Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Mai 2010

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 15. Mai 2010 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 6 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 40 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 7 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 3 die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (16 Punkte)
Die Zahlenfolgen $\big(a_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ und $\big(b_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ seien konvergent. Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung durch einen kurzen Beweis oder durch ein Gegenbeispiel.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(a_n+b_n\big)^2=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n\right)^2$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1\Longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\big(a_n\big)^n=1$

(c) $a_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}\Longrightarrow\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine konvergente Zahlenfolge.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Longrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(a_n\big)^n$ konvergiert.

Lösung:

(a) Die Aussage ist richtig. Sie folgt aus den Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen.

(b) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist $a_n=\sqrt[n]{n}$.

(c) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist $a_n=\frac{1}{n}$.

(d) Die Aussage ist richtig. Wendet man das Wurzelkriterium auf die Reihe mit den Summanden $\big(a_n\big)^n$ an, so erhält man $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\big|a_n\big|^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\big|a_n\big|=0$ und daraus folgt die Konvergenz der Reihe.

Aufgabe 2 (12 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion an der Stelle $x_0 = \mathrm{e}$ ihr globales Maximum annimmt.

(b) Beweisen Sie mittels (a) die Ungleichung $\pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}$.

Lösung:

(a) Es gilt $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}$. Da $f'(x) > 0$ für $x < \mathrm{e}$ und $f'(x) < 0$ für $x > \mathrm{e}$ gilt, ist die Funktion f für $x < \mathrm{e}$ streng monoton wachsend und für $x > \mathrm{e}$ streng monoton fallend. Daher nimmt die Funktion an der Stelle $x_0 = \mathrm{e}$ ihr globales Maximum an.

(b) Nach Teil (a) gilt für alle positiven Zahlen $x \neq \mathrm{e}$ die Ungleichung $f(x) = \frac{\ln x}{x} < f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Also ist $\ln\left(x^{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e} \ln x < x$. Wendet man auf diese Ungleichung die monotone e-Funktion an, so ergibt sich $x^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{x}$. Setzt man speziell $x = \pi$, so wird daraus $\pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}$.

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Die Funktion $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) = \int\limits_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung $F'(x)$ dieser Funktion.

(b) Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{F(x)}{\ln x}$.

Lösung:

(a) Der Integrand $\frac{\mathrm{e}^t}{t}$ ist in $\mathbb{R}^+$ stetig, und daher ergibt sich nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $F'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

(b) Wegen $F(1) = 0$ und $\ln 1 = 0$ liegt ein Grenzwert der Form „$\frac{0}{0}$“ vor. Dieser kann mit der Regel von l'Hospital bestimmt werden, da F und $\ln x$ auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar ist und dort $\frac{d}{dx} \ln x \neq 0$ gilt. Es ist

$$\lim_{x \to 1} \frac{F'(x)}{\frac{d}{dx} \ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{\mathrm{e}^x / x}{1/x} = \lim_{x \to 1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}$$

und daraus folgt $\lim\limits_{x \to 1} \frac{F(x)}{\ln x} = \mathrm{e}$.

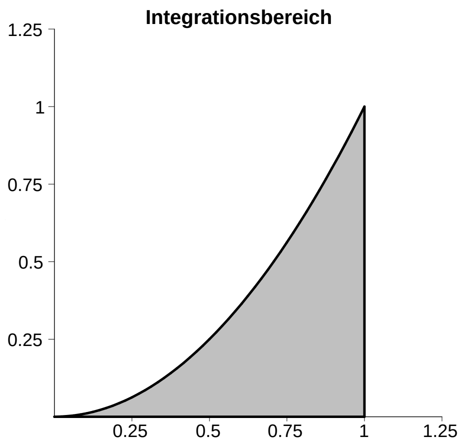
Aufgabe 4 (14 Punkte)
Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei berandet durch $y = 0$, $y = x^2$ und $x = 1$.

(a) Skizzieren Sie das Gebiet Ω.

(b) Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_{\Omega} x \cos y \, d(x,\, y)$.

Lösung:

(a) Skizze:



(b) Es ist

$$\iint\limits_{\Omega} x \cos y \, d(x,\, y) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x \cos y \, dy \, dx = \int\limits_0^1 x \sin x^2 \, dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1).$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle linearen Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deren Kern und Bild mit dem vom ersten kanonischen Einheitsvektor $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraum übereinstimmen. Geben Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen an.

(b) Warum kann es keine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geben, deren Kern und Bild übereinstimmen?

Lösung:

(a) Da e_1 im Kern liegen soll, muss $f(e_1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die erste Spalte der Abbildungsmatrix A sein. Da e_1 im Bild liegen soll, muss $f(e_2)$ ein von 0 verschiedenes Vielfache von e_1 sein, d. h. $f(e_2) = be_1 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $b \neq 0$ muss die zweite Spalte von A sein. Somit ergibt sich notwendigerweise

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x) = Ax = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \qquad \text{mit } b \neq 0.$$

Diese Bedingungen sind auch hinreichend: Das Bild ergibt sich aus dem Spann der Spalten von A, d. h. $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{span}\{be_1\} = \mathrm{span}\{e_1\}$. Der Kern ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx_2 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

besteht also genau aus Vektoren $x = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda e_1$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Aus der Dimensionsformel $\dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ folgt mit $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$ und somit $\dim \mathrm{Kern}(f) = \dim \mathrm{Bild}(f)$ ein Widerspruch für die ungerade Dimension 3.

Aufgabe 6 (20 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.
Welches sind die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte?
Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an, ohne die Eigenräume zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie die Eigenräume von A.

(c) Geben Sie die Jordan-Normalform von A und die zugehörige Transformationsmatrix T an.

(d) Berechnen Sie die Potenzen A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Spur}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$.
mit Nullstellen = Eigenwerten: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.
Beide algebraische Vielfachheiten = 1.
Wegen $1 \leq$ geom. Vielfachheit $\leq$ alg. Vielfachheit $= 1$ sind auch beide geometrischen Vielfachheiten = 1.

(b) Lösung der beiden 2 x 2 linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda_j I)x = 0$ für $j \in \{1, 2\}$ liefert:
$E_1 = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$ und $E_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

(c) Jordan-Normalform ist $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = T^{-1}AT$ mit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $A^n = \left(T\Lambda T^{-1}\right)^n = T\Lambda^n T^{-1} =$
$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$