# Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Mai 2009

**Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl**

*Am 9 Mai 2009 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 17 Teilnehmern und Teilnehmerinnen haben 4 die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.*

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Betrachten Sie ein gleichschenkliges Dreieck im ersten Quadranten. Die Ecken der Basis sind der Koordinatenursprung (0, 0) und der Punkt $(b, 0)$ mit $b > 0$. Die dritte Ecke liegt auf der Parabel $y = 27 - x^2$. Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt, den dieses Dreieck haben kann.

**Lösung:**

Die Ecken des Dreiecks haben die Koordinaten (0, 0), $(b, 0)$ und $(x, 27-x^2)$. Da das Dreieck gleichschenklig ist, gilt $b = 2x$. Weiter liegt das Dreieck im ersten Quadranten genau dann, wenn $x \in (0, \sqrt{27})$ gilt.
Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $\frac{1}{2}2x(27 - x^2) = 27x - x^3$. Die Funktion $F$ mit $F(x) = 27x - x^3$, $0 \leq x \leq \sqrt{27}$ nimmt wegen $F(0) = F(\sqrt{27}) = 0$ ihr Maximum an der Nullstelle der Ableitung $F'(x) = 27 - 3x^2$, also bei $x = 3$ an. Der maximale Flächeninhalt ist $F(3) = 54$.

**Aufgabe 2 (20 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{\sin t}\, dt,\ x \in \mathbb{R}$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2$ der Funktion $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Verwenden Sie zur Berechnung der ersten Ableitung von $f$ den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(b) Ermitteln Sie das Restglied $R_2$ nach Lagrange.

(c) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\big|R_2(x)\big| \leq |x|^3$.

**Lösung:**

(a) Die Formel für das Taylorpolynom $T_2$ lautet

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Mit $x_0 = 0$ wird dies zu

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2.$$

Für die Funktion $f(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{\sin t}\, dt$ erhält man nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $f'(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt $f''(x) = \cos x\, \mathrm{e}^{\sin x}$ und man erhält die Werte $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ und $f''(0) = 1$. Damit ergibt sich für das Taylorpolynom $T_2$ die Darstellung

$$T_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2.$$

(b) Die Formel für das Restglied $R_2$ nach Lagrange lautet

$$R_2(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi)(x - x_0)^3$$

mit einem geeigneten $\xi$ zwischen $x$ und $x_0 = 0$.
Mit $f'''(\xi) = (\cos^2 \xi - \sin \xi)\, \mathrm{e}^{\sin \xi}$ ergibt sich

$$R_2(x) = \frac{1}{6}(\cos^2 \xi - \sin \xi)\, \mathrm{e}^{\sin \xi}\, x^3,\ \xi \text{ geeignet zwischen } 0 \text{ und } x.$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned} \big|R_2(x)\big| &= \frac{1}{6}\big|\cos^2 \xi - \sin \xi\big|\, \mathrm{e}^{\sin \xi}\, |x|^3 \leq \\ &\frac{1}{6}\Big(\underbrace{|\cos^2 \xi|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin \xi|}_{\leq 1}\Big)\, \underbrace{\mathrm{e}^{\sin \xi}}_{\leq \mathrm{e}^1 \leq 3}\, |x|^3 \leq \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3\, |x|^3 = |x|^3,\ x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3 (25 Punkte)**
Eine Platte der Form $x^2 + y^2 \leq 1$ wird einschließlich ihres Randes so erwärmt, dass die Temperatur im Punkt $(x,\, y)$ durch den Ausdruck $T(x,\, y) = x^2 + 2y^2 - x$ gegeben ist. Eine Fliege krabbelt über die Platte und befindet sich gerade im Punkt $\left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$.

(a) In welche Richtung muss die Fliege gehen, damit die Temperatur möglichst schnell zunimmt?

(b) Die Fliege läuft von $\left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$ in die Richtung, die zum Punkt $(1,\, 0)$ zeigt. Wie groß ist die Richtungsableitung von $T$ im Punkt $\left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$ in die von der Fliege eingeschlagenen Richtung.

