Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Oktober 2009

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 16. Oktober 2009 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 6 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 3 die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (13 Punkte)

Die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ habe den Konvergenzradius $r = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ die beiden Formeln $xf'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$ und $xf'(x) + x^2 f''(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 a_k x^k$ gelten.

(b) Ermitteln Sie für $|x| < 1$ einen geschlossenen Ausdruck für $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$.

Lösung:

(a) Die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ kann in $|x| < 1$ gliedweise differenziert werden. Damit erhält man die Gleichung $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ und folglich $xf'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$. Nochmalige Differentiation ergibt $\big(xf'(x)\big)' = f'(x) + xf''(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 a_k x^{k-1}$ und damit $x\big(xf'(x)\big)' = xf'(x) + x^2 f''(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 a_k x^k$.

(b) Wendet man das Ergebnis auf $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ an, so erhält man $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = xf'(x) + x^2 f''(x) = x(\frac{1}{1-x})' + x^2(\frac{1}{1-x})'' = x\frac{1}{(1-x)^2} + x^2\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.

Aufgabe 2 (15 Punkte)
Bestimmen Sie die Punkte auf der Ellipse $4x^2 + y^2 = 4$, die vom Punkt $(2,\, 0)$ minimalen und maximalen Abstand haben.

Lösung: Der Abstand von $(2,\, 0)$ zu einem Punkt der Ellipse $4x^2 + y^2 = 4$ wird genau dann minimal bzw. maximal, wenn das Quadrat des Abstands minimal bzw. maximal wird. Das Abstandsquadrat des Punktes $(2,\, 0)$ und des Punktes $(x,\, y)$ der Ellipse ist

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = (x-2)^2 + (4-4x^2) = -3x^2 - 4x + 8, \quad -1 \le x \le 1.$$

Gesucht sind also die globalen Extrema der Funktion $f(x) = -3x^2 - 4x + 8$ im abgeschlossenen Intervall $[-1,\, 1]$.
Die Funktionswerte von f am Rand des Definitionsbereiches sind $f(1) = 1$ und $f(-1) = 9$. Weiter ist $f'(x) = -6x - 4$ und damit ist $f'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow x_0 = -\frac{2}{3}$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(x_0) = \frac{28}{3} > 9$. Damit nimmt f das Minimum an der Stelle 1 und das Maximum an der Stelle $-\frac{2}{3}$ an.
Der Punkt $(1,\, 0)$ der Ellipse hat damit minimalen Abstand von $(2,\, 0)$, und die Punkte $\left(-\frac{2}{3},\, \pm\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)$ der Ellipse haben maximalen Abstand von $(2,\, 0)$.

Aufgabe 3 (25 Punkte)
Es soll die Funktion $f_a(x,\,y) = x^2 + axy + y^2$ mit einem Parameter $a > 0$, $a \neq 2$, auf der Menge $D = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ betrachtet werden.

(a) Zeigen Sie:
Die Gleichung $\nabla f_a(x,\,y) = 0$ hat in D nur die Lösung $(x_0,\,y_0) = (0,\,0)$.

(b) Bestimmen Sie die größten und kleinsten Funktionswerte von f_a auf $\partial D = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) Betrachten Sie nun die globalen Extrema von f_a auf D. Für welche Werte des Parameters a liegt eine globale Extremalstelle bei $(x_0,\,y_0) = (0,\,0)$?

Lösung:

(a) Es ist

$$\nabla f_a(x,\,y) = \begin{pmatrix} 2x + ay \\ ax + 2y \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$\nabla f_a(x_0,\,y_0) = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $a \neq 2$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$ regulär und das Gleichungssystem besitzt nur die triviale Lösung $(x_0,\,y_0) = (0,\,0)$.

(b) Gesucht sind die Extrema von $f_a(x,\,y) = x^2 + axy + y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,\,y) = x^2 + y^2 = 1$. Die möglichen Extremalstellen findet man mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren als Lösungen von $\nabla f_a(x,\,y) = \lambda \nabla g(x,\,y)$, $g(x,\,y) = 1$. Dieses System lautet:

$$\begin{aligned} 2x + ay &= \lambda 2x \\ ax + 2y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Multiplikation der beiden ersten Gleichungen mit y bzw. x ergibt:

$$\begin{aligned} 2xy + ay^2 &= \lambda 2xy \\ ax^2 + 2xy &= \lambda 2xy \end{aligned}$$

Es folgt $x^2 = y^2$ und damit sind die vier möglichen Extremalstellen

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{und} \quad \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Die Funktionswerte an diesen Stellen sind

$$f_a\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{2+a}{2} \quad \text{und} \quad f_a\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{2-a}{2}.$$

Der größte Funktionswert von f_a auf ∂D ist $\frac{2+a}{2}$ und der kleinste Funktionswert ist $\frac{2-a}{2}$.

