Zulassungsprüfung Stochastik, 11.10.13

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ aus. Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1 (18 Punkte) Sei $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{falls } x \in [0,1) \\ 2 - e^{-x} & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$.

μ sei das von F erzeugt Maß auf $\mathcal{B}^1$, also

$$\mu((-\infty, a]) = F(a) \text{ für } a \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeichnen Sie F.

(b) Wir betrachten die Maße μ_1, μ_2 auf $\mathcal{B}^1$ mit $\mu_1 = \delta_1$ und $\mu_2(A) = \int_A e^{-x} 1_{[0,\infty)}(x)\, dx$, $A \in \mathcal{B}^1$. Beweisen Sie, dass $\mu = \mu_1 + \mu_2$ gilt.

(c) Bestimmen Sie $\int_{\mathbb{R}} x\, dF(x)$. Sie können ohne Beweis verwenden, dass wegen (b) $\int_{\mathbb{R}} h\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} h\, d\mu_1 + \int h_{\mathbb{R}}\, d\mu_2$ für alle integrierbaren Funktionen $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt.

(d) Besitzt μ eine Dichte? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 2 (18 Punkte)
Die Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ sei der Wert eines Anfangskapitals $x_0 > 0$ nach dem Ablauf eines Jahres. Die Rendite ist durch $R = \dfrac{X}{x_0} - 1$ definiert. Wir gehen davon aus, dass $\ln(R + 1) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Beweisen Sie, dass $P(R \leq r) = \Phi\left(\frac{\ln(r+1)-\mu}{\sigma}\right)$ gilt. Φ ist hierbei die Verteilungsfunktion der Standardnormal-Verteilung.

(b) Bestimmen Sie für $\mu = 0,1$ und $\sigma^2 = 0,0081$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Rendite R

(i) unter 0,08 (ii) über 0,12 (iii) zwischen 0,08 und 0,12

liegt.

(c) (i) Bestimmen Sie die Betrag $k_0 \in \mathbb{R}$ der notwendig ist, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von $\varepsilon \in (0,1)$ der Wert $X + k_0$ den Wert x_0 nicht unterschreitet.

(ii) Was ergibt sich für k_0 in (i) mit $\varepsilon = 0,99$, $\mu = 0,1$ und $\sigma^2 = 0,0081$?

Aufgabe 3 (18 Punkte)
Gegeben seien die Zufallsvariablen $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0$ und $\Theta : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$. Es gelte $\Theta \sim \Gamma(\alpha, \alpha)$ für $\alpha > 0$. Sei $\lambda > 0$.
Für gegebenes $\vartheta > 0$, sei $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda\vartheta)$, d.h. N gegeben $\Theta = \vartheta$ besitzt die bedingte Dichte $f(\cdot|\vartheta) : \mathbb{N}_0 \longrightarrow [0,1)$ mit $f(k|\vartheta) = e^{-\lambda\vartheta} \dfrac{(\lambda\vartheta)^k}{k!}$.

(a) Bestimmen $E(N|\Theta)$ und $\text{Var}(N|\Theta)$.

(b) Bestimmen $E(N)$ und $\text{Var}(N)$.

(c) Beweisen Sie, dass $N \sim NB\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)$ gilt. *Hinweis: es gilt für* $x > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\alpha t}\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}, \quad \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)n!} = \binom{x+n-1}{n}$$

(d) Bestimmen Sie $\text{Cov}(N,\Theta)$. Sind N und Θ unabhängig?

Aufgabe 4 (18 Punkte)
Sei $X : \Omega \longrightarrow (0,\infty)$ eine Zufallsvariable mit $\ln(X) \sim N(\mu, 1)$. Es gilt somit $P(X \leq x) = \Phi(\ln x - \mu)$ für $x > 0$, wobei Φ die Standardnormalverteilung ist.

(a) Beweisen Sie, dass die Dichte von X gegeben ist durch $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}(\mu - \ln x)^2\right) & x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie einen Maximum Likelihood Schätzer von μ für unabhängig und identisch verteilte $X_1, \ldots, X_n \sim X$.

