Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Mai 2015

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 16. Mai 2015 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 6 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 12 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 7 Teilnehmer die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (16 Punkte)

(a) Gegeben sind die Funktionen $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{1}{3}\left(2x + \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{und} \quad g(x) := f(x) - x$$

Zeigen Sie:

(i) Für $x \geq 1$ gilt $f(x) \geq 1$.

(ii) Für $x \geq 1$ gilt $g(x) \leq 0$.

(b) Die reelle Zahlenfolge $\left(x_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 \geq 1 \quad \text{und} \quad x_{k+1} := f(x_k) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

mit der oben angegebenen Funktion f.

(i) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $x_k \geq 1$ und $x_{k+1} - x_k \leq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Begründen Sie, dass die Folge $\left(x_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Lösung:

(a) (i) Für $x > 1$ ist $f'(x) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) > 0$. Daher ist die Funktion f im Intervall $(1, \infty)$ streng monoton wachsend. Mit $f(1) = 1$ folgt die Behauptung.

(ii) Für $x > 0$ ist $g'(x) = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{x^3}\right) < 0$. Daher ist die Funktion g im Intervall $(0, \infty)$ streng monoton fallend. Mit $g(1) = 0$ folgt die Behauptung.

(b) (i) Der Nachweis erfolgt mittels vollständiger Induktion: Nach Definition ist $x_1 \geq 1$. Aus der Ungleichung $x_k \geq 1$ folgt $x_{k+1} = f(x_k) \geq 1$. Damit gilt $x_k \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Aus $x_k \geq 1$ folgt $x_{k+1} - x_k = f(x_k) - x_k = g(x_k) \leq 0$.

(ii) Die Folge ist monoton fallend und beschränkt, und daher existiert der Grenzwert $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Durch Grenzübergang $k \to \infty$ in der Rekursionsgleichung $x_{k+1} = f(x_k)$ erhält man (die Funktion f ist stetig) die Gleichung $x = f(x)$ oder gleichbedeutend $g(x) = 0$. Aus der strengen Monotonie der Funktion g und der Ungleichung $x_k \geq 1$ folgt $x = 1$.

Aufgabe 2 (17 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom ersten Grades $T_1(x,\,1)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \frac{1}{10}$ die Abschätzung

$$R_1(x,\,1) < 0{,}035\,\mathrm{e}^{-0{,}81}$$

gilt, wobei $R_1(x,\,1)$ das Restglied bezeichnet. Verwenden Sie dabei die Lagrange'sche Restgliedarstellung.

Lösung:

(a) Es gilt $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ und $f'(1) = -\frac{2}{\mathrm{e}}$. Damit erhalten wir als Taylorpolynom 1. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$

$$T_1(x,\,1) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{2}{\mathrm{e}}(x-1).$$

(b) Mit der zweiten Ableitung $f''(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2} + 4x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} = 2(2x^2-1)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ erhalten wir das Lagrange'sche Restglied als

$$R_1(x,\,1) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2 = (2\xi^2-1)\,\mathrm{e}^{-\xi^2}(x-1)^2$$

mit einem geeigneten ξ zwischen 1 und x. Wegen $x \in \left(\frac{9}{10},\,\frac{11}{10}\right)$ gilt auch $\xi \in \left(\frac{9}{10},\,\frac{11}{10}\right)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\left|R_1(x,\,1)\right| &= \left|2\xi^2-1\right|\mathrm{e}^{-\xi^2}\left|x-1\right|^2 \le \left(2\xi^2+1\right)\mathrm{e}^{-\xi^2}\left|x-1\right|^2 \\ &< \left(2\cdot\left(\tfrac{11}{10}\right)^2+1\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{9}{10}\right)^2}\cdot\left(\tfrac{1}{10}\right)^2 < 0{,}035\cdot\mathrm{e}^{-0{,}81}\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (17 Punkte)
Es sei $\mathbb{D} = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,\, y) := x^2 + y.$$

(a) Sei W die in $\mathbb{D}$ liegende Winkelhalbierende

$$W = \{(x,\, y) \in \mathbb{D} \,|\, y = x\}.$$

   (i) In welche Richtung ist die Richtungsableitung von f auf W am größten?

