Zulassungsprüfung Stochastik, 10.05.14

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus. Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1 (15 Punkte)
Gegeben seien unabhängige Unter-σ-Algebren $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ und eine Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, die sowohl $\mathcal{F}$- als auch $\mathcal{G}$-messbar ist.

(a) Sei $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Zeigen Sie, dass $P(C) \in \{0, 1\}$ gilt.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $P(X \leq x) \in \{0, 1\}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, das X fast sicher konstant ist.

Aufgabe 2 (15 Punkte)
Sei $X \sim N(0, 1)$ und $Y := X^2$ und sei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

(a) Bestimmen Sie $P(Y \leq 1)$.

(b) Beweisen Sie, dass

$$P(Y \leq y) = \begin{cases} 2\Phi(\sqrt{y}) - 1 & y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

(c) Bestimmen Sie die Dichte von Y und schließen Sie daraus, dass $Y \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gilt.

Aufgabe 3 (15 Punkte)
Seien $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit $E[X^2] < \infty$ und $\mathrm{Var}(X|Y) > 0$. Sei $\sigma(Y)$ die von Y erzeugte σ-Algebra.

(a) Sei $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $\sigma(Y)$-messbare Zufallsvariable und sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann ist auch $g(Z)$ $\sigma(Y)$-messbar.

(b) Schließen Sie aus (a), dass

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X|Y)}}$$

$\sigma(Y)$-messbar ist. Ohne Beweis können Sie verwenden, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} x^{-1/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

messbar ist.

(c) Sei
$$Z = \frac{X - E(X|Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X|Y)}}$$
Bestimmen Sie $E(Z|Y)$ und $\operatorname{Var}(Z|Y)$.

Aufgabe 4 (15 Punkte)
Seien T_1, T_2 unabhängige Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten und Varianzen. Es gelte $E(T_1) = E(T_2) = \theta$. Wir interpretieren T_1, T_2 als erwartungstreue Schätzer für den Parameter θ.

(a) Zeigen Sie, dass $T := \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2$ für alle $\lambda \in [0,1]$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

(b) Bestimmen Sie in (a) den Parameter λ so, dass T minimale Varianz besitzt.

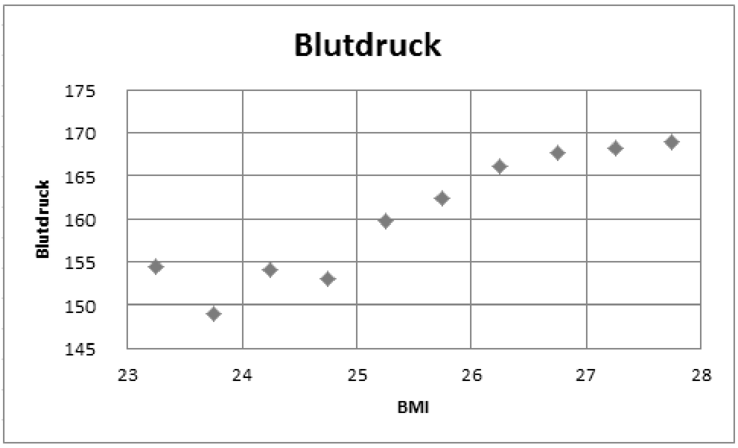
(c) Seien $X_1, \ldots X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma^2)$. Seien S_x^2 bzw. S_y^2 die empirischen Varianzen der X_i bzw. Y_j. Ohne Beweis können Sie verwenden:
$$E(S_x^2) = E(S_y^2) = \sigma^2$$
$$\operatorname{Var}\left(\frac{n-1}{\sigma^2} S_x^2\right) = 2(n-1)$$
$$\operatorname{Var}\left(\frac{m-1}{\sigma^2} S_y^2\right) = 2(m-1).$$
Bestimmen Sie mit (a) und (b) daraus einen erwartungstreuen Schätzer für σ^2 mit minimaler Varianz.

Aufgabe 5 (15 Punkte)
Die Suchzeit nach Programmierfehlern sei exponentialverteilt. Es wird angenommen, dass unabhängig voneinander n Teams Programmierfehler suchen. Es ergab sich eine durchschnittliche Suchzeit von $\overline{x} = 50$. Stellen Sie die Likelihoodfunktion auf, bestimmen Sie den ML-Schätzer und bestimmen Sie den sich ergebenden Schätzwert für den Parameter λ der Exponentialverteilung.