(c) Bestimmen Sie den wärmsten und den kältesten Punkt der Platte.

**Lösung:**

(a) Die Temperatur $T$ nimmt an der Stelle $(x,\, y)$ am schnellsten in die Richtung zu, in die der Gradient $\nabla T(x,\, y)$ zeigt.

Mit $\nabla T(x,\, y) = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 4y \end{pmatrix}$ ergibt sich $\nabla T\left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Fliege muss also in die Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gehen.

(b) Der Vektor von $\left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$ nach $(1,\, 0)$ ist $\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. Der normierte Richtungsvektor in die eingeschlagene Richtung ist daher $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Für die Richtungsableitung in diese Richtung gilt:

$$T_{\underline{v}}\left(-\tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2}\right) = \nabla T\left(-\tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2}\right) \bullet \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-8}{\sqrt{10}}.$$

(c) Gesucht sind die globalen Minima und Maxima der Funktion $T(x,\, y) = x^2 + 2y^2 - x$ auf der Menge $\Omega = \left\{(x,\, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. Zur Bestimmung dieser Extrema kann man zunächst alle möglichen Extremalstellen ermitteln und dann die Funktionswerte an diesen Stellen vergleichen.

Die Extremastellen der Funktion $T$ können zum einen im Inneren $\mathring{\Omega} = \left\{(x,\, y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\right\}$ von $\Omega$ liegen. Hier kommen alle Nullstellen des Gradienten von $T$ in Betracht. Zum anderen können die Extremalstellen am Rand $\partial\Omega = \left\{(x,\, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$ von $\Omega$ liegen. Diese Randpunkte sind die Extrema von $T$ unter der Nebenbedingung $g(x,\, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren findet man die potentiellen Extremalstellen auf $\partial\Omega$ als Lösungen des Gleichungssystems $\nabla T(x,\, y) = \lambda \nabla g(x,\, y)$, $g(x,\, y) = 0$.

Die Gleichung $\nabla T(x,\, y) = \underline{0}$ hat nur eine Lösung, nämlich $\left(\frac{1}{2},\, 0\right)$. Der Funktionswert von $T$ an dieser Stelle ist $T\left(\frac{1}{2},\, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

Das Gleichungssystem $\nabla T(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, $g(x, y) = 0$ lautet

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $y = 0$ oder $\lambda = 2$. Der Fall $y = 0$ liefert die beiden Lösungen $(1, 0)$ und $(-1, 0)$. Mit $\lambda = 2$ folgt aus der ersten Gleichung $x = -\frac{1}{2}$. Damit ergeben sich zwei weitere Lösungen $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Die Funktionswerte an diesen vier Stellen sind $T(1, 0) = 0$, $T(-1, 0) = 2$ und $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

Der kälteste Punkte der Platte ist die Stelle $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ mit der Temperatur $T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$ und die beiden wärmsten Punkte der Platte sind $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ mit der Temperatur $T\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

**Aufgabe 4 (15 Punkte)**
Es sei $n$ eine *ungerade* natürliche Zahl und $c \in \mathbb{R}$.
Betrachten Sie die folgende $n$-reihige quadratische Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c & 0 & 1 & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & c & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Determinante von $A_n$ gilt

$$\det A_n = c\left(c^2 - 1\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

indem Sie die Matrix $A_n$ für $c \neq 0$ durch geeignete Zeilenumformungen zunächst auf obere Dreiecksgestalt bringen.

(b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_n$ invertierbar?

(c) Begründen Sie, dass die Matrix $A_n$ stets diagonalisierbar ist.
Geben Sie eine zu $A_n$ ähnliche Diagonalmatrix an.
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus (a).

**Lösung:**

(a) Für $c \neq 0$ bringt man $A_n$ durch elementare Zeilenumformungen auf obere Dreiecksgestalt, indem man in den letzten $\frac{n-1}{2}$ Zeilen von der Zeile mit Nummer $n-j+1, j = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, das $\frac{1}{c}$-fache der $j$-ten Zeile subtrahiert. Die neue Matrix hat dann die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c & 0 & 1 & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & c & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & 0 & 0 & c - \frac{1}{c} & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c - \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente, hier also:

$$\det A_n = c^{\frac{n-1}{2}} \cdot c \cdot (c - \tfrac{1}{c})^{\frac{n-1}{2}} = c(c^2 - 1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Diese Formel schließt auch den Fall $c = 0$ ein, denn in diesem Fall ist die Determinante stets 0, da die mittlere Zeile eine Nullzeile ist.

