Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Mai 2012

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 5. Mai 2012 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 14 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 6 die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (14 Punkte)

(a) Bildet die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der üblichen Skalarmultiplikation und der Addition definiert durch

$$a + b := [a + b] \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

einen Vektorraum über $\mathbb{R}$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.
Hinweis:
$[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner gleich $x \in \mathbb{R}$ (*Gaußklammer*).

(b) Gegeben sei der reelle Vektorraum $V = M_3(\mathbb{R})$. Bildet die Menge

$$U = \{ A \in M_3(\mathbb{R}) | \text{ Spur } A = 0\}$$

einen Unterraum von V? Beweisen Sie Ihre Behauptung.
Hinweis:
$M_3(\mathbb{R})$ bezeichnet die Menge aller dreireihigen Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$, und für $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ ist Spur $A := a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

Lösung:

(a) Es liegt kein Vektorraum vor, da die Addition nicht assoziativ ist.
Beispiel:

$$(0.1 + 0.8) + 0.3 = \big[[0.1 + 0.8] + 0.3\big] = [0 + 0.3] = 0,$$

aber:

$$0.1 + (0.8 + 0.3) = \big[0.1 + [0.8 + 0.3]\big] = [0.1 + 1] = 1.$$

(b) U ist ein Unter(vektor)raum, denn:

(i) $U \neq \emptyset$

(ii) Seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in U$. Dann gilt: $A + B \in M_3(\mathbb{R})$ und

$$\text{Spur } (A + B) = \sum_{k=1}^{3} (a_{kk} + b_{kk}) = \sum_{k=1}^{3} a_{kk} + \sum_{k=1}^{3} b_{kk} = 0,$$

also $A + B \in U$.

(iii) Seien $A = (a_{ij}) \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\lambda A \in M_3(\mathbb{R})$ und

$$\operatorname{Spur} \lambda A = \sum_{k=1}^{3} \lambda a_{kk} = \lambda \sum_{k=1}^{3} a_{kk} = 0,$$

also $\lambda A \in U$.

Aufgabe 2 (26 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen quadratischen Matrizen

$$\begin{aligned} A &:= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ B &:= A - I_3 \\ C &:= A^6 - A^5 \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Berstimmen Sie alle Eigenwerte und Basen der zugehörigen Eigenräume von D und D^{-1}.

Hinweis: Die Berechnung von D^{-1} ist nicht erforderlich.

Lösung:

(a) Es ist

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-3+4) = -1$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 11$$

und

$$\det C = \det\bigl[A^5(A - I_3)\bigr] = \det A^5 \cdot \det B = (\det A)^5 \cdot \det B = -11.$$

(b) Aus $\det D = 9 \neq 0$ folgt die Invertierbarkeit von D. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = 3$.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist

$$U_1 = \operatorname{kern}(D - I_4) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\bigl\{(1,\, 0,\, 0,\, 0)^t\bigr\}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 3 ist

$$U_2 = \operatorname{kern}(D - 3I_4) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\bigl\{(0,\, 0,\, 0,\, 1)^t,\, (\tfrac{9}{2},\, \tfrac{5}{2},\, 1,\, 0)^t\bigr\}.$$

Der Wert $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von D (da D^{-1} existiert). $D \cdot x = \lambda x$ ist somit gleichwertig mit $\frac{1}{\lambda} x = D^{-1} \cdot x$. Also besitzt D^{-1} die Eigenwerte 1 und $\frac{1}{3}$ mit den zugehörigen Eigenräumen U_1 und U_2.

Aufgabe 3 (13 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n}{3} \right)^n$$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ verwenden.

Lösung:

(a) Für die Folgeglieder $a_n = n^3 \left(\frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n}{3} \right)^n$ gilt

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{3} \to \frac{\mathrm{e}}{3} < 1 \text{ für } n \to \infty.$$

Aus dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

(b) Mit $a_n = \frac{n^n}{n!}$ ergibt sich der Konvergenzradius r nach dem Quotientenkriterium zu

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n (n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \int\limits_1^x \frac{42\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t}\,dt.$

(a) Begründen Sie, warum die Funktion f differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(x)$.

(b) Bestimmen Sie, wenn möglich, den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{\ln x}$.

Lösung:

(a) Aus der Stetigkeit des Integranden für $t > 0$ folgt die Differenzierbarkeit der Funktion f und nach dem HDI ist $f'(x) = \frac{42\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x}$.

(b) Es gilt $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$, und da f und ln differenzierbar sind, kann man den Grenzwert mit Hilfe der Regel von l'Hospital berechnen. Aus $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to 1} 42\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 42$ folgt $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 42$.

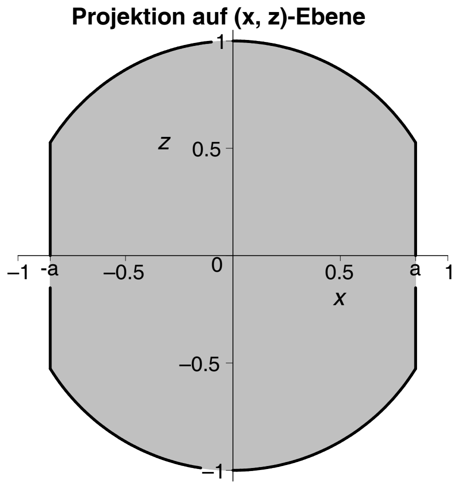
Aufgabe 5 (22 Punkte)
Gegeben sei die Menge $B = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, x^2 + y^2 \leq a^2\}$, wobei $0 < a < 1$.

(a) Skizzieren Sie die Projektion der Menge B auf die $(x,\, z)$-Ebene.

(b) Berechnen Sie das Volumen von B.

Lösung:

(a) Die Projektion von B auf die $(x,\, z)$-Ebene ist die Menge $\{(x,\, z) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a,\, |z| \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.



(b) Mit $B_+ = \{(x,\, y,\, z) \in B \mid z \geq 0\}$
und $\Omega = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$

erhält man aus Symmetriegründen für das Volumen von B

$$V(B) = 2 \iiint\limits_{B_+} d(x,\, y,\, z) = 2 \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\, d(x,\, y).$$

Durch Übergang zu Polarkoordinaten ergibt sich:

$$V(B) = 2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} r\sqrt{1 - r^2}\, dr\, d\varphi =$$

$$4\pi \int\limits_0^{a} r\sqrt{1 - r^2}\, dr = 2\pi \int\limits_0^{a^2} \sqrt{1 - u}\, du = -\frac{2}{3} 2\pi (1 - u)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a^2} =$$

$$\frac{4\pi}{3}(1 - (1 - a^2)^{\frac{3}{2}})$$