Aufgabe 6 (15 Punkte)
In einer Studie wurde der Zusammenhang zwischen Body Mass Index (BMI) x (Gewicht in kg/(Körpergröße in m)^2) und Blutdruck Y bei Männern untersucht. Es wird angenommen, dass der folgende Zusammenhang
$$Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, 10$$
besteht. Die ε_i seien unabhängig und $N(0, \sigma^2)$-verteilt. Eine Stichprobe lieferte folgende Werte:
$$\overline{x} = 25{,}5; \qquad \sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})^2 = 20{,}625; \qquad \text{(BMI)}$$
$$\overline{y} = 160{,}4; \qquad \sum_{i=1}^{10} (y_i - \overline{y})^2 = 483{,}5; \qquad \text{(Blutdruck)}$$
$$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x}) = 93{,}7.$$

(a) Bestimmen Sie die Schätzer $\hat{a}$, $\hat{b}$ für a, b.

(b) Führen Sie für die Hypothese $H_0 : b = 0$ einen Test zum Niveau von $\alpha = 5$ % durch. Interpretieren Sie das Ergebnis.



Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 [(a) 4 Punkte, (b) 3, (c) 8]
Zu (a)
Wegen der Unabhängigkeit von $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ und $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ gilt

$$P(C) \quad = \quad P(C \cap C) = P(C)^2 \Longrightarrow P(C)(1 - P(C)) = 0$$

und es folgt die Behauptung.
Zu (b)
X ist $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$-messbar, also gilt $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ und $\{X \leq x\} \in \mathcal{G}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ d.h. $\{X \leq x\} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Mit (a) folgt die Behauptung.
Zu (c)
Sei F die Verteilungsfunktion von X. Da $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ und wegen (b) $F(x) \in \{0, 1\}$ gilt, folgt $F^{-1}(1) \neq \emptyset$. Sei $x_0 := \inf F^{-1}(1)$. Da F von rechts stetig ist, gilt $F(x_0) = 1$. Da F monoton steigt, gilt $F(x) = 0$ für alle $x < x_0$ gemäî der Definition von x_0 und es folgt $\lim_{x\uparrow x_0} F(x) = 0$. Somit erhalten wir

$$P(X = x_0) = F(x_0) - \lim_{x\uparrow x_0} F(x) = 1,$$

also $X = x_0$ fast sicher.

Aufgabe 2 [(a) 4, (b) 4, (c) 7]
Zu (a)

$$\begin{aligned} P(Y \leq 1) &= P(X^2 \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826. \end{aligned}$$

Zu (b)
Da $Y = X^2 \geq 0$ gilt, ist $P(Y \leq y) = 0$ für $y \leq 0$ offensichtlich. Sei $y > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) \\ &= 2\Phi(\sqrt{y}) - 1. \end{aligned}$$

Zu (c)
Differenziert man in (b) nach y ergibt sich für $y > 0$ und $\varphi(x) := \Phi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ (aus der Formelsammlung)

$$\frac{d}{dy} P(Y \leq y) \quad = \quad 2\varphi(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2} = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} y^{(1/2)-1} e^{-y/2}$$

und somit gilt $Y \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Aufgabe 3 [(a) 4, (b) 4, (c) 7]
Zu (a)
Sei $B \in \mathcal{B}$. Zu zeigen ist, dass $(g(Z))^{-1}(B) \in \sigma(Y)$. Es gilt

$$(g(Z))^{-1}(B) = Z^{-1}(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}}) \in \sigma(Y),$$

da Z $\sigma(Y)$-messbar ist.
Zu (b)
$\text{Var}(X|Y) = E((X - E(X|Y))^2|Y)$ ist $\sigma(Y)$-messbar laut Definition als bedingte Erwartung gegeben Y. Wegen (a) ist $g(\text{Var}(X|Y))$ mit dem gegebenem g ebenfalls $\sigma(Y)$-messbar.
Zu (c)
Es gilt