(c) Ist der Schätzer aus (b) erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (18 Punkte)
Gegeben sind je 10 unabhängige Realisierungen $u_1, \ldots, u_{10}$ bzw. $v_1, \ldots, v_{10}$ von $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ bzw. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ verteilten Zufallsvariablen (stetige Renditen zweier unabhängiger Wertpapiere):

Die Mittelwerte der Daten sind $\overline{u} = 0,189$ bzw. $\overline{v} = 0,145$, die empirischen Varianzen $s_u^2 = 0,049$ bzw. $s_v^2 = 0,118$.

(a) Wird die Hypothese $H_0 : \mu_1 = 0,05$ zu einem Niveau von 5% verworfen?

(b) Bestimmen Sie 95 % - Schätzintervalle für σ_1^2.

(c) Nach einem vorab durchgeführten Test kann man in der Folge davon ausgehen, dass $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gilt. Wird die Hypothese $\mu_1 \geq \mu_2$ für ein Signifikanzniveau von 5 % verworfen?

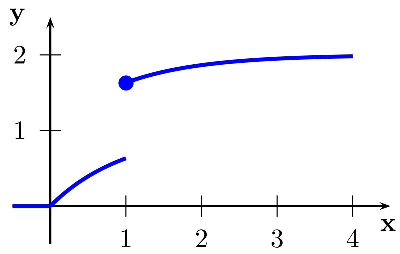
(d) Obige Daten sind das Ergebnis von Simulationen mit $\mu_1 = 0,05$, $\mu_2 = 0,07$ und $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0,06$.

   (i) Seien $U_1, \ldots, U_{10} \sim N(0,05; 0,06)$, $V_1, \ldots, V_{10} \sim N(0,07; 0,06)$ und $U_1, \ldots, V_{10}$ unabhängig. Seien $\overline{U}$ bzw. $\overline{V}$ der Mittelwert der U_i bzw. V_i. Bestimmen Sie $P(\overline{U} > \overline{V})$.

   (ii) Kommentieren Sie die obigen Ergebnisse in (a) und (c). Verwenden Sie dazu auch (i).

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 [(a) 3 Punkte, (b) 7, (c) 6, (d) 2]
Zu (a)



Zu (b)
Es reicht zu zeigen, dass für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(a) &= \mu_1((-\infty, a]) + \mu_2((-\infty, a]) \\ &= \delta_1((-\infty, a]) + \int_{-\infty}^{a} e^{-x} 1_{[0,\infty)}(x)\, dx \end{aligned}$$

gilt, da $\mathcal{E} = \{(-\infty, a] | a \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}^1$ ist.

1. Fall: $a < 0$: $\delta_1((-\infty, a]) = 0$, $\int_{-\infty}^{a} e^{-x} 1_{[0,\infty)}(x)\, dx = 0$.
2. Fall: $0 \leq a < 1$: $\delta_1((-\infty, a]) = 0$, $\int_{-\infty}^{a} e^{-x} 1_{[0,\infty)}(x)\, dx = 1 - e^{-a}$.
3. Fall: $1 \leq a$: $\delta_1((-\infty, a]) = 1$, $\int_{-\infty}^{a} e^{-x} 1_{[0,\infty)}(x)\, dx = 1 - e^{-a}$.

Zu (c)

$$\int_{\mathbb{R}} x\, dF(x) = \int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_1(x) + \int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx = 1 + 1 = 2,$$

da das zweite Integral der mittleren Gleichung der Erwartungswert einer Exp(1)-verteilten Zufallsvariablen ist.
Zu (d)
μ besitzt keine Dichte, da F nicht stetig ist.