   (ii) Wie groß ist der maximale Betrag der Richtungsableitung auf W?

(b) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf $\mathbb{D}$.

Lösung:

(a) (i) Die Richtungsableitung an der Stelle $(x,\, x) \in \mathbb{W}$ ist am größten in Richtung des Gradienten $\nabla f(x,\, x) = \binom{2x}{1}$.

   (ii) Der Betrag der Richtungsableitung ist

$$\|\nabla f(x,\, x)\| = \sqrt{1 + 4x^2}.$$

   Dieser nimmt auf W, also für $2x^2 \leq 1$, den größtmöglichen Wert für $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ an. Der maximale Betrag der Richtungsableitung ist daher

$$\sqrt{1 + 4 \cdot \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

(b) Wegen $\nabla f \neq \underline{0}$ werden die globalen Extrema von f auf $\mathbb{D}$ auf dem Rand angenommen. Dies sind die Extrema der Funktion f under der Nebenbedingung $g(x,\, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Zur Lösung dieser Aufgabe gibt es zwei gleichwertige Lösungswege:

1. Weg: Lagrange-Multiplikatoren:
Mit der Lagrangefunktion $L(x,\, y,\, \lambda) = f(x,\, y) + \lambda g(x,\, y)$ erhalten wir die Bedingungen $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ und $g(x,\, y) = 0$, also

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x &= 0 \\ 1 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt entweder $x = 0$ oder $\lambda = -1$. Der Fall $x = 0$ ergibt die beiden Stellen $(0,\, 1)$ und $(0,\, -1)$. Ist $\lambda = -1$, so folgt aus der zweiten Gleichung $y = \frac{1}{2}$, und damit ergeben sich die beiden Punkte $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\, \frac{1}{2}\right)$ und $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\, \frac{1}{2}\right)$.
Die Funktionswerte an diesen Stellen sind $f(0,\, 1) = 1$, $f(0,\, -1) = -1$ und $f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$. Damit besitzt f das lokale Minimum an der Stelle $(0,\, -1)$ mit dem Funktionswert -1 und zwei globale Maxima an den Stellen $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\, \frac{1}{2}\right)$ mit dem Funktionswert $\frac{5}{4}$.

2. Weg: Elimination von x^2:

Aus der Nebenbedingung folgt $x^2 = 1 - y^2$. Durch Einsetzen in f erhalten wir auf dem Rand von $\mathbb{D}$ die Funktion

$$h(y) := 1 - y^2 + y,\ -1 \leq y \leq 1.$$

Mögliche Extremalstellen von h sind die Randpunkte $y = \pm 1$ mit den Funktionswerten $h(-1) = -1$ und $h(1) = 1$ sowie die Nullstelle der Ableitung $h'(y) = 1 - 2y$, also $y = \frac{1}{2}$ mit dem Funktionswert $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$. Damit hat h sein Minimum bei $y = -1$, und mit $x^2 = 1 - y^2$ ergibt das die Minimalstelle $(0, -1)$. Das Maximum von h wird an der Stelle $y = \frac{1}{2}$ angenommen, und dies ergibt die beiden Maximalstellen $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Es seien zwei quadratische Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ und ein Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben.
Kreuzen Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob diese wahr oder falsch ist?

Sie brauchen Ihre Antworten nicht begründen. Eine richtige Antwort wird mit zwei Punkten, eine falsche mit dem Abzug zweier Punkte und eine Aussage ohne Entscheidung mit 0 Punkten bewertet. Für die gesamte Aufgabe erhalten Sie mindestens 0 Punkte.

(a) Es gilt Rang $(A + B) \geq \min\{\text{Rang }(A), \text{Rang }(B)\}$

☐ wahr ☐ falsch

(b) Es ist Rang $(c \cdot c^T) = 1$, falls $c \neq 0$.

