Zulassungsprüfung Stochastik, 16.05.15

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus. Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1 (18 Punkte)
Sei $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann ist die Abbildung $\nu : \mathcal{B}^1 \longrightarrow [0, \infty)$, $\nu(A) := \mu\left(T^{-1}(A)\right)$ ein Maß. Beweisen Sie:

(a) Für alle $\omega \in \Omega$ und alle $A \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$1_{T^{-1}(A)}(\omega) = 1_A(T(\omega)).$$

(b) Für alle messbaren $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\nu(x) = \int_{\Omega} f(T(\omega))\, d\mu(\omega).$$

Aufgabe 2 (18 Punkte)
Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Θ. Die Dichte von Θ sei

$$f_\Theta(\vartheta) = \begin{cases} c\vartheta^k(1-\vartheta)^l & \vartheta \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $c > 0$ eine Normierungskonstante ist. Für $\vartheta \in (0,1)$ sei $X \sim B(n, \vartheta)$, also ist die bedingte Dichte von X gegeben $\Theta = \vartheta$ wie folgt:

$$f(x|\vartheta) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} \text{falls } x \in \{0, \ldots, n\}.$$

(a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von X und Θ.

(b) Zeigen Sie, dass für die bedingte Dichte $f_{\Theta|X}$ von Θ gegeben $X = x$ gilt:

$$f_{\Theta|X}(\vartheta|x) = \frac{(n+k+l+1)!}{(k+x)!(n+l-x)!} \vartheta^{x+k}(1-\vartheta)^{n+l-x},\ x \in \{0, \ldots, n\}.$$

Hinweis: Für $p, q \in \mathbb{N}_0$ *gilt* $\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\, dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

(c) Bestimmen Sie

(i) $\mathbb{E}(\Theta|X)$ (ii) $\mathbb{E}(\Theta|X = 0)$ für $n = 6$, $k = l = 1$.

Aufgabe 3 (36 Punkte)

(a) (i) Bestimmen Sie für $X_i \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$ unabhängig, einen Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\lambda}$ für λ.

(ii) Gegeben seien die Daten

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\sum_{i=1}^{10} x_i$
1,7	0,8	0,3	1,2	1,5	1,8	1,6	0,6	0,8	1,6	11,9

Bestimmen Sie den Schätzwert für λ nach (i).

(b) Sei $Y \sim \Gamma(a, \lambda)$ und $c > 0$ fest. Bestimmen Sie die Dichte von cY und schließen Sie daraus $cY \sim \Gamma\left(a, \frac{\lambda}{c}\right)$.

(c) Seien $X_i \sim \text{Exp}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, unabhängig. In der Folge können Sie ohne Beweis verwenden:

- *Für* $Y_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, *unabhängig gilt* $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \sim \Gamma\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i, \lambda\right)$.
- $\Gamma\left(n, \dfrac{1}{2}\right) = \chi_n^2$.

(i) Beweisen Sie, dass $2\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$ gilt.

(ii) Sei $\overline{X} := \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Beweisen Sie, dass für für alle $\alpha \in (0, 1)$ gilt:

$$P\left(\frac{\chi^2_{n,\alpha/2}}{2n\overline{X}} \leq \lambda \leq \frac{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}{2n\overline{X}}\right) = 1 - \alpha.$$

(d) Seien $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, unabhängig und $\alpha \in (0, 1)$ fest. Bestimmen Sie mit Hilfe von (c) ein $1 - \alpha$ Konfidenzintervall für λ unter Verwendung des ML-Schätzers $\hat{\lambda}$ aus (a).

(e) Wir betrachten die Daten aus (a) (ii) und die Ergebnisse aus (d). Bestimmen Sie ein 95 %-Schätzintervall für λ.

Aufgabe 4 (18 Punkte)

Im Rahmen einer Studie über die Sinnhaftigkeit von Auswahlgesprächen bei Studierenden werden bei einer Prüfung die folgenden Daten erhoben:

	Auswahlgespräch ohne	Auswahlgespräch mit
Mittelwert der erreichten Punkte	42	56
empirische Standardabweichung der erreichten Punkte	19	20
Anzahl der Studierenden	220	30
Bestanden	141	26

Es wird angenommen, dass für die Anzahl der erreichten Punkte $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ in jeder Gruppe gilt, wobei X_1 bzw. X_2 die erreichte Punkteanzahl der Studierenden ohne bzw. mit Auswahlgespräch ist.

(a) Überprüfen Sie zum Niveau $\alpha = 0,05$ die Nullhypothese, $H_0 : \mu_2 \leq \mu_1$ gegen die Alternative $H_1 : \mu_2 > \mu_1$.

