Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Mai 2011

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 14. Mai 2011 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 11 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 4 die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (18 Punkte)
Welche der folgenden Behauptungen ist wahr, welche falsch? (Begründung!)

(a) Besitzt eine reelle dreireihige Matrix einen reellen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1, dann ist die zugehörige geometrische Vielfachheit auch 1.

(b) Es gibt eine reelle dreireihige Matrix mit einem Eigenwert, der die algebraische Vielfachheit 2 und die geometrische Vielfachheit 1 hat.

(c) Besitzt eine reelle dreireihige Matrix drei verschiedene reelle Eigenwerte, dann ist die Matrix reell diagonalisierbar.

(d) Besitzt eine reelle dreireihige Matrix drei verschiedene Eigenwerte, dann ist die Matrix reell diagonalisierbar.

Lösung: Bezeichnet ν die algebraische Vielfachheit und μ die geometrische Vielfachheit, dann gilt stets $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ und $\mu \leq \nu$.

(a) Wahr, denn $1 \leq \mu \leq \nu = 1$ liefert unmittelbar $\mu = 1$.

(b) Wahr, beispielsweise für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Wahr, denn liegen drei verschiedene reelle Eigenwerte vor, so sind die zugehörigen Eigenräume eindimensional. Für alle Eigenwerte stimmen damit algebraische und geometrische Vielfachheit überein, die Matrix ist somit reell diagonalisierbar.

(d) Falsch, denn für reell diagonalisierbare Matrizen müssen die Eigenwerte auch reell sein. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ liefert somit ein Gegenbeispiel, denn sie besitzt die drei verschiedenen Eigenwerte $1, i, -i$ und ist deshalb nur komplex, aber nicht reell diagonalisierbar.

Aufgabe 2 (15 Punkte)
Es seien $u_1 = (2, 0, 2)^t$, $u_2 = (1, 1, 1)^t$ und $v_1 = (1, -2, 0)^t$, $v_2 = (-7, 1, -4)^t$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $\operatorname{span}\big(\{u_1, u_2\}\big) \cap \operatorname{span}\big(\{v_1, v_2\}\big)$.

Lösung: Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann in diesem Unterraum, wenn es Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ gibt, mit denen $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ gilt. Damit muss gelten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2\alpha_1 & + & \alpha_2 & - & \beta_1 & + & 7\beta_2 & = & 0 \\
 & & \alpha_2 & + & 2\beta_1 & - & \beta_2 & = & 0 \\
2\alpha_1 & + & \alpha_2 & & & + & 4\beta_2 & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccr|c}
2 & 1 & -1 & 7 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 7 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\
\hline
2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\
\hline
2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 0
\end{array}$$

Mit $\beta_2 = 1$ folgt $\mathbb{L} = \left\{ z \left(\frac{1}{2}, -5, 3, 1\right)^t \mid z \in \mathbb{R} \right\}$. Der Vektor $\frac{1}{2}u_1 - 5u_2 = (-4, -5, -4)^t$ ist somit ein Basisvektor.

Aufgabe 3 (18 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz bzw. Divergenz.

(a) $\int\limits_0^1 x\ln(x)\,dx$ (b) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln(x)}$

Lösung:

(a) Es ist

$$\int\limits_a^1 x\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x)\Big|_a^1 - \int\limits_a^1 \frac{1}{2}x\,dx = -\frac{1}{2}a^2\ln(a) - \frac{1}{4}x^2\Big|_a^1 =$$

$$-\frac{1}{2}a^2\ln(a) - \frac{1}{4}\left(1-a^2\right) = -\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\ln(a)}{\frac{1}{a^2}}}_{\star)} - \frac{1}{4}\left(1-a^2\right) \to -\frac{1}{4} \text{ für } a \to 0+$$

$\star$) nach den Regeln von l'Hospital gilt

$$\lim_{a\to 0+}\frac{\ln(a)}{\frac{1}{a^2}} = \lim_{a\to 0+}\frac{1/a}{-2/a^3} = \lim_{a\to 0+}\frac{-a^2}{2} = 0.$$

Folglich liegt Konvergenz vor.

