Zulassungsprüfung Stochastik, 16.10.09

Wir gehen stets von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ aus.

Aufgabe 1 (18 Punkte)
Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ eine σ-Algebra, $X : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ sei $\mathcal{A}$-messbar und $X_0 : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ sei $\mathcal{C}$-messbar. Beweisen Sie:

(a) X_0 ist $\mathcal{A}$-messbar.

(b) Für alle $C \in \mathcal{C}$ gelte

$$\int_C X_0 \, d\mathbb{P} = \int_C X \, d\mathbb{P}. \tag{1}$$

Dann folgt für alle $\mathcal{C}$-messbaren $Z : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$

$$\int_\Omega Z X_0 \, d\mathbb{P} = \int_\Omega Z X \, d\mathbb{P}. \tag{2}$$

(c) Gilt die Umkehrung von (b)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung
Zu (a)
Sei $B \in \mathcal{B}^1$. Da X_0 messbar ist, folgt $X_0^{-1}(B) \in \mathcal{C}$, also wegen $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ auch $X_0^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Zu (b)
Sei Z eine Treppenfunktion, also $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{C_i}$, wobei $C_i \in \mathcal{C}$ und $\alpha_i > 0$. Dann folgt laut Voraussetzung

$$\begin{aligned}
\int_\Omega Z X_0 \, d\mathbb{P} &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{C_i} X_0 \, d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{C_i} X_0 \, d\mathbb{P} \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{C_i} X \, d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{C_i} X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega Z X \, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Somit gilt (2) für $\mathcal{C}$-messbare Treppenfunktionen Z.
Sei Z $\mathcal{C}$-messbar. Dann gibt es eine Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{C}$-messbaren Treppenfunktionen mit $Z_n \geq 0$ und $Z_n \uparrow Z$. Dann folgt $0 \leq Z_n X_0 \uparrow Z X_0$ und $0 \leq Z_n X \uparrow Z X$. Ferner gilt wegen des oben Gezeigten auch

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \int_\Omega Z_n X_0 \, d\mathbb{P} = \int_\Omega Z_n X \, d\mathbb{P}.$$

Bildet man auf beiden Seiten den Grenzübergang $n \to \infty$, so folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz die Behauptung.

Zu (c)
Die Umkehrung gilt: Sei $C \in \mathcal{C}$. Die Abbildung $Z := 1_C$ ist dann $\mathcal{C}$-messbar und somit gilt

$$\int_C X_0 \, d\mathbb{P} = \int_\Omega 1_C X_0 \, d\mathbb{P} = \int_\Omega Z X_0 \, d\mathbb{P} \stackrel{(2)}{=} \int_\Omega Z X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega 1_C X \, d\mathbb{P} = \int_C X \, d\mathbb{P}.$$

Aufgabe 2 (18 Punkte) Die Körpergröße einer Person sei näherungsweise normalverteilt mit Erwartungswert 180 cm und Varianz 64 cm^2.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person

  (i) unter 170 cm groß ist,

  (ii) über 184 cm groß ist,

  (iii) zwischen 175 cm und 184 cm groß ist.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Körpergröße zweier unabhängig voneinander ausgewählten Personen um maximal 10 cm unterscheidet.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittliche Körpergröße zweier unabhängig voneinander ausgewählten Personen über 190 cm liegt.

Lösung
Zu (a)
Sei X die Zufallsvariable Körpergröße.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \le 170) &= \Phi\left(\frac{170-180}{8}\right) = \Phi(-1,25) = 1 - \Phi(1,25) \\
&= 0,1056 \\
\mathbb{P}(X \ge 184) &= 1 - \Phi\left(\frac{184-180}{8}\right) = 1 - \Phi(0,5) = 0,3085 \\
\mathbb{P}(175 \le X \le 184) &= \mathbb{P}(X \le 184) - \mathbb{P}(X \le 175) = 0,6915 - 0,2676 \\
&= 0,4239
\end{aligned}$$

Zu (b)
Seien X_1 und X_2 die Zufallsvariablen Körpergröße zweier unabhängiger Personen. Dann ist $X := X_1 - X_2$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz 128 cm^2. Zu bestimmen ist als $\mathbb{P}(|X| \le 10)$, also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X| \le 10) &= \mathbb{P}(-10 \le X \le 10) = \mathbb{P}(X \le 10) - \mathbb{P}(X \le -10) = \\
&= 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{128}}\right) - 1 \approx 2\Phi(0,88) - 1 = 0,6212.
\end{aligned}$$

Zu (c)
Seien X_1 und X_2 die Zufallsvariablen Körpergröße zweier unabhängiger Personen. Zu betrachten ist $X = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$ als die durchschnittliche Körpergröße. Es gilt $X \sim N(180, 32)$ und somit

$$\mathbb{P}(X \ge 190) = 1 - \Phi\left(\frac{190-180}{\sqrt{32}}\right) \approx 1 - \Phi(1,77) = 0,0384.$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Θ mit $\Theta \sim U(0,1)$. Für $\vartheta \in (0,1)$ besitze X die bedingte Dichte

$$f(x|\vartheta) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} & \text{falls } x \in \{0, \ldots, n\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Geben Sie eine Interpretation für X gegeben ϑ.

(b) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von X und Θ.

(c) Bestimmen Sie die bedingte Dichte von Θ gegeben $X = x$.

Hinweis: Für $p, q \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(\Theta|X)$.