(b) Sei p_1 bzw. p_2 die Wahrscheinlichkeit des Bestehens der Prüfung für Studierende ohne bzw. mit Auswahlgespräch. Bestimmen Sie approximative 95 % Schätzintervalle für p_1 und p_2 und erläutern Sie das Ergebnis im Vergleich zu (a).

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 [(a) 5 Punkte, (b) 13]

Zu (a)
Sei $\omega \in \Omega$ und $A \subset \mathbb{R}$

$$1_{T^{-1}(A)}(\omega) = 1 \Longleftrightarrow \omega \in T^{-1}(A) \Longleftrightarrow T(\omega) \in A \Longleftrightarrow 1_A(T(\omega)) = 1.$$

Zu (b)
Sei zunächst f eine Treppenfunktion, also $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$, $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{B}^1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\nu(x) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(T^{-1}(A_i)) \\ \int_{\Omega} f(T(\omega))\, d\mu(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int 1_{A_i}(T(\omega)) d\mu(\omega) \overset{(a)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int 1_{T^{-1}(A_i)}(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(T^{-1}(A_i)). \end{aligned}$$

Sei nun $f \geq 0$ messbar. Dann gibt es eine monoton steigende Folge von Treppenfunktionen $f_n \geq 0$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Dann ist auch $f_n \circ T$ eine monoton steigende Folge von nicht negativen Funktionen, die gegen $f \circ T$ konvergiert. Da f_n Treppenfunktionen sind, gilt

$$\int f_n\, d\nu = \int f_n \circ T\, d\mu \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Laut Satz von der monotonen Konvergenz konvergieren beide Seiten obiger Gleichung

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\nu &= \int f\, d\nu \\ \lim_{n\to\infty} \int f_n \circ T\, d\mu &= \int f \circ T\, d\mu \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 [(a) 5, (b) 6, (c) 7]
Zu (a)
Sei $f_\Theta(\vartheta) = c1_{(0,1)}(\vartheta) \cdot \vartheta^k (1-\vartheta)^l$ die Dichte von Θ, f die gemeinsame Dichte von X und Θ. Es gilt für $x \in \{0, \ldots, n\}, \vartheta \in (0,1)$

$$f(x, \vartheta) = f(x|\vartheta) \cdot f_\Theta(\vartheta)$$

also

$$f(x,\vartheta) = \begin{cases} c\binom{n}{x} \vartheta^{x+k}(1-\vartheta)^{n+l-x} & \text{falls } x \in \{0,\ldots,n\}, \vartheta \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu (b)
Die Dichte f_X von X ergibt sich für $x \in \{0, \ldots, n\}$ aus

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f(x, \vartheta)\, d\vartheta = c\binom{n}{x} \int_0^1 \vartheta^{x+k}(1-\vartheta)^{n+l-x}\, d\vartheta \\ &= c\binom{n}{x} \frac{(x+k)!(n+l-x)!}{(n+k+l+1)!}. \end{aligned}$$

Damit folgt für $x \in \{0, \ldots, n\}$ und $\vartheta \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f(\vartheta|x) &= \frac{f(x,\vartheta)}{f_X(x)} = \frac{c\binom{n}{x}\vartheta^{x+k}(1-\vartheta)^{n+l-x}}{c\binom{n}{x}\frac{(x+k)!(n+l-x)!}{(n+k+l+1)!}} \\ &= \frac{(n+k+l+1)!}{(x+k)!(n+l-x)!}\vartheta^{x+k}(1-\vartheta)^{n+l-x}. \end{aligned}$$

Zu (c)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Theta|X=x) &= \int_0^1 \vartheta f(\vartheta|x)\, d\vartheta \\ &= \frac{(n+k+l+1)!}{(x+k)!(n+l-x)!} \int_0^1 \vartheta^{x+k+1}(1-\vartheta)^{n+l-x} d\vartheta \\ &= \frac{(n+k+l+1)!}{(x+k)!(n+l-x)!} \frac{(x+k+1)!(n+l-x)!}{(n+k+l+2)!} \\ &= \frac{x+k+1}{n+k+l+2}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\mathbb{E}(\Theta|X) = \dfrac{X+k+1}{n+k+l+2}$.
Für $k = l = 1$, $n = 6$ und $x = 0$ folgt

$$\mathbb{E}(\Theta|X=0) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Aufgabe 3 [(a) 14, (b) 6, (c) 8, (d) 4, (e) 4,]
Zu (a)

(i) Aufgrund der Unabhängigkeit der X_i, $i = 1, \ldots, n$, gilt für die Likelihoodfunktion

$$L(\lambda; x_1, \ldots, x_n) = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \ldots \cdot \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n \ \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \ell(\lambda) &:= \ln L(\lambda) = \ln(\lambda^n) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i = n\ln(\lambda) - \lambda\sum_{i=1}^n x_i \\ \ell'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \\ \ell''(\lambda) &= -\frac{n}{\lambda^2} < 0 \end{aligned}$$

und somit liegt in $\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$ ein Maximum der Likelihoodfunktion vor. Damit ist die Zufallsvariable

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$$

ein Maximum Likelihood Schätzer.

