# Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Oktober 2012

**Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl**

*Am 12. Oktober 2012 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 13 Teilnehmerinnen und Teilnehmern hat ein Teilnehmer die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.*

**Aufgabe 1 (19 Punkte)**
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über reelle Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ ist konvergent.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ist konvergent.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ konvergent.

**Lösung:**

(a) Die Aussage ist falsch, da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Die Summanden der Reihe sind keine Nullfolge.

(b) Die Aussage ist richtig. Die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium.

(c) Die Aussage ist richtig. Es gilt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent $\Longrightarrow |a_n| \to 0$ für $n \to \infty$ $\Longrightarrow |a_n| < 1$ für alle $n > N_0$ mit einem geeigneten $N_0 \in \mathbb{N}$. Für diese $n$ gilt dann $a_n^2 = |a_n|^2 < |a_n|$. Daher ist $\sum |a_n|$ eine Majorante für $\sum a_n^2$.

(d) Die Aussage ist richtig. Aus der Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ folgt $|a_n| < 1$ für genügend große $n$. Daher ist $\sum \frac{1}{n^2}$ eine Majorante für $\sum \frac{|a_n|}{n^2}$. Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ ist also absolut konvergent und damit konvergent.

**Aufgabe 2 (12 Punkte)**
Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion und die Funktion $f : (a,\, b) \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $(a,\, b)$ differenzierbar.

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : (a,\, b) \to \mathbb{R}$, definiert durch $h(x) = g\big(x,\, f(x)\big)$.

(b) Es sei nun $g(x,\, y) = \mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^y - x - 2y$. Die differenzierbare Funktion $f$ beschreibe eine Niveaulinie von $g$ mit den Eigenschaften $g\big(x,\, f(x)\big) = 4$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 0$. Berechnen Sie $f'(0)$.

**Lösung:**

(a) Aus der Kettenregel folgt $h'(x) = g_x\big(x,\, f(x)\big) + g_y\big(x,\, f(x)\big) \cdot f'(x)$.

(b) Die partiellen Ableitungen von $g$ sind $g_x(x,\, y) = \mathrm{e}^x - 1$ und $g_y(x,\, y) = 3\,\mathrm{e}^y - 2$. Bildet man die Ableitung der Gleichung $g\big(x,\, f(x)\big) = 4$, so erhält man nach Teil a) die Beziehung $0 = \mathrm{e}^x - 1 + \big(3\,\mathrm{e}^{f(x)} - 2\big) \cdot f'(x)$. Einsetzen von $x = 0$ ergibt schließlich $f'(0) = 0$.

**Aufgabe 3 (18 Punkte)**

(a) Ist das uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{t}\,dt$ für alle $x > 0$ konvergent?

(b) Es sei $f$ die Funktion $f : [1\,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \int\limits_1^x \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{t}\,dt$. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$.

**Lösung:**

(a) Für $x > 0$ und $t \in [0,\, 1]$ ist $\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{t} \geq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{t}$. Aus der Divergenz des Integrals $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{t}\,dt = \mathrm{e}^{-x}\int\limits_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ folgt die Divergenz des Integrals $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{t}\,dt$ für alle $x > 0$.

(b) Die Ableitung der Funktion $f$ ist

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^3}}{x} - \int\limits_1^x t^2 \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{t}\,dt =$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-x^3}}{x} - \int\limits_1^x t\,\mathrm{e}^{-xt^2}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{-x^3}}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{x^2} \mathrm{e}^{-xu}\,du =$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-x^3}}{x} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x^3} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) = \frac{1}{2x}\left(3\,\mathrm{e}^{-x^3} - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Damit ist $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

**Aufgabe 4 (23 Punkte)**

(a) Eine Matrix $P \in M_n(\mathbb{C})$ heißt idempotent, falls $P^2 = P$ gilt.

 (i) Rechnen Sie nach, dass die Matrix $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ idempotent ist.

 (ii) Welche Zahlenwerte aus $\mathbb{C}$ kommen grundsätzlich nur als Eigenwerte einer idempotenten Matrix in Frage?

(b) Eine Matrix $N \in M_n(\mathbb{C})$ heißt nilpotent, falls unter ihren Potenzen $N^1, N^2, N^3, \ldots$ die Nullmatrix vorkommt.

 (i) Rechnen Sie nach, dass die Matrix $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotent ist.

 (ii) Welche Zahlenwerte aus $\mathbb{C}$ kommen grundsätzlich nur als Eigenwerte einer nilpotenten Matrix in Frage?

 (iii) Kann eine von der Nullmatrix verschiedene nilpotente Matrix diagonalisierbar sein?

**Lösung:**

(a) (i) Direkte Rechnung.

 (ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der idempotenten Matrix $P$ und $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor.
 Dann folgt aus $\lambda v = Pv = P^2 v = \lambda^2 v$ wegen $v \neq 0$ gerade $\lambda = \lambda^2$ und damit $\lambda \in \{0, 1\}$.

(b) (i) Direkte Rechnung liefert $N^3 = 0$.

 (ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der nilpotenten Matrix $N$ und $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Weiterhin gelte $N^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
 Dann folgt: $0 = N^k v = \lambda^k v$, also $\lambda = 0$ wegen $v \neq 0$.

 (iii) Wäre die nilpotente Matrix $N \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisierbar, so gäbe es eine invertierbare Matrix $T \in M_n(\mathbb{C})$ mit $T^{-1}NT = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$ wegen (ii). Das ist nur möglich, wenn $N = T \cdot 0 \cdot T^{-1} = 0$ selbst die Nullmatrix ist.

**Aufgabe 5 (18 Punkte)**

Es sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ und die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f : M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX - XA \end{array}$$

gegeben.

Geben Sie jeweils eine Basis für den Kern und für das Bild von $f$ an.

**Lösung:**

Sei $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 & x_4 - x_1 \\ x_1 - x_4 & x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Für den Kern von $f$ folgt:

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = x_3 \wedge x_1 = x_4.$$

Also:

$$\operatorname{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Als Basis von Kern$(f)$ lässt sich dann wählen: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Für das Bild von $f$ folgt offensichtlich:

$$\operatorname{Bild}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ -t & -s \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Als Basis von Bild$(f)$ lässt sich wählen: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.