Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Oktober 2011

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 14. Oktober 2011 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 11 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 6 die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (21 Punkte)
Es seien die Matrizen A, B, C und D gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = A + B, \quad D = A + B^T$$

Hinweis zu den folgenden Aufgaben: Erst nachdenken, dann, falls nötig, rechnen!

(a) Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Kreuzen Sie an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(i)	A ist nilpotent, d.h. $A^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$	☐ wahr	☐ falsch
(ii)	B ist invertierbar	☐ wahr	☐ falsch
(iii)	$C + C^T$ ist symmetrisch	☐ wahr	☐ falsch
(iv)	D ist obere Dreiecksmatrix	☐ wahr	☐ falsch
(v)	D hat den Rang 2	☐ wahr	☐ falsch
(vi)	$(CD)^T = D^T C^T$	☐ wahr	☐ falsch

(b) Wenn $I = E_3$ die $3 \times 3-$Einheitsmatrix ist, berechne man die Matrix

$$(C + I)^T D^T - (DC)^T.$$

Lösung:

(a) (i) Falsch, denn: Infolge des Multiplikationssatzes für Determinanten muss die Determinante einer nilpotenten Matrix verschwinden. Es gilt aber $\det A = -2 \neq 0$.

(ii) Wahr, denn: Es gilt $\det B = -4 \neq 0$, also ist B invertierbar.

(iii) Wahr, denn: $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C + C^T$

(iv) Wahr, denn: B ist untere und damit B^T obere Dreiecksmatrix. Die Summe der beiden oberen Dreiecksmatrizen A und B^T ist wieder eine obere Dreiecksmatrix.

(v) Falsch, denn: Die Matrix $D = A+B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat drei linear unabhängige Spalten und damit den Rang 3.

(vi) Wahr, denn: Transpositionsregel für Matrizenprodukte hier angewendet auf das zulässige Produkt der beiden $3 \times 3-$Matrizen C und D.

(b) $(C+I)^T D^T - (DC)^T = C^T D^T + D^T - C^T D^T = D^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

(vgl. (a) Lösung Teil (v))

Aufgabe 2 (15 Punkte)
Geben Sie die Größe des Lösungsraums für jedes der folgenden linearen Gleichungssysteme durch Ankreuzen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Dabei steht in der Tabelle das Symbol $\star$ für eine beliebige reelle Zahl.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">Gleichungssystem</th><th colspan="4">Anzahl Lösungen</th></tr>
<tr><th colspan="3">endlich viele</th><th rowspan="2">unendlich viele</th></tr>
<tr><th>keine</th><th>genau eine</th><th>mehr als eine</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \star \\ 1 \\ \star \end{pmatrix}$</td><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ 1 \end{pmatrix}$</td><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$</td><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \star & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 0 \end{pmatrix}$</td><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td></tr>
</table>

Lösung: Jedes Gleichungssystem ist von der Form $Ax = b$.

(a) *Genau eine*, denn:
Für die Koeffizientenmatrix A des quadratischen Gleichungssystems gilt $\det A = 1 \neq 0$.

(b) *Keine*, denn:
Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ besitzt den Rang 3, während die Koeffizientenmatrix A nur den Rang 2 hat.

(c) *Unendlich viele*, denn:
Die dritte Zeile lässt sich durch Subtraktion der zweiten Zeile zu einer Nullzeile machen. Die ersten beiden Zeilen von $(A|b)$ und A sind jeweils linear unabhängig, so dass rg $(A|b) =$ rg (A) und damit das Gleichungssystem lösbar ist. Offensichtlich besitzt das Gleichungssystem zwei freie Variablen, so dass die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems unendlich viele Elemente enthält.

(d) *Genau eine*, denn:
Auf die letzte (Null)zeile des Gleichungssystems kann verzichtet werden, so dass ein quadratisches Gleichungssystem mit nicht verschwindender Determinante $= 1$ übrig bleibt.

Aufgabe 3 (22 Punkte)
Die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 1$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $(n \in \mathbb{N})$, wobei $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$ für $x > 0$ gelte.
Beweisen Sie

(a) $x > 0$ impliziert $f(x) \geq \sqrt{2}$.

