Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Mai 2014

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 10. Mai 2014 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 18 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 9 Teilnehmer die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (16 Punkte)

(a) Beweisen Sie: Für eine Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n} \text{ divergent.}$$

(b) Beweisen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}$ konvergiert.

Lösung:

(a) Aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = 1 \neq 0$. Damit ist die zur Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ notwendige Bedingung nicht erfüllt. Die Reihe ist daher divergent.

(b) Es ist $0 < a_n = \frac{\arctan n}{1+n^2} < \frac{\pi}{2(1+n^2)} < \frac{\pi}{2n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ folgt nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 2 (21 Punkte)
In einer Süßwarenfabrik werde die Produktion durch eine Funktion

$$f(x,\,y) = 4x + xy + 2y \quad \text{für} \quad x, y \geq 0$$

beschrieben. Hierbei gibt x die bei der Produktion anfallende Anzahl von Arbeitseinheiten und y die Anzahl der benötigten Materialeinheiten an. Insgesamt stehen für Arbeit und Material 2000€ zur Verfügung, wobei eine Arbeitseinheit 20€ und eine Materialeinheit 4€ kosten. Der Hersteller möchte die maximal mögliche Produktion ermitteln.

(a) Formulieren Sie das zu lösende Extremwertproblem. Geben Sie die Zielfunktion und alle einzuhaltenden Nebenbedingungen an.

(b) Bestimmen Sie die maximale Anzahl der produzierten Einheiten für diesen Hersteller.

Lösung:

(a) Gesucht ist das Maximum der Zielfunktion $f(x,\,y) = 4x + xy + 2y$. Die Nebenbedingungen lauten $x \geq 0$, $y \geq 0$ und $g(x,\,y) := 20x + 4y = 2000$.

(b) Zur Lösung der Extremwertaufgabe gibt es mehrere gleichwertige Lösungswege:

1. Weg: Lagrange-Multiplikatoren:
Mit der Lagrangefunktion $L(x,\,y,\,\lambda) = f(x,\,y) + \lambda(g(x,\,y) - 2000)$ erhält man zunächst die Bedingungen $4 + y = 20\lambda$, $x + 2 = 4\lambda$ sowie $20x + 4y = 2000$. Eliminiert man aus den ersten beiden Gleichungen den Parameter λ mittels $4+y = 20\lambda = 5x+10$, so folgt $5x - y = -6$. Für die Größen x und y erhält man somit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 5x - y & = & -6 \\ 20x + 4y & = & 2000 \end{array} \qquad \text{also} \qquad \begin{array}{rcl} 20x - 4y & = & -24 \\ 20x + 4y & = & 2000 \end{array}$$

$$\text{Aus} \qquad \begin{array}{rcl} 20x - 4y & = & -24 \\ 8y & = & 2024 \end{array} \qquad \text{folgt} \qquad y = 253 \text{ und } x = 49.4$$

Damit erhält man als Kandidaten für das Maximum von f die Punkte $(0,\,500)$, $(100,\,0)$ und $(49.4,\,253)$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind $f(0,\,500) = 1000$, $f(100,\,0) = 400$ und $f(49.4,\,253) = 13201.8$
Die maximale Anzahl der produzierten Einheiten ist 13201.

2. Weg: Elimination von y:
Aus den Nebenbedingungen $20x + 4y = 2000$, $x,\,y \geq 0$ kann man y eliminieren und erhält $20x + 4y = 2000$, also $y = 500 - 5x$. Aus der Bedingung $y \geq 0$ wird $500 - 5x \geq 0$, also $x \leq 100$. Damit erhält man das zur ursprünglichen Aufgabenstellung äquivalente Extremwertproblem: Suche das Maximum der Funktion $r(x) := f(x,\,500-5x) = 4x + x(500-5x) + 2(500-5x) = -5x^2 + 494x + 1000$ für $0 \leq x \leq 100$.

Der Graph von r ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren Scheitel an der Nullstelle von $r'(x) = -10x + 494$, also bei $x_0 = 49.4$ liegt. Dieser Wert liegt im Intervall $[0, 100]$ und ist daher die gesuchte Extremalstelle. Die maximale Anzahl der produzierten Einheiten ist daher $r(49.4) = 13201$.

