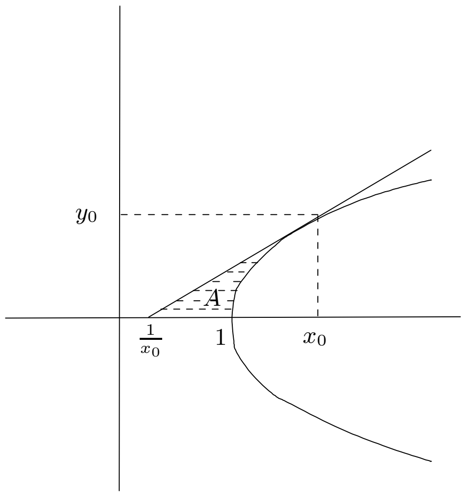
Bericht zur Mathematischen Eingangsprüfung im Mai 2008

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 17. Mai 2008 fand die Mathematische Eingangsprüfung nach der Prüfungsordnung 3.1 der DAV statt. Es waren 16 Teilnehmer und Teilnehmerinnen zu verzeichnen.
Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (15 Punkte)
Es sei (x_0, y_0), $x_0 > 1$, $y_0 > 0$, ein Punkt der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$.



(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Einheitshyperbel im Punkte (x_0, y_0).

(b) Zeigen Sie, dass die Tangente die x-Achse im Punkt $\left(\frac{1}{x_0}, 0\right)$ schneidet.

(c) Sei A die Fläche, die von der Tangente an die Einheitshyperbel durch (x_0, y_0), von der x-Achse und von der Einheitshyperbel eingeschlossenen wird.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt in Abhängigkeit von x_0.

Lösung:

(a) Es sei $f(x) := \sqrt{x^2 - 1}$ mit $x > 1$. Dann gilt:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Die allgemeine Tangentengleichung im Punkt x_0 lautet:

$$T_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

In diesem Fall also:

$$\begin{aligned} T_{x_0}(x) &= \sqrt{x_0^2 - 1} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}}(x - x_0) \\ &= \frac{x_0 x - 1}{y_0}. \end{aligned}$$

(b)

$$0 = \frac{x_0 x - 1}{y_0} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{x_0}.$$

(c) Den Flächeninhalt F der (schraffierten) Fläche A (abhängig von x_0) erhält man, indem man von der Fläche unter der Tangente zwischen $\frac{1}{x_0}$ und x_0 die Fläche unter dem positiven Zweig der Einheitshyperbel zwischen 1 und x_0 abzieht:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right) \cdot y_0 - \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\; dx \\ &= \frac{1}{2x_0}\left(x_0^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\right]_1^{x_0} \\ &= \frac{1}{2x_0}\left(x_0^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left[x_0\sqrt{x_0^2 - 1} - \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1})\right]. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Berechnen Sie das folgende Integral, wobei die angegebene Kreislinie einfach im mathematisch positiven Sinn (also gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen wird:

$$\int\limits_{|z-4|=2} \frac{\cos z}{(z-1)^3(z-5)}\,dz$$

Lösung:
Es sei $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z-4| < 2\}$. Wegen $1 \notin \overline{\Omega}$ ist die Funktion $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-1)^3}$ holomorph in Ω und stetig in $\overline{\Omega}$. Da $5 \in \Omega$ gilt, folgt aus der Cauchyschen Integralformel

$$\int\limits_{|z-4|=2} \frac{\cos z}{(z-1)^3(z-5)}\,dz = \int\limits_{|z-4|=2} \frac{f(z)}{z-5}\,dz = 2\pi i f(5) = \frac{2\pi i \cos 5}{4^3} = \frac{\pi i \cos 5}{32}.$$

Aufgabe 3 (25 Punkte)
Geben Sie für jede einzelne der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort mit einer Herleitung oder einem Gegenbeispiel.
(Hinweis: normierte Zeilenstufenform = reduzierte Zeilentreppenform)

(a) Gegeben sei eine komplexe $(3,\, n)$-Matrix A, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.

Das homogene lineare Gleichungssystem $Az = 0$ hat eine nicht triviale Lösung $z \in \mathbb{C}^n$, falls ...

(1) die normierte Zeilenstufenform der Matrix A eine Nullzeile besitzt.

(2) die Matrix mehr Spalten als Zeilen hat, d.h. $n > 3$ ist.

(3) der Rang von A mit der Zeilenzahl übereinstimmt, also $\operatorname{rg}(A) = 3$ ist.

(4) $\dim \operatorname{Kern}(f) > 0$ für die zu A gehörende lineare Abbildung f gilt.

(b) Gegeben sei eine komplexe $(m,\, 3)$-Matrix B und $b \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, wobei m eine beliebige natürliche Zahl ist.

Das inhomogene lineare Gleichungssystem $Bz = b$ besitzt eine Lösung $z \in \mathbb{C}^3$, ...

(1) falls $m = 3$ und $\det B \neq 0$ gilt.

(2) falls die normierte Zeilenstufenform der Matrix B keine Nullzeile besitzt.

(3) falls die Matrix B mehr Zeilen als Spalten hat.

(4) genau dann, wenn die Matrix B und die erweiterte Koeffizientenmatrix $B|b$ beide den Rang $\operatorname{rg}(B) = 3$ besitzen.