(c) Mögliche globale Extremalstellen von f_a auf D sind die Nullstellen des Gradienten von f_a, also $(x_0, y_0) = (0, 0)$, und die Extrema auf dem Rand von D, die im Teil (b) bestimmt wurden. Da der größte Funktionswert am Rand $\frac{2+a}{2} > 0$ ist, kann bei $(x_0, y_0) = (0, 0)$ also nur ein globales Minimum angenommen werden. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn $\frac{2-a}{2} > 0$ ist. An der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ liegt ein globales Minimum genau dann, wenn $0 < a < 2$.

Aufgabe 4 (24 Punkte)
Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Es seien stets A und B quadratische Matrizen der Dimension $n \in \mathbb{N}$.

(a) Es gilt $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

wahr ☐ falsch ☐

(b) Ist $A \cdot B$ invertierbar, dann ist auch A invertierbar.

wahr ☐ falsch ☐

(c) Sind A und B symmetrisch, dann gilt $(A \cdot B)^t = B \cdot A$.

wahr ☐ falsch ☐

(d) Sind A und B symmetrisch, dann ist auch $A^2 - B^2$ symmetrisch.

wahr ☐ falsch ☐

(e) Der von den Zeilenvektoren von A erzeugte Unterraum steht senkrecht auf Kern(A).

wahr ☐ falsch ☐

(f) Der von den Spaltenvektoren von A erzeugte Unterraum steht senkrecht auf Kern(A).

wahr ☐ falsch ☐

Lösung: Es gilt:

(a) Gegenbeispiel: Wegen

$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$$

folgt mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A-B)(A+B) - (A^2 - B^2) = AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

wahr ☐ falsch ☒

(b) Begründung: Ist AB invertierbar, so gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0$$

also $\det(A) \neq 0$. Folglich ist A invertierbar.

wahr ☒ falsch ☐

(c) Begründung: Mit $A^t = A$ und $B^t = B$ folgt die Identität $(AB)^t = B^t A^t = BA$.

wahr ☒ falsch ☐

(d) Begründung: Mit $A^t = A$ und $B^t = B$ folgt die Identität $(A^2 - B^2)^t = (A^t)^2 - (B^t)^2 = A^2 - B^2$.

wahr ☒ falsch ☐

(e) Begründung: Ein beliebiger aus Zeilenvektoren von A linear kombinierter Vektor v^t lässt sich in der Form $y^t A$ darstellen. Für einen Vektor $x \in \mathrm{Kern}(A)$ gilt dann $v^t x = (y^t A)x = y^t(Ax) = y^t \cdot 0 = 0$, d. h. v steht senkrecht auf dem Kern von A.

wahr ☒ falsch ☐

(f) Gegenbeispiel: Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$.
Der Spaltenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von A steht aber nicht senkrecht darauf, da das Skalarprodukt aus v und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gerade $1 \neq 0$ ergibt.

wahr ☐ falsch ☒

Aufgabe 5 (13 Punkte)
Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^t$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

(a) Welches geometrische Gebilde wird durch den Untervektorraum $\operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$ beschrieben?

(b) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ liegt der Vektor $\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \end{pmatrix}^t$ in $\operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$?

(c) Bestimmen Sie **formelmäßig** die Abbildungsmatrix P für die orthogonale Projektion p im $\mathbb{R}^3$ auf den Untervektorraum $\operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$.

Lösung:

(a) Da v_1, v_2 linear unabhängig sind, wird durch $\operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$ die Ebene durch $0, v_1, v_2$ beschrieben.

(b) Sei $w_a := \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \end{pmatrix}^t$, $a \in \mathbb{R}$. Aus $w_a = \lambda v_1 + \mu v_2$ folgt

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu &= 0 \\ 2\lambda + 2\mu &= a \\ 3\lambda + \mu &= 1 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu &= 0 \\ 4\mu &= -a \\ 8\mu &= -2 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist nur für $a = \frac{1}{2}$ lösbar. Damit gilt:
$w_{\frac{1}{2}} \in \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$ und $w_a \notin \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq \frac{1}{2}$.

(c) Der Vektor $v_3 := v_1 \times v_2$ erfüllt die Bedingung

$$v_3 \perp \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$$

Für die Projektion p muß gelten: $Pv_1 = v_1$, $Pv_2 = v_2$ und $Pv_3 = 0$, d. h.

$$P \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix}$$

also

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^{-1}$$