☐ wahr ☐ falsch

(c) Es ist Rang $(c^T \cdot c) = 1$, falls $c \neq 0$.

☐ wahr ☐ falsch

(d) Es gilt Rang $(A \cdot B) = $ Rang $(B \cdot A)$.

☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

(a) Es gilt Rang $(A + B) \geq \min\{\text{Rang }(A), \text{Rang }(B)\}$

☐ wahr ☒ falsch

(b) Es ist Rang $(c \cdot c^T) = 1$, falls $c \neq 0$.

☒ wahr ☐ falsch

(c) Es ist Rang $(c^T \cdot c) = 1$, falls $c \neq 0$.

☒ wahr ☐ falsch

(d) Es gilt Rang $(A \cdot B) = $ Rang $(B \cdot A)$.

☐ wahr ☒ falsch

Aufgabe 5 (16 Punkte)
Es sei die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x-y+2z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ von T und den Rang von A.

(b) Geben Sie eine Basis B_1 von Kern (T) und eine Basis B_2 von Bild (T) an. Prüfen Sie, ob $B_1 \cup B_2$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung:

(a) Die Spalten der Abbildungsmatrix A von T bestehen genau aus den Bildern der Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ unter T:

$$A = \big(T(e_1)\ T(e_2)\ T(e_3)\big) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Überführt man A durch elementare Zeilenumformungen (z.B. erste Zeile von zweiter und dritter, anschließend zweimal die zweite Zeile von der dritten subtrahieren) auf Zeilenstufenform, so erhält man z.B.:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da elementare Zeilenumformungen den Rang einer Matrix nicht ändern, ist der Rang von A zwei (= Anzahl der Nichtnullzeilen der Zeilenstufenform).

(b) Wegen $\operatorname{Rang}(A) = 2 = \dim \operatorname{Bild}(T)$ gilt nach Dimensionsformel $\dim \operatorname{Kern}(T) = 3 - \dim \operatorname{Bild}(T) = 1$.
Die normierte Zeilenstufenform (zweite Zeile zu erster addiert in Zeilenstufenform aus (a)) von A lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Spalte liefert damit eine Basis für Kern (T), genauer:

$$\operatorname{Kern}(T) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

d.h. also

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Da der erste und zweite Spaltenvektor von A linear unabhängig sind, in Bild (T) liegen und $\dim \text{Bild}\,(T) = 2$, gilt:

$$\text{Bild}\,(T) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

d.h. also

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$B_1 \cup B_2$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$, da:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Aufgabe 6 (16 Punkte)
Gegeben sei eine invertierbare quadratische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Für die charakteristischen Polynome P_A von A und $P_{A^{-1}}$ von A^{-1} gilt:

$$\det(A) \cdot P_{A^{-1}}(\lambda) = (-\lambda)^n \cdot P_A(\lambda^{-1}),\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Hinweis: $P_{A^{-1}}(\lambda) = \det(A^{-1} - \lambda E_n)$

(b) Ist A ähnlich zu A^{-1}, d.h. gibt es eine invertierbare Matrix $S \in M_n(\mathbb{R})$ mit $S^{-1} A\, S = A^{-1}$, so gilt $\det A \in \{-1, 1\}$.

Lösung:

(a) Es gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \det(A) \cdot P_{A^{-1}}(\lambda) &= \det(A) \cdot \det(A^{-1} - \lambda E_n) \\ &= \det(A(A^{-1} - \lambda E_n)) \\ &= \det(E_n - \lambda A) \\ &= \det(-\lambda(A - \lambda^{-1} E_n)) = (-\lambda)^n \cdot P_A(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Multiplikationssatz für Determinanten:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(S^{-1} S) \det(A) = \det(S^{-1}) \det(A) \det(S) = \det(S^{-1} A S) \\ &= \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \end{aligned}$$

Also folgt $\det(A)^2 = 1$ und damit $\det(A) \in \{-1, 1\}$.