$$\begin{aligned}
E(Z|Y) &= E(X - E(X|Y)|Y)\frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X|Y)}} && \text{(wegen (b))}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X|Y)}}\Big(E(X|Y) - \underbrace{E(E(X|Y)|Y)}_{=E(X|Y)}\Big) = 0.\\
\text{Var}(Z|Y) &= E(Z^2|Y) - E(Z|Y)^2 = E(Z^2|Y) && \text{(da } E(Z|Y) = 0)\\
&= E\left(\frac{(X - E(X|Y))^2}{\text{Var}(X|Y)}\Big|Y\right) = \frac{1}{\text{Var}(X|Y)}E\left((X - E(X|Y))^2\Big|Y\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4[(a) 3, (b) 8, (c) 4]
Zu (a)
Sei $\lambda \in [0, 1]$ und $T := \lambda T_1 + (1 - \lambda)T_2$. Es gilt

$$E(T) = \lambda E(T_1) + (1 - \lambda)E(T_2) = \lambda\theta + (1 - \lambda)\theta = \theta$$

Zu (b)
Da T_1 und T_2 unabhängig sind, gilt

$$\text{Var}(T) = \lambda^2\text{Var}(T_1) + (1 - \lambda)^2\text{Var}(T_2).$$

Um die linke Seite zu minimieren leiten wir nach λ ab und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}\text{Var}(T) &= 2\lambda\text{Var}(T_1) - 2(1 - \lambda)\text{Var}(T_2)\\
&= 2(\lambda(\text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_2)) - \text{Var}(T_2)).
\end{aligned}$$

In $\lambda = \frac{\text{Var}(T_2)}{\text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_2)}$ wechselt das Vorzeichen, es liegt ein Minimum vor. Damit besitzt

$$T = \frac{\text{Var}(T_2)}{\text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_2)}T_1 + \frac{\text{Var}(T_1)}{\text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_2)}T_2$$

minimale Varianz.
Zu (c)
Es gilt

$$\text{Var}(S_x^2) = \frac{2\sigma^4}{n - 1}, \qquad \text{Var}(S_y^2) = \frac{2\sigma^4}{m - 1}.$$

Setze $T_1 := S_x^2$, $T_2 := S_x^2$. Mit $\lambda = \frac{\text{Var}(T_2)}{\text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_2)}$ aus (b) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\frac{2\sigma^4}{m-1}}{\frac{2\sigma^4}{n-1} + \frac{2\sigma^4}{m-1}} = \frac{\frac{1}{m-1}}{\frac{n-1+m-1}{(n-1)(m-1)}} = \frac{n - 1}{(n + m - 2)}\\
T &= \lambda S_x^2 + (1 - \lambda)S_y^2 = \frac{n - 1}{(n + m - 2)}S_x^2 + \frac{m - 1}{(n + m - 2)}S_y^2.
\end{aligned}$$

Nach (a) ist T erwartungstreu, nach (b) besitzt T minimale Varianz.

Aufgabe 5[15]

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Exp}(\lambda)$ die Suchzeiten. Es ergibt sich für $(x_1, \ldots, x_n) \in (0, \infty)^n$

$$
\begin{aligned}
L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda \exp(-\lambda x_i) && \text{(Likelihood)} \\
\ell(\lambda) &:= \ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (\ln \lambda - \lambda x_i) \\
\ell'(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda} - x_i \right) \\
\ell''(\lambda) &= -\frac{n}{\lambda^2} < 0 \\
\ell'(\hat{\lambda}) &= 0 \Longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{x}}.
\end{aligned}
$$

Somit ist $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$ ML-Schätzer, es ergibt sich der Schätzwert $\frac{1}{\overline{x}} = 0,02$.

Aufgabe 6 [(a) 3, (b) 12]

Zu (a)

Es ergeben sich folgende Schätzwerte:

$$
\begin{aligned}
\hat{b} &= \frac{93,7}{20,625} = 4,54 \\
\hat{a} &= 160,4 - 4,54 \cdot 25,5 = 44,55.
\end{aligned}
$$

Zu (b)

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{8} \left(483,5 - \frac{93,7^2}{20,625} \right) = 7,2273 \\
\operatorname{se}(\hat{b}) &= \sqrt{\frac{57,82}{20,625}} = 0,592 \\
T &= \frac{\hat{b} - b_0}{\operatorname{se}(\hat{b})} = \frac{4,54}{1,674} = 7,67.
\end{aligned}
$$

H_0 wird abgelehnt, denn $|T| > t_{8;0,975} = 2,306$. Somit wird die Hypothese, dass der Blutdruck nicht vom Body Maß Index abhängt, verworfen.