte mit $f(x|\lambda)$, die Randverteilungsdichte mit $m(x)$ sowie die a-posteriori Dichte mit $\pi(\lambda|x)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \pi(\lambda|x) &= \frac{f(x|\lambda)\pi(\lambda)}{m(x)} \\ &\propto f(x|\lambda)\pi(\lambda) \\ &\propto \lambda^x \exp(-\lambda)\lambda^{2-1}\exp(-\lambda) \\ &= \lambda^{1+x}\exp(-2\lambda) \\ &\propto \frac{2^{2+x}}{\Gamma(2+x)}\lambda^{(2+x)-1}\exp(-2\lambda) \end{aligned}$$

Die a posteriori Verteilung ist also $\mathrm{Gamma}(2+x, 2)$.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

Für die Randverteilung $m(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{f(x|\lambda)\pi(\lambda)}{\pi(\lambda|x)} \\ &= \frac{1}{x!\Gamma(2)} \Big/ \frac{2^{2+x}}{\Gamma(2+x)} \\ &= \frac{\Gamma(2+x)}{x!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2+x}. \end{aligned}$$

b) Da $\lambda|x$ a posteriori Gamma$(2+x, 2)$-verteilt ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\pi}(\lambda \in H_0 \mid x = 1) &= \int_0^1 \frac{2^3}{\Gamma(3)} \lambda^2 \exp(-2\lambda)\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \lambda^2 \exp(-\lambda)\, d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(2,3)}{2}, \end{aligned}$$

wobei $\Gamma(z, \alpha) = \int_0^z \lambda^{\alpha-1} \exp(-\lambda)\, d\lambda$ die unvollständige Gammafunktion bezeichnet. Unter der gewichteten Verlustfunktion

$$L(\theta, \varphi) = \begin{cases} 0\ ; & \varphi = 1_{H_0}(\theta) \\ a_0; & \theta \in H_0,\ \varphi = 0 \\ a_1; & \theta \in H_1,\ \varphi = 1 \end{cases}$$

erhalten wir die Testentscheidung

$$\varphi^{\pi}(1) = 1_{\left(\frac{a_1}{a_0+a_1}, \infty\right)} \left(\frac{\Gamma(2,3)}{2}\right),$$

wobei $\varphi^{\pi}(1) = 1$ Annahme von H_0 bzw. $\varphi^{\pi}(1) = 0$ Ablehnung von H_0 aufgrund der Beobachtung $x = 1$ bedeuten.

4. Copulas.

a) Wir verwenden die Formel

$$\hat{C}(u_1, \ldots, u_d) = \bar{F}(\bar{F}_1^{-1}(u_1), \ldots, \bar{F}_d^{-1}(u_d)).$$

Eine direkte Rechnung liefert $F_i^{-1}(u) = \beta_i(u^{-\frac{1}{\alpha}} - 1)$. Einsetzen ergibt

$$\hat{C}(u_1, u_2) = (u_1^{-1/\alpha} + u_2^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha};$$

dies ist die Clayton copula mit Parameter $\theta = \frac{1}{\alpha}$.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

b) Der Koeffizient der lower tail dependence des Zufallsvektors $(X_1, X_2)'$ ist

$$\begin{aligned}\lambda_l(X_1, X_2) &= \lim_{q \to 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(q) \mid X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q)) \\ &= \lim_{q \to 0^+} \frac{C(q,q)}{q}\end{aligned}$$

nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. Lower tail dependence ist ein Indikator für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von gemeinsamen Extremereignissen im linken tail der Verteilung.

5. Risk-Integration.

a) Verwendet man die Gauss copula C_ρ^{Ga} zur Konstruktion eines mathematischen Modells, so ergibt sich für die gemeinsame Verteilung

$$F(l_1, l_2) = C_\rho^{\mathrm{Ga}}(F_1(l_1), F_2(l_2))$$

mit $F_1(l) = \Phi\big((l-\mu)/\sigma\big)$, $F_2 = \Phi\big((\ln l - \mu)/\sigma\big)$ und Φ der VF der Standardnormalverteilung. Für die Gauss-copula ergibt sich folgende explizite Formel

$$C_\rho^{\mathrm{Ga}}(u_1, u_2) == \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{ \frac{-(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)} \right\} ds_1\, ds_2.$$

Zur Simulation verwendet man die inverse Aussage von Sklars Theorem:

- Schritt 1. Simuliere Z_1, Z_2 unabhängig, $\sim N(0,1)$ und setze $X_1 = Z_1$, $X_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2$. Dann ist $\mathbf{U} = (\Phi(X_1), \Phi(X_2))'$ gemäß C_ρ^{Ga}-verteilt.
- Schritt 2. Setze $\mathbf{L} = (F_1^{-1}(U_1), F_2^{-1}(U_2))'$.

b) Die einfachste Methode zur Schätzung von ρ basiert auf Kendall's τ. Es gilt $\rho_\tau(L_1, L_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho$. Ein Momentenschätzer für ρ_τ ist Kendall's Rangkorrelationskoeffizient. Für die gegebenen 10 Beobachtungen erhält man

$$\hat{\rho}_\tau = \binom{10}{2}^{-1} \sum_{1 \leq n < \leq m \leq q 10} \operatorname{sign}((L_{n,1} - L_{m,1})(L_{n,2} - L_{m,2}))$$

Alternativ können natürlich auch Maximum Likelihood Methoden verwendet werden.

c) Vorteile des Ansatzes: Man hat ein mathematisch konsistentes Modell und eine Prinzipienbasierte Methode zur Bestimmung der Gesamtverlustverteilung und des aggregierten Risikokapitals.

