Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Oktober 2015

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 16. Oktober 2015 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 6 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 16 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 2 Teilnehmer die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung mit einer hinreichenden Herleitung oder einem geeigneten Gegenbeispiel.

(a) Die Funktion f sei auf $(0, \infty)$ differenzierbar. Dann gilt $\frac{d}{dx} f(\sqrt{x}) = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

(b) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiere $f'(1)$. Dann gilt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

(c) Ist die Funktion f stetig auf $[0, \infty)$ und gilt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, so existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty f(x)\, dx$.

(d) Ist die Ableitung f' von f stetig auf $[0, \infty)$ und gilt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, so folgt $\int\limits_0^\infty f'(x)\, dx = -f(0)$.

Lösung:

(a) Die Aussage ist richtig. Aus der Kettenregel folgt
$\frac{d}{dx} f(\sqrt{x}) = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(b) Die Aussage ist richtig. Aus der Existenz von $f'(1)$ folgt die Stetigkeit von f im Punkt $x = 1$ und damit gilt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

(c) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Die Funktion f ist in $[0, \infty)$ stetig und es gilt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. Das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty f(x)\, dx$ existiert nicht, da
$\int\limits_0^R f(x)\, dx = \ln(1 + x)\Big|_0^R = \ln(R + 1) \to \infty$ für $R \to \infty$.

(d) Die Aussage ist richtig. Es ist
$\int\limits_0^\infty f'(x)\, dx = \lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_0^R f'(x)\, dx \overset{\text{HDI}}{=} \lim\limits_{R \to \infty} f(x)\Big|_0^R = \lim\limits_{R \to \infty} \big(f(R) - f(0)\big) = -f(0)$, da nach Voraussetzung $\lim\limits_{R \to \infty} f(R) = 0$ gilt.

Aufgabe 2 (17 Punkte)

(a) Skizzieren Sie den Konvergenzbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k$.

(b) Stellen Sie in D die Funktion $f(x,\, y) = \sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k$ als rationale Funktion dar.

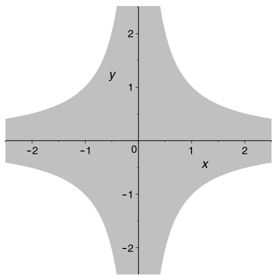
(c) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,\, y)$ und bestimmen Sie alle $(x,\, y) \in D$ mit $\nabla f(x,\, y) = \underline{0}$.

(d) Hat die Funktion f im Punkt $(0,\, 0)$ ein lokales Maximum bzw. Minimum?

Lösung:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k$ ist eine geometrische Reihe, die im Bereich $|xy| = |x| \cdot |y| < 1$ konvergiert.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Bereich D



(b) Für $(x,\, y) \in D$ gilt $f(x,\, y) = \dfrac{1}{1-xy}$.

(c) Es ist $\nabla f(x,\, y) = \frac{1}{(1-xy)^2}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ und $\nabla f(x,\, y) = \underline{0} \Longleftrightarrow (x,\, y) = (0,\, 0)$.

(d) Im Punkt $(0,\, 0)$ liegt weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum von f vor. Dies kann man wie folgt nachweisen:

1. Weg: Für alle $0 < \varepsilon < 1$ gilt $f(\varepsilon,\, \varepsilon) = \dfrac{1}{1-\varepsilon^2} > 1 = f(0,\, 0)$ und

$f(\varepsilon,\, -\varepsilon) = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2} < 1 = f(0,\, 0)$.

2. Weg: Die Hesse-Matrix von f ist $Hf(x,\, y) = \dfrac{1}{(1-xy)^3}\begin{pmatrix} 2y^2 & 1+xy \\ 1+xy & 2x^2 \end{pmatrix}$,

und es gilt $\det\big(Hf(0,\, 0)\big) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$.

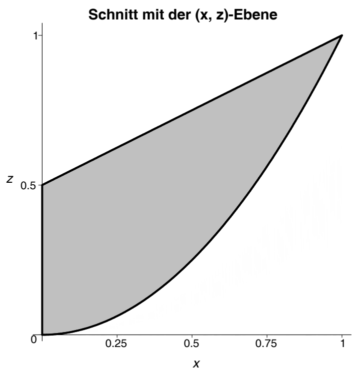
Aufgabe 3 (17 Punkte)
Es seien $K = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ und
$\Omega = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,\, y) \in K,\, x^2 + y^2 \leq z \leq \frac{1}{2}(x+1)\right\}$.

