Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Oktober 2014

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 10. Oktober 2014 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 6 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 12 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 5 Teilnehmer die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (14 Punkte)
Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ seien die Mengen

$$M_n := \left\{ \left(1 - \tfrac{1}{2^k}\right) \left(-\tfrac{3}{n}\right)^l \mid k,\, l \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die die Menge M_n beschränkt ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie für die n aus (a) das Supremum von M_n und das Infimum von M_n.

Lösung:

(a) Für $n = 1$ und $n = 2$ ist M_n nicht beschränkt, denn in diesem Fall gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 1$ und $\left|-\frac{3}{n}\right|^l \to \infty$ für $l \to \infty$.
Für $n \geq 3$ ist M_n beschränkt, da $\left|-\frac{3}{n}\right| \leq 1$ ist.

(b) Da für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $1 - \frac{1}{2^k} \geq 0$ gilt, folgt:

$$\sup M_n = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot \sup_{\substack{l \text{ gerade} \\ l\in\mathbb{N}_0}} \left(-\frac{3}{n}\right)^l = 1 \text{ und}$$

$$\inf M_n = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot \inf_{\substack{l \text{ ungerade} \\ l\in\mathbb{N}_0}} \left(-\frac{3}{n}\right)^l = -\frac{3}{n}$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Für welche Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a\,(\cos(ax) - 1)}{x^2} = 4$?

Lösung: Zweifache Anwendung der Regeln von l'Hospital liefert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a\big(\cos(ax) - 1\big)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-a^2 \sin(ax)}{2x} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{-a^3 \cos(ax)}{2} = -\frac{a^3}{2} = 4 \Longleftrightarrow a^3 = -8$$

Damit gilt die angegebene Gleichung nur für $a = -2$.

Aufgabe 3 (11 Punkte)
Es seien die Funktionen $f_1 : [0,\,3] \to \mathbb{R},\, x \mapsto f_1(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$ und $f_2 : [0,\,3] \to \mathbb{R},\, x \mapsto f_2(x) = x$ gegeben.

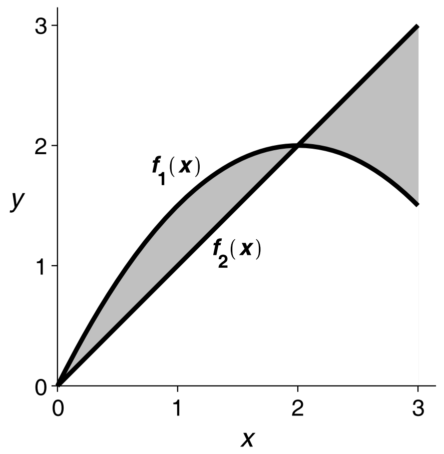
(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 sowie die Menge

$$\Omega = \big\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\,3],\, \min\{f_1(x),\, f_2(x)\} \le y \le \max\{f_1(x),\, f_2(x)\}\big\}.$$

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von Ω.

Lösung:

(a) Die Funktionsgraphen und die Menge Ω sind in folgender Skizze dargestellt.



(b) Es gilt:

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 = x \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 2$$

Damit folgt für den Flächeninhalt von Ω

$$F(\Omega) = \int_0^2 \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\,dx + \int_2^3 \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx =$$

$$\int_0^2 \Big((-\frac{1}{2}x^2 + 2x) - x\Big)\,dx + \int_2^3 \Big(x - (-\frac{1}{2}x^2 + 2x)\Big)\,dx =$$

$$\int_0^2 \Big(-\frac{1}{2}x^2 + x\Big)\,dx + \int_2^3 \Big(\frac{1}{2}x^2 - x\Big)\,dx = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_2^3 = \frac{4}{3}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung mit einer hinreichenden Herleitung oder einem geeigneten Gegenbeispiel.

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,\, y) \mapsto f(x,\, y) = \int\limits_{xy}^{x^2+y^2} \sqrt{1+\cos t}\, dt$ ist im $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,\, y) \mapsto f(x,\, y) = x+y$. Dann gilt für die Richtungsableitung von f die Ungleichung $-1 \leq \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x,\, y) \leq 1$ für alle $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ und alle Richtungsvektoren $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\underline{v}\| = 1$.

(c) Die Funktion $f : [0,\, 1] \times [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ sei über $[0,\, 1] \times [0,\, 1]$ integrierbar. Dann gilt für alle $x,\, y \in [0,\, 1]$ die Gleichung

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,\, y)\, dy\, dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^y f(x,\, y)\, dx\, dy.$$

(d) Sind die Funktionen $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt für alle $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x) \cdot g(y)\, dy\, dx = \left(\int\limits_a^b f(x)\, dx \right) \cdot \left(\int\limits_c^d g(y)\, dy \right).$$

Lösung:

(a) Die Aussage ist richtig. Da der Integrand stetig ist und die Integrationsgrenzen stetig partiell nach x und y differenzierbare Funktionen sind, ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Funktion f stetig partiell differenzierbar. Daraus folgt die totale Differenzierbarkeit von f.

