Zulassungsprüfung Stochastik, 10.10.14

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ aus. Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1 (20 Punkte)
Sei $p \in (0,1)$ und μ das Maß mit

$$\mu(A) := p1_A(0) + (1-p)1_A(1) \text{ für alle } A \in \mathcal{B}.$$

(a) Beweisen Sie für alle messbaren $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$:

$$\int g \, d\mu = pg(0) + (1-p)g(1).$$

Hinweis: Beweisen Sie die Darstellung zunächst für Treppenfunktionen.

(b) Besitzt μ eine Lebesgue-Dichte? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (17 Punkte)
Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit $P(X < 3) = 0,1587$ und $P(X > 12) = 0,0228$. Bestimmen Sie $P(0 < X \leq 9)$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Λ. Dabei sei $\Lambda \sim \Gamma(\alpha, 1)$ mit $\alpha > 1$, und bei gegebenem $\Lambda = \lambda$ sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
Folgende Eigenschaften der Gammafunktion sind für die Lösung der Aufgabe nützlich. Für $a, b > 0$ gilt

$$\int_0^\infty t^{a-1} e^{-tb} \, dt = \frac{\Gamma(a)}{b^a} \textit{ und } \Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

(a) Zeigen Sie, dass die gemeinsame Verteilung von X und Λ die Dichte $f(x, \lambda) = \dfrac{\lambda^\alpha e^{-\lambda(x+1)}}{\Gamma(\alpha)}$, $x, \lambda > 0$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung von Λ unter X die Dichte

$$f_{\Lambda|X}(\lambda|x) = \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda(x+1)}(x+1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad x, \lambda > 0$$

besitzt, und bestimmen Sie daraus $E(\Lambda|X)$.

Aufgabe 4 (18 Punkte) Sei $\alpha > 0$ und X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1+x)^{-\alpha} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie einen ML-Schätzer $\hat{\alpha}$ von α für unabhängige und identisch verteilte $X_1, \ldots, X_n \sim X$.

(b) Bestimmen Sie den ML-Schätzwert $\hat{\alpha}$ von α für die folgende Stichprobe:

$$0,6 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,5 \quad 1,2.$$

(c) Bestimmen Sie die Verteilung von $\ln(1+X)$ und daraus die Verteilung von $\sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i)$.

Aufgabe 5 (15 Punkte)
Im Rahmen einer Studie über die Wirkung frühkindlicher Erziehung auf den Intelligenzquotienten (IQ) wird vermutet, dass der durchschnittliche IQ über 100 liegt. Zur Überprüfung werden 25 Kinder zufällig ausgewählt und der IQ gemessen. Es ergab sich ein durchschnittlicher IQ von 105.

(a) Überprüfen Sie zum Niveau $\alpha = 0,05$ die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 100$ gegen die Alternative $H_1 : \mu > 100$. Gehen Sie davon aus, dass der IQ normalverteilt ist und die Standardabweichung mit $\sigma = 15$ aus Erfahrung bekannt ist.

(b) Was sagt der Fehler 1. Art aus?

(c) Bestimmen Sie ein 95 %-Schätzintervall für den durchschnittlichen IQ.

(d) Sei I das Schätzintervall aus (c). Gilt $100 \in I$? Kommentieren Sie dies im Vergleich zum Ergebnis von (a).

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 [(a) 12 Punkte, (b) 8]

Zu (a)

Sei zunächst g eine Treppenfunktion, also $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int g\, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int 1_{A_i}\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(p 1_{A_i}(0) + (1-p) 1_{A_i}(1) \right) \\ &= p \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(0) + (1-p) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(1) = p g(0) + (1-p) g(1).\end{aligned}$$

Sei nun $g \geq 0$ messbar. Dann gibt es eine monoton steigende Folge von Treppenfunktionen $g_n \geq 0$ mit $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Da g_n Treppenfunktionen sind, gilt

$$\int g_n\, d\mu = p g_n(0) + (1-p) g_n(1).$$

Nach Voraussetzung gilt für die rechte Seite

$$\lim_{n\to\infty} \left(p g_n(0) + (1-p) g_n(1) \right) = p g(0) + (1-p) g(1)$$

Laut Satz von der monotonen Konvergenz gilt für die linke Seite

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \int g\, d\mu,$$

also die Behauptung.
Zu (b)
Für $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mu\left((-\infty, r]\right) = p 1_{(-\infty,r]}(0) + (1-p) 1_{(-\infty,r]}(1) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ p & r \in [0,1) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

wegen

$$\begin{aligned} 1_{(-\infty,r]}(0) &= 1 \Longleftrightarrow 0 \in (-\infty, r] \Longleftrightarrow r \geq 0 \\ 1_{(-\infty,r]}(1) &= 1 \Longleftrightarrow 1 \in (-\infty, r] \Longleftrightarrow r \geq 1. \end{aligned}$$