(b) Durch Substitution $u = \ln(x)$ erhält man

$$\int\limits_a^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln(x)}\,dx = \int\limits_{\ln(a)}^{\ln(2)} \frac{du}{u} = \ln(u)\Big|_{\ln(a)}^{\ln(2)} =$$

$$\ln(\ln 2) - \ln(\ln a) \to \infty \text{ für } a \to 1+$$

Es liegt also Divergenz vor.

Aufgabe 4 (22 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,\, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion f.

(b) Ermitteln Sie das Minimum und das Maximum der Funktion f auf der Kreislinie $K = \big\{(x,\, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\big\}$.

(c) Beweisen Sie, dass für alle $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ die Ungleichung $f(x,\, y) \geq 2(x^2+y^2)$ gilt.

Lösung:

(a) Es ist $\nabla f(x,\, y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y \\ -2x + 6y \end{pmatrix} = \underline{0} \iff (x,\, y) = (0,\, 0)$. Weiter ist $Hf(0,\, 0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ positiv definit, und daher ist $(0,\, 0)$ ein lokales Minimum.

(b) Mit der Funktion $g(x,\, y) = x^2 + y^2 - 1$ sind die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,\, y) = 0$ gesucht. Die möglichen Extremalstellen finden wir mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. $\nabla f(x,\, y) = \lambda \nabla g(x,\, y)$ wird hier zu:

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 2\lambda x \\ -2x + 6y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y und die zweite Gleichung mit x, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} 6xy - 2y^2 &= 2\lambda xy \\ -2x^2 + 6xy &= 2\lambda xy \end{aligned}$$

und es folgt sofort $x^2 = y^2$. Setzt man dies in die Nebenbedingung ein, so erhält man die möglichen Extremalstellen $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ und $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind $f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 2$ und $f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 4$. Das Minimum der Funktion f auf der Kreislinie K ist 2 und das Maximum ist 4.

(c) Es ist $f(x,\, y) = x^2 - 2xy + y^2 + 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2+y^2) + (x-y)^2 \geq 2(x^2+y^2)$ für alle $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$.

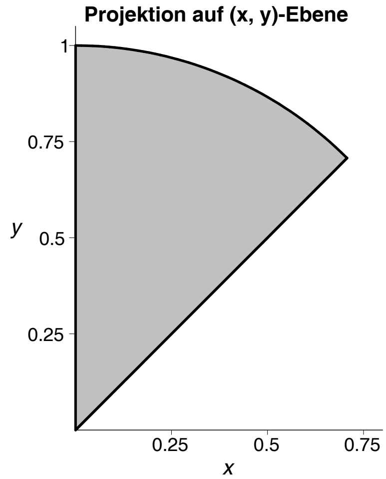
Aufgabe 5 (17 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $B = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z \le 1,\, 0 \le x \le y\}$.

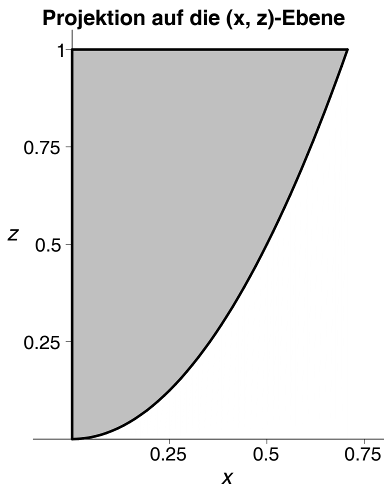
(a) Skizzieren Sie die Projektion der Menge B auf die $(x,\, y)$-Ebene und auf die $(x,\, z)$-Ebene.

(b) Berechnen Sie das Volumen von B.

Lösung:

(a) Skizzen:





(b) Die Projektion von B auf die $(x,\, y)$-Ebene ist die Menge $\Omega = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1,\, 0 \le y \le x\}$. Das Volumen von B kann man durch Übergang zu Polarkoordinaten bestimmen. Es ergibt sich:

$$V(B) = \iint_\Omega \big(1 - (x^2 + y^2)\big)\, d(x,\, y) =$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 (1 - r^2) r \, d\varphi \, dr = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{16}.$$