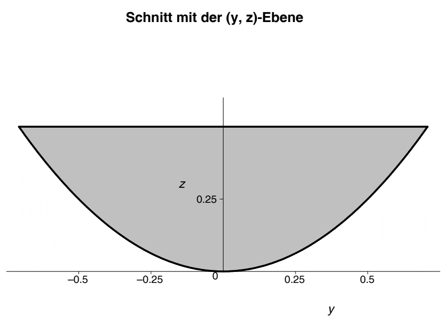
(a) Skizzieren Sie die Schnitte von Ω mit der $(x,\, z)$-Ebene und mit der $(y,\, z)$-Ebene.

(b) Berechnen Sie das Volumen von Ω.

Lösung:

(a) Die Skizzen der Schnitte sind





(b) Durch Verwendung von Polarkoordinaten bei der Integration über K erhält man für das Volumen von Ω:

$$V = \int_{\Omega} d(x,\, y,\, z) = \int_{K} \left(\frac{1}{2}(x+1) - (x^2 + y^2)\right) d(x,\, y) =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2}(r\cos\varphi + 1) - r^2\right) r\, dr\, d\varphi =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^3}{6}\cos\varphi + \frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\varphi =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{6}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{6}\sin\varphi\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Es ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

(b) Prüfen Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Lösung:

(a) Eigenwerte:
Als charakteristisches Polynom von A ergibt sich (z.B. per Entwicklung nach der 3.Spalte):

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)^2 (2 - \lambda)$$

mit den offensichtlichen Nullstellen = Eigenwerten: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$.

Eigenräume:
Die beiden Eigenräume $E_j, j \in \{1, 2\}$, erhält man als Lösungsräume der beiden 3 x 3 homogenen linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda_j I)x = 0$:

$$E_1 = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } E_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Beide Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ besitzen wegen $\dim E_1 = 1 = \dim E_2$ (vgl. (a)) die geometrische Vielfachheit 1, $\lambda_1 = -1$ hat jedoch die algebraische Vielfachheit 2. Demzufolge kann A nicht diagonalisierbar sein.

Aufgabe 5 (15 Punkte)
Es sind die folgenden drei Vektoren im $\mathbb{R}^4$ gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei $U := \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden drei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$ eine Basis für U bilden:

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Lässt sich $\{w_1, w_2, w_3\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen?
Wenn ja, geben Sie eine geeignete Ergänzung an.

Lösung:

(a) Die drei Vektoren $w_j, j \in \{1,2,3\}$, lassen sich durch $v_k, k \in \{1,2,3\}$, erzeugen:

$$w_1 = v_1 - v_2 + v_3, \quad w_2 = v_2 - v_1, \quad w_3 = v_3 - v_2,$$

liegen also in U.
Weiterhin sind $w_j, j \in \{1,2,3\}$, linear unabhängig, denn:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Wegen $\dim U \leq 3$ bilden die drei linear unabhängigen Vektoren $w_j, j \in \{1,2,3\}$, aus U eine Basis von U.

(b) Ja, denn $w_j, j \in \{1,2,3\}$, aus $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig nach (a) und lassen sich damit nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen.
Konkret liefert die Ergänzung durch den vierten Einheitsvektor eine Basis:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Aufgabe 6 (15 Punkte)
Es sei V der reelle Vektorraum der reellen 2×2 Matrizen $M_2(\mathbb{R})$.
Die Abbildung $F : V \to V$ sei definiert durch

$$F(X) := AX - XA \text{ für } X \in V$$

mit der festen Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass F linear ist.

(b) Bestimmen Sie Kern(F) und Bild(F) und zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{Kern}(F) \cap \mathrm{Bild}(F) = \{\lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Lösung:

(a) F ist linear, denn:

$$\begin{aligned} F(X+Y) =& A(X+Y) - (X+Y)A \\ =& (AX - XA) + (AY - YA) = F(X) + F(Y) \text{ für } X, Y \in V \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(\lambda X) =& A(\lambda X) - (\lambda X)A \\ =& \lambda(AX - XA) = \lambda F(X) \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}, X \in V. \end{aligned}$$

(b) Sei $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$.
Dann ist

$$AX - XA = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{11} \\ 0 & x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} - x_{11} \\ 0 & -x_{21} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\mathrm{Bild}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Weiterhin gilt $AX - XA = 0$ genau dann, wenn $x_{21} = 0$ und $x_{11} = x_{22}$.
Also

$$\mathrm{Kern}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es folgt

$$\mathrm{Kern}(F) \cap \mathrm{Bild}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; b \in \mathbb{R} \right\} = \{\lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$