Aufgabe 2 [(a) 4, (b) 6, (c,i) 6, (c,ii) 2]
Zu (a)

$$P(R \leq r) \quad = \quad P(\ln(R+1) \leq \ln(r+1)) = \Phi\left(\frac{\ln(r+1) - \mu}{\sigma}\right).$$

Zu (b)
Da $\ln(1+R)$ stetig verteilt ist gilt

(i) $$P(R < 0,08) = \Phi\left(\frac{\ln(1,08) - 0,1}{0,09}\right) \approx \Phi(-0,26) = 1 - \Phi(0,26) = 0,3974$$

(ii) $$P(R > 0,12) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(1,12) - 0,1}{0,09}\right) \approx 1 - \Phi(0,15) = 0,4404$$

(iii) $P(0,08 \leq R \leq 0,12) = P(R \leq 0,12) - P(R \leq 0,08) \approx 0,5596 - 0,3974 = 0,1622.$

Zu (c)
(i) Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist k_0 mit $P(X + k_0 \geq x_0) = \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
P(X + k_0 \geq x_0) &= 1 - P(X + k_0 \leq x_0) = 1 - P\left(\frac{X}{x_0} + \frac{k_0}{x_0} \leq 1\right) = P\left(R \leq -\frac{k_0}{x_0}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(1 - \frac{k_0}{x_0}) - \mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Aus $P(X + k_0 \geq x_0) = \varepsilon$ folgt

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 - \frac{k_0}{x_0}\right) &= \mu + u_{1-\varepsilon}\sigma \\
k_0 &= (1 - \exp(\mu + u_{1-\varepsilon}\sigma))\, x_0.
\end{aligned}$$

wobei $u_{1-\varepsilon}$ das $1 - \varepsilon$ Quantil der Standardnormalverteilung ist.
(ii) Mit $\varepsilon = 0,99$ ergibt sich $u_{0,01} = -u_{0,99} = -2,33$, damit $k_0 = 0,1039 x_0$.

Aufgabe 3 [(a) 3, (b) 4, (c) 6, (d) 5]

(a) $E(N|\Theta) = \lambda\Theta$, $\mathrm{Var}(N|\Theta) = \lambda\Theta$

(b)
$$\begin{aligned}
E(N) &= E(E(N|\Theta)) = E(\lambda\Theta) = \lambda E(\Theta) = \lambda \\
\mathrm{Var}(N) &= E(\mathrm{Var}(N|\Theta)) + \mathrm{Var}(E(N|\Theta)) = \lambda E(\Theta) + \mathrm{Var}(\lambda\Theta) \\
&= \lambda + \lambda^2 \mathrm{Var}(\Theta) = \lambda + \lambda^2 \frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Zu (c)
Sei f_Θ die Dichte der $\Gamma(\alpha, \alpha)$-Verteilung. Es gilt

$$\begin{aligned}
P(N = k) &= \int_{\mathbb{R}} f(k|\vartheta) f_\Theta(\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^\infty e^{-\lambda\vartheta} \frac{(\lambda\vartheta)^k}{k!} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \vartheta^{\alpha-1} e^{-\alpha\vartheta} d\vartheta = \\
&= \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\alpha)\vartheta} \vartheta^{k+\alpha-1} d\vartheta = \frac{\alpha^\alpha \lambda^k}{\Gamma(\alpha) k!} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{(\alpha + \lambda)^{\alpha+k}} = \\
&= \binom{\alpha + k - 1}{k} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\right)^\alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)^k
\end{aligned}$$

also $N \sim NB\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)$.
Zu (d)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(N, \Theta) &= E(N\Theta) - E(N)E(\Theta) = E(E(N\Theta|\Theta)) - \lambda = E(\Theta E(N|\Theta)) - \lambda = \\
&= E(\Theta\lambda\Theta) - \lambda = \lambda E(\Theta^2) - \lambda = \lambda(\mathrm{Var}(\Theta) + E(\Theta)^2 - 1) = \\
&= \frac{\lambda}{\alpha} > 0.
\end{aligned}$$

N und Θ sind nicht unabhängig, da sie wegen $\mathrm{Cov}(N, \Theta) > 0$ positiv korreliert sind.