3. Weg: Elimination von x:
Aus den Nebenbedingungen $20x + 4y = 2000$, $x, y \geq 0$ kann man x eliminieren und erhält $20x + 4y = 2000$, also $x = 100 - \frac{1}{5}y$. Aus der Bedingung $x \geq 0$ wird $100 - \frac{1}{5}y \geq 0$, also $y \leq 500$. Damit erhält man das zur ursprünglichen Aufgabenstellung äquivalente Extremwertproblem: Suche das Maximum der Funktion $h(y) := f(100 - \frac{1}{5}y, y) = 4(100 - \frac{1}{5}y) + (100 - \frac{1}{5}y)y + 2y = -\frac{1}{5}y^2 + \frac{506}{5}y + 400$ für $0 \leq y \leq 500$. Der Graph von h ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren Scheitel an der Nullstelle von $h'(y) = -\frac{2}{5}y + \frac{506}{5}$, also bei $y_0 = 253$ liegt. Dieser Wert liegt im Intervall $[0, 500]$ und ist daher die gesuchte Extremalstelle. Die maximale Anzahl der produzierten Einheiten ist daher $h(253) = 13201$.

Aufgabe 3 (18 Punkte)
Es seien

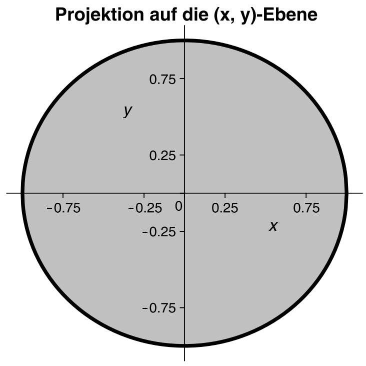
$$K = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ und } \Omega = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,\, y) \in K,\, 0 \leq z \leq x+2\}.$$

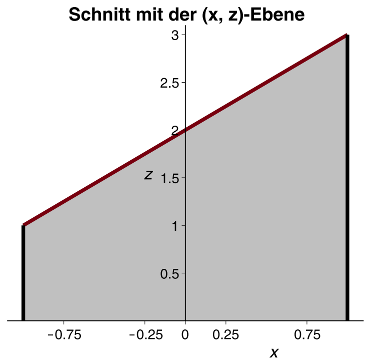
(a) Skizzieren Sie die Projektion von Ω auf die $(x\,y)$-Ebene und den Schnitt von Ω mit der $(x,\, z)$-Ebene.

(b) Berechnen Sie das Volumen von Ω.

Lösung:

(a) Die Skizzen sind:





(b) Zur Berechnung des Volumens gibt es mehrere gleichwertige Mögichkeiten:

1. Weg: Das Volumen von Ω ist $V = \int\limits_{\Omega} d(x,\, y,\, z) = \int\limits_{K} (x+2)\, d(x,\, y)$.
Durch Übergang zu Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ergibt sich:

$$V = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{1} (r\cos\varphi + 2) r \, dr\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{1} r^2 \cos\varphi + 2r \, dr\, d\varphi =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{3} r^3 \cos\varphi + r^2\right)\Big|_{r=0}^{r=1} d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{3}\cos\varphi + 1\right)\, d\varphi =$$

$$\tfrac{1}{3}\sin\varphi + \varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

2. Weg: Das Volumen, das für negative x unterhalb von $z = 2$ abgeschnitten wird, ist gleich dem Volumen, das für positive x dazukommt. Daher gilt $V = 2\pi$.

Aufgabe 4 (19 Punkte)
Zeigen Sie für eine quadratische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$:

(a) Es gibt eine symmetrische Matrix $M \in M_n(\mathbb{R})$, d.h. $M^T = M$, und eine schiefsymmetrische Matrix $S \in M_n(\mathbb{R})$, d.h. $S^T = -S$, so dass die Darstellung $A = M + S$ gilt.
Führen Sie zu allen Rechenschritten mit Matrizen die zugehörigen Rechenregeln für Matrizen auf.
(Möglicher Ansatz: Betrachten Sie die Matrix $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ genauer, wobei A^T die zu A transponierte Matrix bezeichnet.)

