Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Oktober 2010

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 1. Oktober 2010 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 6 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 3 die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (16 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und begründen Sie Ihre Entscheidung durch eine kurze Herleitung.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(n\pi)}{n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

Lösung:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(n\pi)}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ divergiert.

(b) Mit $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ist $\sqrt[n]{a_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ für $n \to \infty$ und aus dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(c) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $1 < \sqrt[n]{n} < 2$ gilt. Für diese n ist dann $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} > \dfrac{1}{2n}$. Aus dem Minorantenkriterium folgt aus der Divergenz der harmonischen Reihe damit die Divergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Aufgabe 2 (24 Punkte)
Ermitteln Sie das maximale Volumen einer quaderförmigen Schachtel, deren Oberfläche ohne Deckel 27 m^2 ist.

Lösung: Bezeichnet man mit x, y und z die Breite, Höhe und Tiefe der Schachtel (gemessen in m), so ist deren Oberfläche $O(x, y, z) = 2xy + 2yz + xz$ und das Volumen $V(x, y, z) = xyz$. Damit liegt das folgende Maximierungproblem vor:
Bestimme das Maximum von $V(x, y, z) = xyz$ unter der Nebenbedingung $O(x, y, z) = 27$. Dabei kann man $x, y, z > 0$ annehmen, da V den Wert Null annimmt, sobald eine der Variablen 0 ist. Die möglichen Extremalstellen erfüllen die Gleichungen $\nabla V = \lambda \nabla O$ für eine reelle Zahl λ und $O(x, y, z) = 27$. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$yz = \lambda(2y + z)$$

$$xz = \lambda(2x + 2z)$$

$$xy = \lambda(2y + x)$$

sowie

$$2xy + 2yz + xz = 27.$$

Multipliziert man die ersten drei Gleichungen mit x, y bzw. z, so erhält man

$$xyz = \lambda(2xy + xz)$$

$$xyz = \lambda(2xy + 2yz)$$

$$xyz = \lambda(2yz + xz)$$

Wegen $x, y, z \neq 0$ muss $\lambda \neq 0$ sein und damit ergibt sich:

$$2xy + xz = 2xy + 2yz \quad \text{sowie} \quad 2xy + xz = 2yz + xz.$$

Damit folgt $x = 2y$ und $z = x$. Setzt man dies in die vierte Gleichung ein, so wird daraus

$$4y^2 + 4y^2 + 4y^2 = 27 \text{ also } y^2 = \frac{9}{4}.$$

Damit erhält man schließlich die Lösung $y = \frac{3}{2}$, $x = z = 3$ und das maximale Volumen der Schachtel ist $V_{\max} = \frac{27}{2}$.

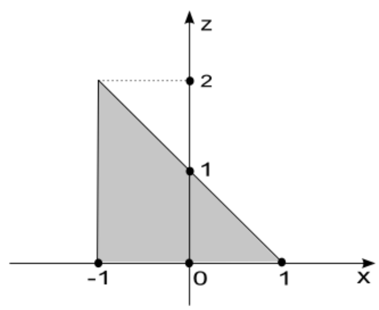
Aufgabe 3 (18 Punkte)
Das räumliche Gebiet $B \subset \mathbb{R}^3$ wird begrenzt durch die Zylinderfläche $x^2+y^2=1$ und die Ebenen $z=0$ und $x+z=1$.

(a) Skizzieren Sie die Projektion des Gebietes B in der xz-Ebene.

(b) Berechnen Sie durch Transformation auf Zylinderkoordinaten das Integral $\iiint\limits_B x\, d(x,\, y,\, z)$.

Lösung:

(a) Skizze:



(b) Mit der Transformationsvorschrift $x = r\cos\varphi$, $y = r sin\varphi$, $z = t$ ist $(x,\, y,\, z) \in B \Longleftrightarrow$
$(r,\, \varphi,\, t) \in \tilde{B} = \big\{(r,\, \varphi,\, t)\,|\, 0 \le r < 1,\, 0 \le \varphi < 2\pi,\, 0 < t < 1 - r\cos\varphi\big\}$.
Die Determinante der Jacobi-Matrix ist $\left|\dfrac{\partial(x,\, y,\, z)}{\partial(r,\, \varphi,\, t)}\right| = r$.
Die Transformation auf Zylinderkoordinaten ergibt zusammen mit dem Satz von Fubini zunächst

$$\iiint\limits_B x\, d(x,\, y,\, z) = \iiint\limits_{\tilde{B}} r\cos\varphi \left|\frac{\partial(x,\, y,\, z)}{\partial(r,\, \varphi,\, t)}\right| d(r,\, \varphi,\, t) =$$

$$\iiint\limits_{\tilde{B}} r^2 \cos\varphi\, d(r,\, \varphi,\, t) = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-r\cos\varphi} r^2\cos\varphi\, dt \right) dr \right) d\varphi$$

und dann durch iteriertes Integrieren

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-r\cos\varphi} r^2\cos\varphi\, dt \right) dr \right) d\varphi =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 r^2\cos\varphi\,(1 - r\cos\varphi)\, dr \right) d\varphi =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos^2\varphi \right) d\varphi = \left[\frac{1}{3}\sin\varphi - \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right) \right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 4 (17 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen P_1 und P_2 für die beiden orthogonalen Projektionen p_1 bzw. p_2 im $\mathbb{R}^2$ auf die Geraden

$$U_1 := \operatorname{span}(\{u_1\}),\ u_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad U_2 := \operatorname{span}(\{u_2\}),\ u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie das Produkt $P_1 \cdot P_2$ der beiden Abbildungsmatrizen aus Teil (a), und erklären Sie das Ergebnis.

Lösung:

(a) Für die Projektion p_1 muss gelten: $P_1 u_1 = u_1$ und $P_1 v_1 = 0$ mit $v_1 \perp u_1$, z.B. $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Also: $P_1(u_1 v_1) = (u_1 0)$ bzw. $P_1 = (u_1 0)(u_1 v_1)^{-1}$. Einsetzen liefert: $P_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Analog: $P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Da die beiden Unterräume wegen $u_1 \perp u_2$ aufeinander senkrecht stehen, liegt $\operatorname{Bild}(p_2) = U_2$ im Kern von p_1. Dies erklärt $(p_1 \circ p_2)(\mathbb{R}^2) = p_1(p_2(\mathbb{R}^2)) = p_1(U_2) = \{0\}$.

Aufgabe 5 (15 Punkte)
Die unbekannten Koeffzienten c_1, c_2 einer Temperaturfunktion

$$f(t) = t\,(c_1 + c_2 t)\,,\ \ t \in \mathbb{R},$$

sollen aus folgenden Messwerten ermittelt werden:

t	0	1	2
y	0.5	3	5

Ermitteln Sie die Koeffizienten nach der Methode der kleinsten Quadrate (Ausgleichsrechnung).

Lösung: Es ergibt sich folgendes überbestimmtes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 &= 0.5 \\ 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 &= 3 \\ 2 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 &= 5, \end{aligned}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ c := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

kurz $Ac = b$. Die Normalgleichung lautet dann:

$$A^T A\, c = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 17 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 13 \\ 23 \end{pmatrix} = A^T b.$$

Die Lösung ist:

$$c = \left(A^T A\right)^{-1} \cdot A^T b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 17 & -9 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 23 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$