(b) $x > \sqrt{2}$ impliziert $\sqrt{2} < f(x) < x$.

(c) $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(d) $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist konvergent mit dem Grenzwert $\sqrt{2}$.

Lösung:

(a) Für $x > 0$ gilt

$$\frac{x^2+2}{2x} \geq \sqrt{2} \iff x^2+2 \geq 2\sqrt{2}x \iff x^2-2\sqrt{2}x+2 \geq 0 \iff (x-\sqrt{2})^2 \geq 0$$

Die letzte Ungleichung gilt auf jeden Fall und damit auch die erste.

(b) Aus $x > \sqrt{2}$ folgt nach dem Beweis von Teil (a) $f(x) > \sqrt{2}$. Ferner gilt für $x > \sqrt{2}$

$$x > \sqrt{2} \Longrightarrow x^2 > 2 \Longrightarrow x^2+2 < 2x^2 \Longrightarrow \frac{x^2+2}{2x} < x.$$

(c) Durch vollständige Induktion folgt $a_n > \sqrt{2}$ $(n \in \mathbb{N})$, denn für $n = 1$ ist $a_1 = f(1) = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$ und nach Teil (b) folgt aus $a_n > \sqrt{2}$ auch $a_{n+1} = f(a_n) > \sqrt{2}$ $(n \in \mathbb{N})$.
Damit folgt nach (b) weiter $a_{n+1} = f(a_n) < a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(d) Die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt und monoton fallend, also konvergent. Mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt $a \geq \sqrt{2}$ und $a = \frac{a^2+2}{2a}$, also $a^2 = 2$ und folglich $a = \sqrt{2}$.

Aufgabe 4 (14 Punkte)
Es sei die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto h(t) = \cos(t)\arctan(t)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass das Integral $\int\limits_0^x h(t)\,dt$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert.

(b) Betrachten Sie nun die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int\limits_0^x h(t)\,dt$. Zeigen Sie, dass die Funktion F an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum hat.

Lösung:

(a) Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ stetig. Daraus folgt die Existenz des Integrals.

(b) Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist die Ableitung der Funktion F gegeben durch $F'(x) = \cos(x)\arctan(x)$ und es folgt zunächst $F'(0) = 0$. Weiter ist $F''(x) = -\sin(x)\arctan(x) + \frac{\cos(x)}{1+x^2}$ und daher $F''(0) = 1 > 0$. Folglich hat die Funktion F an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum.

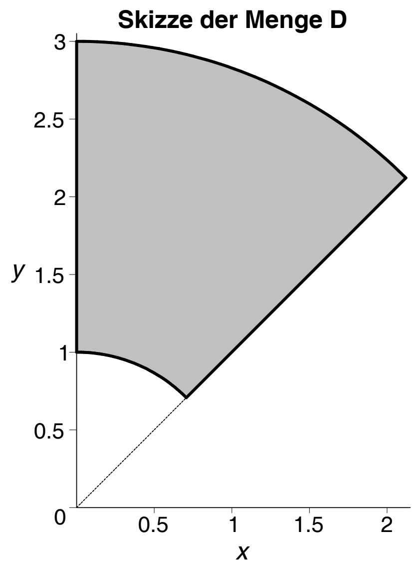
Aufgabe 5 (18 Punkte)
Es sei die Menge $D = \{(x, y) \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ x \le y,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Menge D im $\mathbb{R}^2$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_D (x-y)^2\, d(x, y)$

Lösung:

(a) D ist der Bereich im ersten Quadranten zwischen den beiden Kreisen mit Radius 1 und Radius 3 oberhalb der Winkelhalbierenden, siehe Skizze:



(b) Durch Übergang zu Polarkoordinaten erhält man

$$\iint\limits_D (x-y)^2\, d(x, y) = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_1^3 (r\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 r\, dr\, d\varphi =$$

$$\left(\int_1^3 r^3\, dr\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - 2\sin\varphi\cos\varphi)\, d\varphi\right) =$$

$$\left(\frac{1}{4} r^4\Big|_1^3\right)\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}\right) = 20 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 5\pi - 10$$