Nachteil: Die Ergebnisse (Gesamtkapital und Kapitalallokation) hängen natürlich von der Wahl der copula und ihrer Parameter ab so dass der skizzierte Aggregationsansatz ein substantielles Modellrisiko beinhaltet.

Prof. Dr. Rüdiger Frey
Prof. Dr. Jochen Wolf

6. Zinsmodelle. Die Auszahlung eines Caplets mit Strike K zum Zeitpunkt t ist

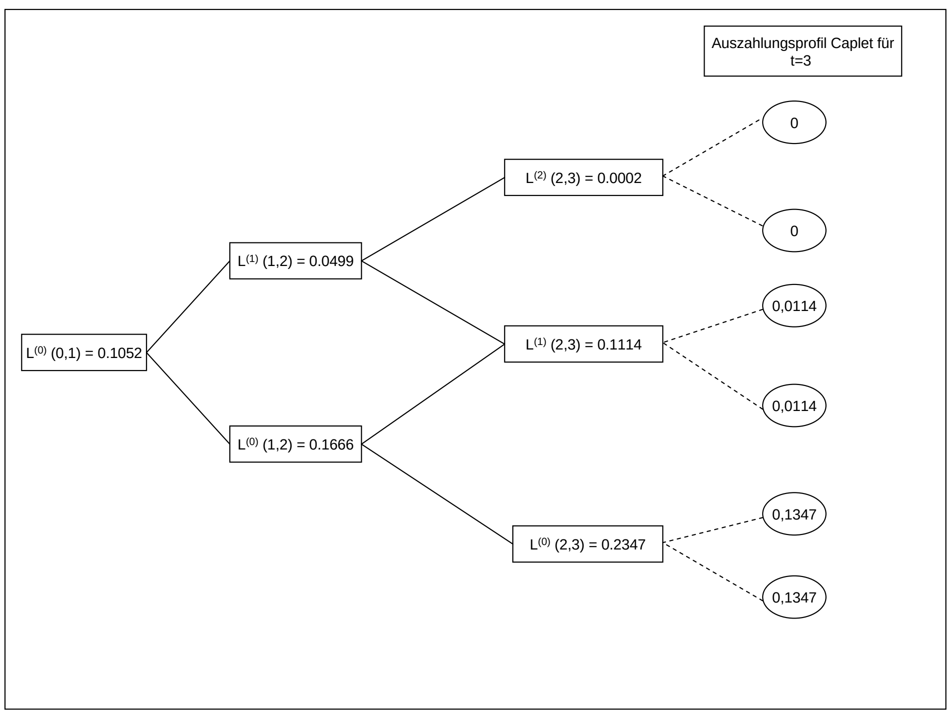
$$(L^{(i)}(t-1,t)-K)^+$$

mit dem variablen Zins

$$L^{(i)}(t,T)=\frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P^{(i)}(t,T)}-1\right).$$

Wir erhalten für den Preis P des Caplets mit Auszahlungszeitpunkt $t=3$:

$$\begin{aligned} P &= \Big[(0,0114\cdot 0,5+0,0114\cdot 0,5)\cdot P^{(1)}(2,3)\cdot(0,5\cdot P^{(0)}(1,2)+0,5\cdot P^{(1)}(1,2)) \\ &\quad + (0,1347\cdot 0,5+0,1347\cdot 0,5)\cdot P^{(0)}(2,3)\cdot 0,5\cdot P^{(0)}(1,2)\Big]\cdot 0,5\cdot P^{(0)}(0,1) \\ &= 0,0254 \end{aligned}$$



7. Kreditrisiko.

a) In Merton's Modell tritt der Ausfall der betrachteten Firma im Zeitpunkt T ein, falls der Wert V_T der assets kleiner als der Nennwert B der Verbindlichkeiten ist. Man erhält für den Wert der Firmenanleihe bei Fälligkeit, dass

$$B_T=\min(V_T,B)=B-(B-V_T)^+.$$

Unter den Annahmen des Merton-Modells folgt für den Preis in $t < T$,

$$B_t = Bp_0(t,T) - P^{\mathrm{BS}}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T),$$

wobei der Preis eines Europ. Puts im Black-Scholes Modell gegeben ist durch

$$P^{\mathrm{BS}}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) = Be^{-r(T-t)}\Phi(-d_{t,2}) - V_t\Phi(-d_{t,1}),$$

Vereinfachen liefert $B_t = p_0(t,T)B\Phi(d_{t,2}) + V_t\Phi(-d_{t,1})$.

Der Preis des Bonds ist fallend in σ. Dies ist sinnvoll, da eine höhere Volatilität zu einer höheren Ausfallwahrscheinlichkeit führt, und da die bondholder an dem upside potential höherer Volatilität nicht partizipieren, denn die maximal mögliche Auszahlung ist durch B beschränkt.

b) Die Auszahlung der Anleihe kann in zwei Teile zerlegt werden. Falls kein Ausfall eintritt so erhält man den Nennwert; der Preis dieses survival claims ist (mit $T = 1$)

$$E^Q(e^{-rT}1_{\{\tau > T\}}) = e^{-rT}Q(\tau > T) = e^{-(r+\gamma)T}\,.$$

Der Preis des recovery payments ist

$$E^Q\Big(0.5e^{-r\tau}1_{\{\tau \le T\}}\Big) = 0.5\int_0^T e^{-rt}\gamma e^{-\gamma t}dt = 0.5\frac{\gamma}{r+\gamma}\big(1 - e^{-(r+\gamma)T}\big).$$