Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Oktober 2013

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 11. Oktober 2013 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 14 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 3 Teilnehmer die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

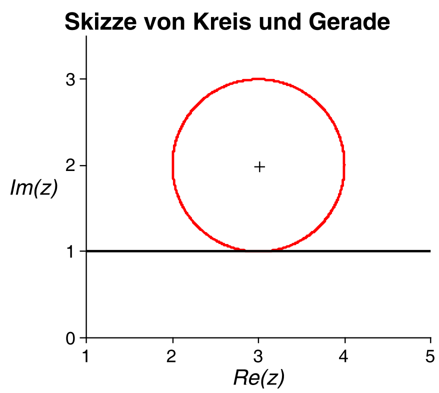
Aufgabe 1 (13 Punkte)

(a) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Mengen $\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \left|z - \frac{4+7i}{2+i}\right| = 1\right\}$ und $\{z \in \mathbb{C} \,:\, i\,\overline{z} - iz - 2 = 0\}$.

(b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl, die die Gleichungen $\left|z - \frac{4+7i}{2+i}\right| = 1$ und $i\,\overline{z} - iz - 2 = 0$ erfüllt.

Lösung:

(a) $\left|z - \frac{4+7i}{2+i}\right| = 1$ ist die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt $\frac{4+7i}{2+i} = 3+2i$ und Radius 1 und $i\,\overline{z} - iz - 2 = 0 \iff \Im z = 1$ ist die Gleichung der Gerade $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \,:\, y = 1\}$. Die beiden Mengen sind in der folgenden Skizze dargestellt:



(b) Setzt man $\Im z = 1$ in die Kreisgleichung ein, so erhält man:

$$|(x+i) - (3+2i)| = \left|(x-3) - i\right| = \sqrt{(x-3)^2 + 1} = 1 \iff x = \Re z = 3.$$

Damit lautet die gesuchte Zahl $z = 3 + i$.

Aufgabe 2 (19 Punkte)
Gegeben sei die Funktionenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k2^k \,\mathrm{e}^{-kx}, \; x \in [1,\, 2].$$

(a) Beweisen Sie, dass die Funktionenreihe auf $[1,\, 2]$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_1^2 f(x)\,dx$ für die Grenzfunktion f aus (a).

Lösung:

(a) Für alle $x \in [1,\, 2]$ ist $\left|k2^k \,\mathrm{e}^{-kx}\right| = k\left(\frac{2}{\mathrm{e}^x}\right)^k \leq k\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^k$. Weiter ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^k$ wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^k} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\,\frac{2}{\mathrm{e}} = \frac{2}{\mathrm{e}} < 1$ nach dem Wurzelkriterium konvergent. Aus dem Satz von Weierstraß folgt die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe auf $[1,\, 2]$.

(b) Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz folgt:

$$\int\limits_1^2 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_1^2 k2^k \,\mathrm{e}^{-kx}\;dx\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-2^k \,\mathrm{e}^{-kx}\right)\Big|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} -\left(\frac{2}{\mathrm{e}^2}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^k =$$

$$-\frac{\frac{2}{\mathrm{e}^2}}{1-\frac{2}{\mathrm{e}^2}} + \frac{\frac{2}{\mathrm{e}}}{1-\frac{2}{\mathrm{e}}} = -\frac{2}{\mathrm{e}^2-2} + \frac{2}{\mathrm{e}-2} \approx 2,41$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,\, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y$. Zeigen Sie: Die Funktion f besitzt auf dem Dreieck $\Delta = \big\{(x,\, y)\ :\ x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y \leq 1\big\}$ genau ein globales Maximum und ein globales Minimum. Bestimmen Sie diese Extrema.
Hinweis: Verwenden Sie keine Lagrange-Multiplikatoren.

Lösung: Die lokalen Extrema von f erfüllen die Gleichung

$$\nabla f(x,\, y) = \begin{pmatrix} 4x - 4 \\ 2y - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (x,\, y) = (1,\, 1) \notin \Delta.$$

Damit liegen die gesuchten Extremalstellen am Rand von Δ.
Es ist $f_1(x) = f(x,\, 0) = 2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2$, $0 \leq x \leq 1$. Das Minimum von f_1 wird an der Stelle $x = 1$ mit dem Wert $f(1,\, 0) = -2$ angenommen, das Maximum liegt bei $x = 0$ mit dem Wert $f(0,\, 0) = 0$.
Weiter ist $f_2(y) = f(0,\, y) = y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$, $0 \leq y \leq 1$. Das Minimum von f_2 liegt bei $y = 1$ mit $f(0,\, 1) = -1$ und das Maximum bei $y = 0$ mit dem Wert $f(0,\, 0) = 0$.
Schließlich ist $f_3(x) = f(x,\, 1-x) = 3x^2 - 4x - 1 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}$, $0 \leq x \leq 1$. Das Minimum von f_3 wird an der Stelle $x = \frac{2}{3}$ angenommen und hat den Wert $f\left(\frac{2}{3},\, \frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{3}$. Die Randwerte sind $f_3(0) = f(0,\, 1) = -1$ und $f_3(1) = f(1,\, 0) = -2$, also nimmt f_3 das Maximum an der Stelle $x = 0$ mit dem Wert $f(0,\, 1) = -1$ an.
Insgesamt nimmt f auf Δ das Maximum an der Stelle $(0,\, 0)$ mit dem Maximalwert $f(0,\, 0) = 0$ an. Das Minimum liegt an der Stelle $\left(\frac{2}{3},\, \frac{1}{3}\right)$ und der Minimalwert ist $f\left(\frac{2}{3},\, \frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{3}$.