(b) Falls $E - A$ invertierbar ist, gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:
$$(E-A)^{-1} \cdot \left(E - A^{m+1}\right) = \sum_{k=0}^{m} A^k$$
Hierbei wird $A^0 := E$ und $A^k := A \cdot A^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$ gesetzt, wobei $E = E_n \in M_n(\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix darstellt.
Führen Sie zu allen Rechenschritten mit Matrizen die zugehörigen Rechenregeln für Matrizen auf.

Lösung:

(a) Man setze $M := \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ und $S := A - M$, so dass $A = M + S$ gilt.
Dann ist M symmmetrisch, da
$$M^T = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T + \left(A^T\right)^T\right) = \frac{1}{2}\left(A^T + A\right) = M,$$
und $S = A - \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ schiefsymmterisch, da
$$S^T = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T - \left(A^T\right)^T\right) = \frac{1}{2}\left(A^T - A\right) = -S.$$
Verwendet wurden dabei die Rechenregeln $(A+B)^T = A^T + B^T$ und $\left(A^T\right)^T = A$.

(b) Wegen
$$\begin{aligned}
(E-A) \cdot \sum_{k=0}^{m} A^k &= E \cdot \sum_{k=0}^{m} A^k - A \cdot \sum_{k=0}^{m} A^k \text{(Distributivität)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} A^k - \sum_{k=0}^{m} A^{k+1} && \text{(Neutralität}(\cdot)\text{; Distributivität)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} A^k - \sum_{k=1}^{m+1} A^k && \text{(Indexverschiebung)} \\
&= A^0 - A^{m+1} && \text{(Kommutativität}(+)\text{,Inverse El.}(+)\text{)} \\
&= E - A^{m+1} && \text{(Definition von } A^0\text{)}
\end{aligned}$$
ergibt sich im Falle der Invertierbarkeit von $E - A$ durch Multiplikation mit der Inversen $(E-A)^{-1}$ von links die Behauptung:
$$(E-A)^{-1} \cdot \left(E - A^{m+1}\right) = (E-A)^{-1} \cdot (E-A) \sum_{k=0}^{m} A^k = \sum_{k=0}^{m} A^k.$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)
Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit zwei reellen Parametern c, d:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & cx_3 & = & -6 \\ -2x_1 & + & 8x_2 & + & 14x_3 & = & d \end{array}$$

(a) Überführen Sie das Gleichungssystem in Zeilenstufenform (Treppenform). Geben Sie bei jedem Schritt die verwendeten elementaren Zeilenumformungen an.

(b) Bestimmen Sie alle Parameterpaare $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, so dass die Lösungsgesamtheit jeweils eine Gerade darstellt.
Geben Sie für jedes dieser Paare die Lösungsgesamtheit an.

Lösung:

(a) Das Gleichungssystem wird folgendermaßen auf Zeilenstufenform (Treppenform) gebracht:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -4 & c & -6 \\ -2 & 8 & 14 & d \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II:=II + 4*I;III:=III-2*I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & c+12 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & d-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III:=III-II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & c+12 & 2 \\ 0 & 0 & -c-4 & d-6 \end{array}\right)$$

(b) Sei $Ax = b$ das gegebene Gleichungssystem mit $A \in M_3(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^3$.
Soll die Lösungsgesamtheit eine Gerade darstellen, muss $\det A = 0$ und gleichzeitig $\mathrm{rg} A = 2$ sein.
Das lässt sich nur mit $c = -4$ erreichen, wie der Zeilenstufenform in a) unmittelbar zu entnehmen ist.
Damit das Gleichungssystem in diesem Falle lösbar ist, muss auch $\mathrm{rg}(A, b) = 2$ gelten. Dieses lässt sich nur mit $d = 6$ herstellen.
Also liefert genau das reelle Parameterpaar $(-4, 6)$ eine Gerade als Lösungsgesamtheit:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

hergeleitet direkt aus normierter Zeilenstufenform (reduzierter Treppenform):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$