Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Mai 2013

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 11. Mai 2013 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 11 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 2 Teilnehmer die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (13 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

Lösung: Gegeben sei die Aussage

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

(a) $A(2)$ ist wahr, denn

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} > 0.$$

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, für das die Aussage $A(n)$ wahr ist. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} >$$
$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 - n - 1}{\sqrt{n+1}} >$$
$$\frac{\sqrt{n}\sqrt{n} - n}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

Damit gilt $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Aufgabe 2 (22 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}, \quad x \in [-4, \infty[$$

das Taylorpolynom 1. Grades $T_1(x, 0)$ sowie das zugehörige Restglied von Lagrange $R_2(x, 0)$. (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$).

(b) Zeigen Sie, dass der relative Fehler, wenn man f auf dem Intervall $[0, 0.5]$ durch T_1 approximiert, kleiner als 0.15% ist.

Lösung:

(a) Es ist $f(x) = \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{1/4}$, also $f(0) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{16}\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{-3/4}$, also $f'(0) = \frac{1}{16}$ und $f''(x) = -\frac{3}{256}\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{-7/4}$.
Damit ist

$$T_1(x, 0) = f(0) + xf'(0) = 1 + \frac{x}{16}$$

und

$$R_2(x, 0) = \frac{x^2}{2} f''(\xi) = -\frac{3x^2}{512}\left(1 + \frac{\xi}{4}\right)^{-7/4}$$

mit einem geeigneten ξ zwischen 0 und x.

(b) Für alle $x \in [0, 0.5]$ gilt:

$$\frac{\left|f(x) - T_1(x, 0)\right|}{\left|f(x)\right|} = \frac{\left|R_2(x, 0)\right|}{\left|f(x)\right|} = \frac{3x^2}{512} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1 + \frac{\xi}{4}\right)^{7/4}\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{1/4}}}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq \frac{3x^2}{512} \leq \frac{3}{4 \cdot 512} = \frac{3}{2048} \leq \frac{3}{2000} = 0.15\%$$

Aufgabe 3 (14 Punkte)
Es seien

$$K := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\},$$
$$Z := \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,\, y) \in K,\, 0 \le z \le 1\}$$

und

$$\Omega := \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,\, y) \in K,\, 0 \le z \le x^2 + y^2\}$$

gegeben.

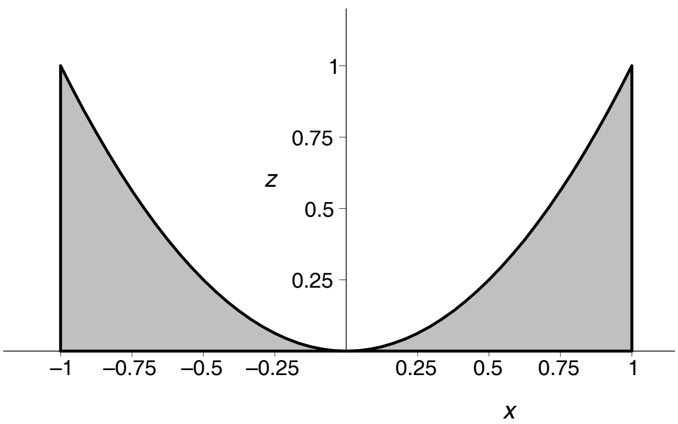
(a) Beschreiben Sie die Mengen K und Z und skizzieren Sie die Projektion von Ω auf die $(x,\, y)$-Ebene und den Schnitt von Ω mit der $(x,\, z)$-Ebene.

(b) Zeigen Sie, dass für die Volumina der Körper Ω und Z die Gleichung $V(\Omega) = \frac{1}{2}V(Z)$ gilt.

Lösung:

(a) K ist der Einheitskreis in der $(x,\, y)$-Ebene und Z der Zylinder der Höhe 1 über K. Die Projektion von Ω auf die $(x,\, y)$-Ebene ist K und der Schnitt von Ω mit der $(x,\, z)$-Ebene ist in folgender Skizze dargestellt.

Querschnitt in der (x, z)-Ebene



(b) Es ist $V(Z) = \pi$ und $V(\Omega) = \iint\limits_K (x^2 + y^2)\, d(x,\, y) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} r^2 \cdot r\, d\varphi\, dr =$

$2\pi \int\limits_0^1 r^3\, dr = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2}V(Z).$

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die drei verschiedenen reellen Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ von A und dazu jeweils einen Eigenvektor $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$.