Aufgabe 4 (17 Punkte)
Es sei der $\mathbb{R}^4$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt gegeben.
Betrachten Sie dort den von den drei Vektoren

$$x = (1, 0, -1, 0)^t, \ y = (0, 1, 0, 1)^t \text{ und } z = (0, 1, 1, 1)^t$$

erzeugten Unterraum U.

(a) Geben Sie einen zu den beiden Vektoren x und y orthogonalen Vektor aus U an

(b) Geben Sie einen normierten Vektor aus

$$U^\perp := \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \ \mid \forall u \in U \ v \perp u \right\}$$

an.

Lösung: Es gilt:

$$< x, y >= 0 \text{ und } \|x\| \ = \|y\| = \sqrt{2}.$$

(a) Mit

$$\tilde{x} := \frac{1}{\sqrt{2}}\, x \text{ und } \tilde{y} := \frac{1}{\sqrt{2}}\, y$$

gilt für

$$u := z- < z, \tilde{x} > \tilde{x}- < z, \tilde{y} > \tilde{y} = \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right)^t$$

gerade

$$u \in U, \ u \perp x \text{ und } u \perp y.$$

(b) Sei $\tilde{u} := \sqrt{2}\, u$ (vgl. Lösung aus (a)).
Mit

$$w := (0, 0, 0, 1)^t \notin U \quad (\text{wegen } \det(x, y, z, w) \neq 0)$$

gilt für

$$v := \sqrt{2}\big(w- < w, \tilde{x} > \tilde{x}- < w, \tilde{y} > \tilde{y}- < w, \tilde{u} > \tilde{u}\big) = \sqrt{2}\left(0, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right)^t$$

gerade $\|v\| = 1$ und

$$v \perp x, v \perp y \text{ und } v \perp u, \text{ also } v \in U^\perp.$$

Aufgabe 5 (21 Punkte)
Es ist die Matrizengleichung

$$A \cdot X - E = A + E \cdot X \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & s \\ t & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $X \in M_2(\mathbb{R})$ gegeben.

(a) Ist die Gleichung für $s = 0$ oder $t = 0$ lösbar?
Geben Sie ggf. alle Lösungen an.

(b) Zeigen Sie:
Es gibt genau dann eine eindeutige Lösung $X \in M_2(\mathbb{R})$, wenn $s \cdot t \neq 0$ ist.
Geben Sie in diesem Fall eine Formel für die eindeutige Lösung X an.

(Hinweis: Vereinfachen Sie die gegebene Gleichung zunächst.)

Lösung:

(a) Zunächst gilt

$$\begin{aligned} A \cdot X - E = A + E \cdot X \quad &\iff \quad (A - E) \cdot X = A + E \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & s \\ t & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & s \\ t & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $s = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ t & 2 \end{pmatrix} \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ t & 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ tx_{11} & tx_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ t & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Betrachten der zweiten Spalte einerseits $x_{12} = 0$, andererseits $tx_{12} = 2$, also $x_{12} \neq 0$. Somit gibt es in diesem Fall keine Lösung.
Für $t = 0$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & s \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

welche unlösbar ist, da die zweite Zeile links eine Nullzeile, rechts hingegen keine ist.

(b) Ist $st \neq 0$, dann ist $A - E = \begin{pmatrix} 1 & s \\ t & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar (linear unabhängige Zeilen bzw. Spalten bzw. Determinante ungleich 0). Dann ist die Gleichung eindeutig lösbar mit

$$\begin{aligned} X &= (A - E)^{-1}(A + E) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ t & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & s \\ t & 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{-st} \begin{pmatrix} 0 & -s \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & s \\ t & 2 \end{pmatrix} \\ &= -\tfrac{1}{st} \begin{pmatrix} -st & -2s \\ -2t & -st + 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{st} \begin{pmatrix} st & 2s \\ 2t & st - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{t} \\ \frac{2}{s} & 1 - \frac{2}{st} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus Teil (a) ergibt sich die Umkehrung: Ist $st = 0$, dann besitzt die Gleichung keine Lösung.