(b) Die Aussage ist falsch. Für den Gradienten von f gilt $\nabla f(x,\, y) = \binom{1}{1}$. Für alle $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ hat die Richtungsableitung in die Richtung $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ den Wert $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x,\, y) = \sqrt{2} > 1$.

(c) Die Aussage ist falsch. Die Funktion f mit $f(x,\, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ -2, & 0 \leq x < y \leq 1 \end{cases}$

ist integrierbar, da sie mit Ausnahme der Nullmenge $\{(x,\, x) \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$ stetig ist. Für diese Funktion ist

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,\, y)\, dy\, dx = 1 \text{ und } \int\limits_0^1 \int\limits_0^y f(x,\, y)\, dx\, dy = -1$$

(d) Die Aussage ist richtig. Durch Ausklammern erhält man:

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x) \cdot g(y)\, dy\, dx = \int\limits_a^b f(x) \cdot \left(\int\limits_c^d g(y)\, dy \right) dx = \left(\int\limits_a^b f(x)\, dx \right) \cdot \left(\int\limits_c^d g(y)\, dy \right).$$

Aufgabe 5 (21 Punkte)
Es sei ein Vektor $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$, $n \geq 2$, gegeben. Betrachten Sie die Matrix $A := w \cdot w^T$. Dabei bezeichnet w^T den transponierten Vektor von w.

(a) Welchen Rang und welche Determinante besitzt A?

(b) Zeigen Sie, dass 0 Eigenwert von A ist.

(c) Bestimmen Sie den zu dem Eigenwert 0 gehörenden Eigenraum von A an.

Lösung:
Es gilt mit $w^T = (w_1 \dots w_n)$:

$$A = w \cdot w^T = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w^T \\ \vdots \\ w_n \cdot w^T \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

(a) Da einerseits jede Zeile von A ein Vielfaches von w^T ist und andererseits wegen $w \neq 0$ die Matrix A auch eine Nichtnullzeile besitzt, d.h. $w_j \cdot w^T \neq 0$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$, muss rg $A = 1$ sein.
Weil $n \geq 2$ und rg $A = 1$, hat A nicht den vollen Rang, so dass $\det A = 0$.

(b) Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E)$ (E Einheitsmatrix).
Nach (a) gilt: $0 = \det A = \det(A - 0 \cdot E)$. Also ist 0 Eigenwert von A.

(c) Es gilt für den Eigenraum von A zum Eigenwert 0, Eig(0):

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Eig}(0) \quad &\Leftrightarrow \quad Av = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} w_1 \cdot w^T \cdot v \\ \vdots \\ w_n \cdot w^T \cdot v \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad < w, v > = 0 \quad \big(\text{ wegen } w \neq 0\big). \end{aligned}$$

Also ist Eig(0) der $\big((n-1)$ - dimensionale$\big)$ Orthogonalraum zu w:

$$\mathrm{Eig}(0) = \{\, v \in \mathbb{R}^n \mid\ < w, v > = 0\} \,.$$

Aufgabe 6 (16 Punkte)
Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt *Spiegelung*, wenn sie $\varphi^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ erfüllt, wobei $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ die identische Abbildung auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.
Bzgl. der Standardbasis $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ sei nun eine konkrete lineare Abbildung φ durch die folgende darstellende Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ eine Spiegelung ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B_1 von $\mathrm{Kern}\,(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ sowie eine Basis B_2 von $\mathrm{Kern}\,(\varphi + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

(c) Zeigen Sie, dass $B := B_1 \cup B_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung:

(a) Da
$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 8 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$
gilt, ist φ eine Spiegelung.

(b) Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem $(A - E)x = 0$.
Elementare Zeilenumformungen liefern
$$\begin{pmatrix} -6 & 8 & 6 \\ -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
und damit die Lösungsgesamtheit:
$$x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}.$$
Also ist $B_1 := \left\{(4\ 3\ 0)^T,\ (1\ 0\ 1)^T\right\}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Analog ist das lineare Gleichungssytem $(A + E)x = 0$ zu lösen.
Elementare Zeilenumformungen liefern
$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
und damit die Lösungsgesamtheit:
$$x = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$
Also ist $B_2 := \left\{(2\ 1\ 0)^T\right\}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(\varphi + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

(c) Erste Möglichkeit:
Die beiden Basen $B_{1,2}$ sind Basen von zwei Eigenräumen zu den verschiedenen Eigenwerten ± 1. Damit besteht $B = B_1 \cup B_2$ aus drei linear unabhängigen Vektoren, die somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Zweite Möglichkeit:
Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

besteht $B = B_1 \cup B_2$ aus drei linear unabhängigen Vektoren, die somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.