(b) Zeigen Sie, dass $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und geben Sie die Darstellungsmatrix M von f bzgl. der Basis B an.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T_E^B des Basiswechsels von B nach E und die Transformationsmatrix $T_B^E = (T_E^B)^{-1}$ des Basiswechsels von E nach B, wobei $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis ist.

(d) Berechnen Sie die Potenzen A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).$

Aus $\det(A - \lambda E) = 0$ folgt: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

$\text{Kern}(A-\lambda_1 E) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}(\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}),$

also $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{Kern}(A-\lambda_2 E) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}(\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}),$

also $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{Kern}(A - \lambda_3 E) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$\text{span}(\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \})$, also $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$

also sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, d. h. sie bilden eine Basis im $\mathbb{R}^3$.
Für alle μ_1, μ_2, $\mu_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3) = \lambda_1(\mu_1 v_1) + \lambda_2(\mu_2 v_2) + \lambda_3(\mu_3 v_3),$$

also $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, d. h.

$x = T_E^B y$ mit $T_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und

$T_B^E = (T_E^B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $A^n = (T_E^B \cdot M \cdot T_B^E)^n = T_E^B \cdot M^n \cdot T_B^E =$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3(2^n - 1) & \frac{1}{2} - 3 \cdot 2^n + \frac{5}{2} \cdot 3^n \\ 0 & 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)
Die Menge
$$\mathcal{P} := \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$
der quadratischen Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ mit den beiden Operationen

- Addition: $(ax^2+bx+c)+(a'x^2+b'x+c') := (a+a')x^2+(b+b')x+(c+c')$
- Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot (ax^2 + bx + c) := (\lambda a)x^2 + (\lambda b)x + (\lambda c)$

für alle $(ax^2 + bx + c)$, $(a'x^2 + b'x + c') \in \mathcal{P}$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

stellt einen reellen Vektorraum dar.
(Diese Aussagen müssen nicht nachgewiesen werden. Machen Sie sich dennoch diesen Sachverhalt gedanklich klar.)

(a) Geben Sie eine Basis und die Dimension dieses Vektorraums $\mathcal{P}$ an.

(b) Bildet die Teilmenge $\mathcal{Q} = \{ax^2 + c \mid a, c \in \mathbb{R}\}$ der geraden (achsensymmetrischen) Polynomfunktionen einen Unterraum von $\mathcal{P}$?

(Begründen und beweisen Sie Ihre Antworten!)

Lösung:

(a) Eine Basis ist gegeben durch die drei Vektoren $p_0 \equiv 1$, $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x^2$, denn

- jede quadratische Polynomfunktion $p(x) = ax^2 + bx + c$ ist offensichtlich linear kombinierbar aus p_0, p_1, p_2, $p \equiv ap_2 + bp_1 + cp_0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, d. h. p_0, p_1, p_2 spannen $\mathcal{P}$ auf, und
- die drei Polynomfunktionen sind linear unabhängig,
denn die Linearkombination
$$ap_2(x) + bp_1(x) + cp_0(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{ für alle } x \in \mathbb{R})$$
besitzt nur die triviale Darstellung mit $a = b = c = 0$:
Durch Einsetzen von $x = 0$ in $ax^2 + bx + c = 0$ ergibt sich zunächst $c = 0$. Setzt man weiter $x = \pm 1$ in $ax^2 + bx = 0$ ein, so erhält man das Gleichungssystem $a + b = 0$ und $a - b = 0$, das nur die Lösungen $a = b = 0$ besitzt.

Die Dimension ist somit 3, da eine Basis mit 3 Elementen existiert.

(b) Es handelt sich um einen Unterraum, denn:

- $0 \in \mathcal{Q}$, da die Nullpolynomfunktion von der Form $0 \cdot x^2 + 0 \in \mathcal{Q}$ ist.
- Für alle Polynomfunktionen $p(x) = ax^2 + c, q(x) = a'x^2 + c' \in \mathcal{Q}$ ist auch die Summe $(p + q)(x) = (a + a')x^2 + (c + c')$ wieder in $\mathcal{Q}$.
- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle Polynomfunktionen $p(x) = ax^2 + c \in \mathcal{Q}$ ist auch $(\lambda p)(x) = (\lambda a)x^2 + (\lambda c)$ wieder gerade, also $\lambda p \in \mathcal{Q}$.