Lösung

Zu (a)

Bei gegebenem ϑ ist X binomialverteilt mit Parametern n und ϑ. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ϑ ist die Realisierung einer auf $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

Zu (b)

Sei $f_\Theta = 1_{(0,1)}$ die Dichte von Θ, f die gemeinsame Dichte von X und Θ. Es gilt für $x \in \{0,\ldots,n\}, \vartheta \in (0,1)$

$$f(x,\vartheta) = f(x|\vartheta) \cdot f_\Theta(\vartheta)$$

also

$$f(x,\vartheta) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} & \text{falls } x \in \{0,\ldots,n\}, \vartheta \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu (c)

Die Dichte f_X von X ergibt sich für $x \in \{0,\ldots,n\}$ aus

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,\vartheta)\, d\vartheta = \binom{n}{x} \int_0^1 \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x}\, d\vartheta = \binom{n}{x} \frac{x!(n-x)!}{(n+1)!}.$$

Damit folgt für $x \in \{0,\ldots,n\}$ und $\vartheta \in (0,1)$

$$f(\vartheta|x) = \frac{f(x,\vartheta)}{f_X(x)} = \frac{\binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}}{\binom{n}{x}\frac{x!(n-x)!}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{x!(n-x)!}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}.$$

Zu (d)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Theta|X=x) &= \int_0^1 \vartheta f(\vartheta|x)\, d\vartheta = \frac{(n+1)!}{x!(n-x)!} \int_0^1 \vartheta^{x+1}(1-\vartheta)^{n-x}\, d\vartheta \\ &= \frac{(n+1)!}{x!(n-x)!} \frac{(x+1)!(n-x)!}{(n+2)!} = \frac{x+1}{n+2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\mathbb{E}(\Theta|X) = \dfrac{X+1}{n+2}$.

Aufgabe 4 (14 Punkte)
In der folgenden Tabelle sind das Körpergewicht und die Körpergröße von zufällig ausgewählten achtjährigen Jungen aufgezeichnet.

Nr.	Körpergröße x_i	Gewicht y_i	Nr.	Körpergröße x_i	Gewicht y_i
1	140	33	7	134	27
2	145	40	8	144	36
3	135	28	9	138	29
4	139	32	10	140	36
5	139	28	11	140	34
6	130	37	12	152	40
			13	148	35

Bezeichnet man mit x_i die Körpergröße und y_i das Gewicht, so wird für die Zufallsvariablen Y_i das Modell

$$Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, 13$$

untersucht. Die ε_i seien unabhängig und $N(0, \sigma^2)$-verteilt.
Stützen die Daten die Behauptung, dass das Gewicht von der Körpergröße abhängt? Die Aussage soll zu einem Niveau von $\alpha = 5$ % erfolgen.
Sie können verwenden:

$$\begin{aligned}
&\overline{x} = 140,3;\ \sum_{i=1}^{13}(x_i - \overline{x})^2 = 414,8 \\
&\overline{y} = 33,5;\ \sum_{i=1}^{13}(y_i - \overline{y})^2 = 237,2;\ \sum_{i=1}^{13}(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x}) = 180,2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Lösung
Zu testen ist die Hypothese $H_0 : b = 0$.
Es ergeben sich folgende Schätzwerte:

$$\begin{aligned}
\hat{b} &= \frac{180,2}{414,8} = 0,434 \\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{11}\left(237,2 - \frac{180,2^2}{414,8}\right) = 14,44 \\
\mathrm{se}(\hat{b}) &= \sqrt{\frac{14,44}{414,8}} = 0,187 \\
t &= \frac{\hat{b} - b_0}{\mathrm{se}(\hat{b})} = \frac{0,434}{0,187} = 2,32.
\end{aligned}$$

Die Hypothese $b = 0$ wird abgelehnt, denn $|T| > t_{11;0,975} = 2,201$. Somit wird die Hypothese, dass das Gewicht nicht von der Körpergröße abhängt, abgelehnt.

Aufgabe 5 (20 Punkte) Wir betrachten zwei Stichproben von zufällig ausgewählten achtjährigen Jungen bzw. Mädchen. Wir gehen davon aus, dass das Gewicht X bzw. Y jeweils normalverteilt ist. Es ergaben sich folgende Werte:

Mittelwert 33,5 bzw. 38,3

Empirische Varianz 19,8 bzw.68,1

Stichprobengröße Jeweils 13.

(a) Bestimmen Sie ein Schätzintervall für das mittlere Gewicht der Jungen zum Niveau 95 %.

(b) Wird die Annahme, dass das mittlere Gewicht der Jungen kleiner als das mittlere Gewicht der Mädchen, verworfen oder angenommen? Betrachten Sie die Hypothese zu einem Niveau von 5 %.

Lösung
Zu (a)
Erwartungswert und Varianz sind beide unbekannt. Es wird verwendet $t_{12;0,975} = 2,179$, und es ergibt sich mit $\frac{\sqrt{19,8} \cdot 2,179}{\sqrt{13}} = 2,69$

$$[33,5 - 2,69; 33,5 + 2,69] = [30,81; 36,19]$$

Zu (b)
Sei μ_X bzw. μ_Y der Erwartungswert von X bzw. Y, dem Gewicht der Jungen bzw. der Mädchen. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \mu_X \geq \mu_Y$ mit der Alternative $H_1 : \mu_X < \mu_Y$.
Es wird der Zweistichproben t-Test verwendet. Die Testgröße ist

$$t = \frac{38,3 - 33,5}{s} \sqrt{\frac{13^2}{26}}$$

mit

$$s^2 = \frac{12 \cdot 68,1 + 12 \cdot 19,8}{24} = 43,95.$$

H_0 wird verworfen, wenn t zu „groß“ ist, also wenn $t > t_{24;0,95} = 1,711$ Es folgt

$$t = \frac{4,8}{6,6} \cdot 2,5 = 1,846$$

H_0 wird wegen $t = 1,846 > 1,711$ verworfen, die Gegenhypothese $\mu_X < \mu_Y$ angenommen.