(ii) $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}} = \frac{1}{1,19} \approx 0,84.$

Zu (b)
Die Dichte f_Z von $Z = cY$ ergibt sich durch Ableiten der Verteilungsfunktion

$$P(Z \leq z) \leq \mathbb{P}\left(cY \leq z\right) = P\left(Y \leq \frac{z}{c}\right)$$

nach $z > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} P\left(Y \leq \frac{z}{c}\right) &= \frac{1}{c} f_Y\left(\frac{z}{c}\right) = \frac{1}{c} \frac{\lambda^a \left(\frac{z}{c}\right)^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\frac{\lambda z}{c}} = \frac{\lambda^a z^{a-1}}{c^a \Gamma(a)} e^{-\frac{\lambda}{c} z} \\ &= \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^a z^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\frac{\lambda}{c} z}. \end{aligned}$$

Dies ist die Dichte der $\Gamma\left(a, \frac{\lambda}{c}\right)$-Verteilung.
Zu (c)

(i) Laut erstem Hinweis folgt $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$ und mit (b) folgt

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(n, \frac{\lambda}{2\lambda}\right) = \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

(ii) Mit dem zweiten Hinweis gilt $2\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \chi_n^2$. Es ergibt sich wegen $\overline{X} > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\chi^2_{n,\alpha/2}}{2n\overline{X}} \leq \lambda \leq \frac{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}{2n\overline{X}}\right) &= P\left(\chi^2_{n,\alpha/2} \leq 2n\lambda\overline{X} \leq \chi^2_{n,1-\alpha/2}\right) \\ &= P\left(\chi^2_{n,\alpha/2} \leq 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \chi^2_{n,1-\alpha/2}\right) \\ &= P\left(2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \chi^2_{n,1-\alpha/2}\right) - P\left(2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \chi^2_{n,\alpha/2}\right) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Zu (d)
Es ergibt sich aus (c) (ii) und $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$ das Konfidenzintervall

$$\left[\hat{\lambda} \cdot \frac{\chi^2_{n,\alpha/2}}{2n}, \hat{\lambda} \cdot \frac{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}{2n}\right].$$

Zu (e)
Wegen $n = 10$ benötigen wir die Quantile $\chi^2_{10;0,975} = 20,483$, $\chi^2_{10;0,025} = 3,274$. Aus

$$\hat{\lambda}\frac{\chi^2_{n,\alpha/2}}{2n} = \frac{3,274 \cdot 0,84}{20} \approx 0,136 \quad \hat{\lambda}\frac{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}{2n} = \frac{20,483 \cdot 0,84}{20} \approx 0,875$$

und es ergibt sich das Schätzintervall $[0,136; 0,875]$.

Aufgabe 4[(a) 7, (b) 7 + 4]
Zu (a)
Es handelt sich um einen zwei-Stichproben t-Test. Die Testgröße ist

$$T(x,y) = \frac{\overline{y} - \overline{x}}{s}\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \qquad s^2 := \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{m+n-2}.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$s^2 = \frac{219 \cdot 19^2 + 29 \cdot 20^2}{248} = 365,56$$
$$t = \frac{56-42}{s}\sqrt{\frac{220 \cdot 30}{250}} = 3,76.$$

H_0 wird abgelehnt, falls $t > t_{248;0,95} \approx 1,64$. Somit wird H_0 verworfen.
Zu (b)
Es ergibt sich $\hat{p}_1 = 0,64$ und $\hat{p}_2 = 0,87$. Die approximativen Schätzintervalle ergeben sich aus der Formelsammlung

$$\left[\hat{p} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right].$$

Einsetzen mit $\alpha = 0,05$ und $u_{0,975} = 1,96$ ergibt $[0,58; 0,7]$ für p_1 und $[0,75; 0,99]$ für p_2.
Das Auswahlgespräch wirkt sich positiv auf die Bestehenswahrscheinlichkeit aus. Auch die im Mittel erreichte Punkteanzahl ist bei Studierenden mit Auswahlgespräch höher. Die Irrtumswahrscheinlichkeit für letzte Aussage beträgt 5%.