(b) Die quadratische Matrix $A_n$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A_n \neq 0$ gilt. Nach Teilaufgabe (a) muss also im Falle $n = 1$ genau $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und im Falle $n > 1$ genau $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, +1\}$ sein.

(c) Die reelle Matrix $A_n$ ist symmetrisch, so dass sie nach dem Spektralsatz ähnlich zu einer Diagonalmatrix $D_n$ ist.
Die Diagonalelemente von $D_n$ sind genau die Eigenwerte von $A_n$, die ihrer algebraischen Vielfachheit im charakteristischen Polynom $\det(A_n - \lambda I_n)$ entsprechend häufig auftreten.
Die Matrix $A_n - \lambda E_n$ hat dieselbe Gestalt wie $A_n$, so dass nach Teilaufgabe (a) gilt

$$\det(A_n - \lambda I_n) = (c - \lambda)\big((c - \lambda) - 1\big)^{\frac{n-1}{2}} \big((c - \lambda) + 1\big)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Also stehen auf der Diagonalen von $D_n$ die Eigenwerte $c$ mit Vielfachheit 1 und $c \pm 1$ mit jeweils der Vielfachheit $\frac{n-1}{2}$.

**Aufgabe 5 (20 Punkte)**
Bekanntlich gilt, dass jeder (ggf. komplexe) Eigenwert einer orthogonalen reellen Matrix den Betrag eins besitzt. Sie können diese Aussage (ohne Beweis) bei der Beantwortung der folgenden Fragen benutzen.

(a) Begründen Sie, dass jeder Eigenwert einer orthogonalen und symmetrischen reellen Matrix $A$ nur $+1$ oder $-1$ sein kann.

(b) Bestimmen Sie (möglichst einfach) alle Eigenwerte mit ihren algebraischen Vielfachheiten für die Matrix

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Geben Sie alle Eigenräume der Matrix $A$ an.

**Lösung:**

(a) Gemäß der zitierten Aussage über orthogonale Matrizen haben die Eigenwerte von $A$ den Betrag eins. Weil $A$ auch symmetrisch ist, müssen die Eigenwerte auch reell sein. Damit kommen nur $\pm 1$ als Eigenwerte von $A$ in Frage.

(b) Die Matrix $A$ ist orthogonal, da die Spaltenvektoren von $A$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Weiterhin ist die Matrix $A$ symmetrisch, so dass das Ergebnis aus Aufgabenteil (a) angewendet werden kann.
Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die reellen Eigenwerte von $A$, entsprechend der algebraischen Vielfachheit oft hingeschrieben.
Wegen $1 = \text{Spur}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ und $\lambda_{1,2,3} \in \{-1, +1\}$ müssen die Eigenwerte $\lambda = 1$ mit Vielfachheit 2 und $\lambda = -1$ mit Vielfachheit 1 sein.

(c) Da die reelle Matrix $A$ symmetrisch und damit diagonalisierbar ist, stimmen die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte überein. Also muss für die Eigenräume gelten: $\dim E_1 = 2$ und $\dim E_{-1} = 1$.
Wegen $\text{Rang}\,(A - 1 \cdot I_3) = 1$ kann $E_1$ durch folgende (gegenüber der Standardrechnung vereinfachte) Rechnung bestimmt werden:

$$A - 1 \cdot I_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & 6 & 2 \\ * & * & * \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & -1 & 2 \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

also

$$E_1 = \mathbb{L}_{hom}(A - 1 \cdot I_3) = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da $A$ symmetrisch ist, gilt $E_1 \perp E_{-1}$. Aus obiger Rechnung ergibt sich $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T \in E_1^{\perp}$, so dass

$$E_{-1} = \left\{ s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}.$$