Würde μ eine Dichte besitzen, dann wäre die Funktion $r \longmapsto \mu\left((-\infty, r]\right)$ stetig, was aber nicht der Fall ist. Also besitzt μ keine Dichte.
Aufgabe 2 [17]
Es gilt

$$
\begin{aligned}
P(X<3) =&P(X\le 3)=\Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{\mu-3}{\sigma}\right)=0,1587\Longrightarrow\\
\Phi\left(\frac{\mu-3}{\sigma}\right) =&0,8413\Longrightarrow\frac{\mu-3}{\sigma}=1\Longrightarrow\mu=3+\sigma \qquad (1)\\
P(X>12) =&1-P(X\le 12)=1-\Phi\left(\frac{12-\mu}{\sigma}\right)=0,0228\Longrightarrow\\
\Phi\left(\frac{12-\mu}{\sigma}\right) =&0,9772\Longrightarrow\frac{12-\mu}{\sigma}=2\Longrightarrow 2\sigma=12-\mu \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(1) in (2) eingesetzt ergibt $\sigma=3$ und mit (1) $\mu=6$. Mit diesen Werten folgt

$$
\begin{aligned}
P(0<X\le 9) &= P(X\le 9)-P(X\le 0)=\Phi\left(\frac{9-6}{3}\right)-\Phi\left(\frac{0-6}{3}\right)\\
&= \Phi(1)-(1-\Phi(2))=0,8413-1+0,9772=0,8185.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 [(a) 7, (b) 8+5]
Zu (a)
Laut Voraussetzung gilt

$$
\begin{aligned}
f(x|\lambda) &= \lambda e^{-\lambda x}, \quad x,\lambda>0\\
f(x|\lambda) &= \frac{f(x,\lambda)}{f_\Lambda(\lambda)}
\end{aligned}
$$

wobei f_Λ die Dichte von Λ ist. Damit folgt für $x,\lambda>0$

$$
f(x,\lambda)=f(x|\lambda)f_\Lambda(\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda(x+1)}}{\Gamma(\alpha)}.
$$

Zu (b) Die Dichte f_X von X ist gegeben durch

$$
f_X(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x,\lambda)\,d\lambda=\int_{\mathbb{R}}\frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda(x+1)}}{\Gamma(\alpha)}\,d\lambda=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(x+1)^{\alpha+1}}=\frac{\alpha}{(x+1)^{\alpha+1}}.
$$

Die letzten beiden Gleichungen ergeben sich aus dem Hinweis.
Die Behauptung folgt sofort aus $f_{\Lambda|X}(\lambda|x)=\dfrac{f(x,\lambda)}{f_X(x)}$. Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
E(\Lambda|X=x) &= \int_0^\infty \lambda f_{\Lambda|X}(\lambda|x)\,d\lambda\\
&= \frac{(x+1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty \lambda^{\alpha+1}e^{-\lambda(x+1)}\,d\lambda\\
&= \frac{(x+1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{(x+1)^{\alpha+2}}\\
&= \frac{\alpha+1}{x+1}
\end{aligned}
$$

also insgesamt $E(\Lambda|X)=\dfrac{\alpha+1}{X+1}$.

Bemerkung: *Die bedingte Verteilung von Λ unter X ist die $\Gamma(\alpha+1, x+1)$-Verteilung wie man aus der Dichte sofort erkennt und somit* $E(\Lambda|X) = \dfrac{\alpha+1}{X+1}$.

Aufgabe 4 [(a) 10, (b) 3, (c) 5]
Zu (a)
Für die Dichte f von X gilt

$$f(x) = F'(x) = \alpha(x+1)^{-(\alpha+1)}$$

Damit folgt für eine unabhängige Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned}
L(\alpha) &= \prod_{i=1}^{n} \alpha(1+x_i)^{-(\alpha+1)} && \text{(Likelihood)} \\
\ell(\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} (\ln\alpha - (\alpha+1)\ln(1+x_i)) && \text{(Log-Likelihood)} \\
&= n\ln\alpha - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i) \\
\ell'(\alpha) &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i) \\
\ell''(\alpha) &= -\frac{n}{\alpha^2} < 0.
\end{aligned}$$

Nullsetzen der ersten Ableitung ergibt

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(X_i+1)}.$$

Zu (b)

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{5}\left(\ln(1,6) + \ln(1,2) + \ln(1,3) + \ln(1,5) + \ln(2,2)\right)\right)^{-1} = 2,37.$$

Zu (c)
Sei $y > 0$. Wegen

$$\begin{aligned}
P(\ln(X+1) \leq y) &= P(X+1 \leq e^y) = P(X \leq e^y - 1) = 1 - \left(\frac{1}{1+e^y-1}\right)^{\alpha} \\
&= 1 - e^{-\alpha y}
\end{aligned}$$

gilt $\ln(X+1) \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$. Es folgt dann $\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+X_i) \sim \Gamma(n,\alpha)$.

Aufgabe 5 [(a) 6, (b) 2, (c) 4, (d) 3]
Zu (a)
Bei bekannter Varianz wird der Gauß-Test verwendet. Die Testgröße ist gegeben durch

$$t = \frac{\overline{x} - 100}{15}\sqrt{25} = \frac{5}{3} = 1,67.$$

H_0 wird abgelehnt, denn es gilt $t > u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,64$.
Zu (b)
Der Fehler 1. Art ist die Wahrscheinlichkeit H_0 fälschlicherweise zu verwerfen.
Zu (c)
Bei bekannter Varianz ist das Schätzintervall gegeben durch

$$\begin{aligned}\left[\overline{x} - \frac{\sigma u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{\sigma u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right] &= \left[105 - \frac{1,96 \cdot 15}{5}; 105 + \frac{1,96 \cdot 15}{5}\right] \\ &= [99,12; 110,88].\end{aligned}$$

Zu (d)
Offensichtlich gilt $100 \in I$ und 100 liegt im Ablehnungsbereich des Test in (a). Dies widerspricht sich nicht, da es sich in (a) um einen einseitigen Test handelt. Bei einem Niveau von 2,5 % wäre in (a) die Nullhypothese nicht verworfen worden.