Aufgabe 4[(a) 5, (b) 8, (c) 5]
Zu (a)
Sei $x > 0$. Es gilt

$$\frac{d}{dx}P(X \leq x) = \frac{d}{dx}\Phi\left(\ln x - \mu\right) = \frac{1}{x}\varphi\left(\ln x - \mu\right) = f(x)$$

wobei φ die Dichte der Standardnormalverteilung ist.
Zu (b)

$$\begin{aligned}
L(\mu) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mu - \ln x_i)^2\right) \\
\ell(\mu) &:= \ln L(\mu) = \sum_{i=1}^{n} - \ln(x_i\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mu - \ln x_i)^2 \\
\frac{d}{d\mu}\ell(\mu) &= -\sum_{i=1}^{n}(\mu - \ln x_i) \\
\ell''(\mu) &= -n < 0 \\
\ell'(\hat{\mu}) &= 0 \Longrightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i.
\end{aligned}$$

Somit ist $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ ML-Schätzer.
Zu (c)
Da $\ln X_i \sim N(\mu, 1)$ gilt

$$E(\hat{\mu}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\ln X_i) = \mu,$$

und somit ist $\hat{\mu}$ erwartungstreu.

Aufgabe 5 [(a) 4, (b) 4, (c) 4, (d,i) 4, (d,ii) 2]
Zu (a)
Zu prüfen ist die Nullhypothese $H_0 : \mu_1 = 0,05$ gegen $H_1 : \mu_1 \neq 0,05$. Da die Varianz unbekannt ist, wird der t-Test verwendet. Die Wert der Testgröße ist $t = \frac{\overline{u}-0,05}{\sqrt{s_u^2}}\sqrt{n} = \frac{0,189-0,05}{\sqrt{0,049}}\sqrt{10} = 1,986$ und wegen $t_{9;0,975} = 2,262$ wird H_0 nicht verworfen.
Zu (b)
Es ergibt sich aus $\left[\frac{(n-1)s_u^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)s_u^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}},\right]$ und den Quantilen der χ^2_9-Verteilung $\chi^2_{9;0,975} = 19,023$, $\chi^2_{9;0,025} = 2,7$ das Schätzintervall

$$\left[\frac{9 \cdot 0,049}{19,023}, \frac{9 \cdot 0,049}{2,7}\right] = [0,023; 0,163].$$

Zu (c)

Es wird der einseitige, zwei Stichproben t-Test verwendet. Als Testgröße ergibt sich

$$\frac{\overline{v}-\overline{u}}{s}\sqrt{\frac{10\cdot 10}{10+10}} = -0,34 \text{ mit } s^2 = \frac{9\cdot s_u^2 + 9\cdot s_v^2}{10+10-2} = 0,084,$$

somit wird $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ wegen $-1,17 < t_{18;0,95} = 1,734$ nicht verworfen.
Zu (d)
(i) Wegen der Unabhängigkeit der $U_1, \ldots, V_{10}$ sind $\overline{U}, \overline{V}$ unabhängig, es gilt $\overline{U} \sim N(\mu_1; 0,1\sigma^2)$ und $\overline{V} \sim N(\mu_2; 0,1\sigma^2)$ und $\overline{V} - \overline{U} \sim N(\mu_2 - \mu_1; 0,2\sigma^2) = N(0,02; 0,012)$. Damit folgt

$$P(\overline{U} > \overline{V}) = P(\overline{V} - \overline{U} \leq 0) = \Phi\left(\frac{-0,02}{\sqrt{0,012}}\right) \approx 1 - \Phi(0,18) = 0,4286.$$

(ii) In etwa 43 % der Simulationen bzw. Realisationen wird der Mittelwert der U_i größer sein als der Mittelwert der V_i. Im vorliegenden Fall, ist dies eingetreten. In (a) und (c) werden die Hypothesen fälschlicherweise nicht verworfen. Das ist der Fehler zweiter Art. Bei den Hypothesentests wird hingegen nur die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art auf 5 % beschränkt.