(c) Gegeben sei eine komplexe 3-reihige quadratische Matrix C und ihr charakteristisches Polynom χ_C.

Es gilt dann:

(1) Das Gleichungssystem $Cz = 0$ besitzt eine nicht triviale Lösung $z \in \mathbb{C}^3$, falls 0 Nullstelle von χ_C ist.

(2) Das Gleichungssystem $Cz = c$ mit $z \in \mathbb{C}^3$ ist für jedes $c \in \mathbb{C}^3$ lösbar, falls χ_C lauter verschiedene Nullstellen besitzt.

(3) Das Gleichungssystem $Cz = c$ besitzt für $c \in \mathbb{C}^3$ immer eine Lösung $z \in \mathbb{C}^3$, falls 0 keine Nullstelle von χ_C ist.

(4) Das Gleichungssystem $Cz = iz$ mit $z \in \mathbb{C}^3$ ist lösbar, falls die imaginäre Einheit i Nullstelle von χ_C ist.

Lösung:
Es gilt:

(a) (1) Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt eine Nullzeile, aber $Az = 0$ keine nicht triviale Lösung, da nach Dimensionsformel wegen $\operatorname{rg} A = 2$ gerade $\dim \operatorname{Kern} A = 0$ gilt. wahr ☐ falsch ☒

(2) Satz: Es gibt freie Parameter. wahr ☒ falsch ☐
oder: Nach Dimensionsformel gilt wegen $\operatorname{rg} A \leq 3$ gerade $\dim \operatorname{Kern} A > 0$. Damit ist der Kern A, der mit dem Lösungsraum von $Az = 0$ übereinstimmt, nicht trivial.

(3) Gegenbeispiel: Bei der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ stimmt der Rang mit der Zeilenzahl überein, aber A ist invertierbar, so dass nur die triviale Lösung $z = A^{-1}0 = 0$ die Gleichung $Az = 0$ löst. wahr ☐ falsch ☒

(4) Nach Dimensionsformel gilt $\dim \operatorname{Kern} (f) > 0$ und der Kern von f stimmt mit dem Lösungsraum von $Az = 0$ überein, also existieren nicht triviale Lösungen. wahr ☒ falsch ☐

(b) (1) Gilt $m = 3$ und $\det B \neq 0$, ist B invertierbar, so dass $z = B^{-1}b$ (die eindeutige) Lösung ist. wahr ☒ falsch ☐

(2) B besitzt den (maximalen) Rang $m = \operatorname{rg} B = \dim \operatorname{Bild} B$, so dass $\operatorname{Bild} B = \mathbb{C}^m$. wahr ☒ falsch ☐

(3) Gegenbeispiel: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. wahr ☐ falsch ☒

(4) Die Äquivalenzbeziehung ist falsch; das Gleichungssystem $Bz = b$ ist auch lösbar, wenn $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} (B|b) < 3$. wahr ☐ falsch ☒
Beispiel: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(Richtig wäre, wenn anstelle von *"genau dann, wenn"* nur *"wenn"* stände)

(c) (1) Dann ist 0 ein Eigenwert, und für einen zugehörigen Eigenvektor $z \neq 0$ gilt $Cz = 0 \cdot z = 0$. wahr ☒ falsch ☐

(2) Gegenbeispiel: Für $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\chi_C(\lambda) = (-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat $Cz = c$ keine Lösung, also ist das Gleichungssystem mit dieser Matrix C nicht für alle $c \in \mathbb{C}$ lösbar. wahr ☐ falsch ☒

(3) Dann ist C invertierbar, denn die Determinante ist als Produkt der Eigenwerte ungleich 0, also ist $Cz = c$ stets mit $z = C^{-1}c$ (sogar eindeutig) lösbar. wahr ☒ falsch ☐

(4) Dann ist i ein Eigenwert, und für einen zugehörigen Eigenvektor $z \neq 0$ gilt $Cz = i \cdot z$. wahr ☒ falsch ☐

Aufgabe 4 (30 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig ist.

(b) Bestimmen Sie, wenn möglich, die partiellen Ableitungen

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \qquad \text{und} \qquad f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

der Funktion f an der Stelle $(0, 0)$.

(c) Untersuchen Sie f auf totale Differenzierbarkeit im Punkt $(0, 0)$.

(d) Es sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie das Gebietsintegral

$$\iint_\Omega f(x, y)\, d(x, y)$$

durch Übergang zu Polarkoordinaten.

Lösung:

(a) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist die Funktion als Quotient stetiger Funktionen stetig. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

gilt.

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt:

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} \leq 1$$

und daraus folgt zunächst $\big|f(x, y)\big| \leq |\sin y|$.

Da für $(x, y) \to (0, 0)$ insbesondere auch $y \to 0$ geht, folgt die Stetigkeit von f aus der bekannten Tatsache, dass $\lim\limits_{y \to 0} \sin y = 0$ gilt.

(b) Gemäß Definition erhält man:

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

und

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

(c) Nach Definition ist die Funktion f total differenzierbar an der Stelle $(0, 0)$, falls f die Darstellung

$$f(x, y) = f(0, 0) + \mathcal{J}f(0, 0)\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix} + R(x, y)$$

besitzt, wobei die Funktion $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Eigenschaft

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{R(x, y)}{\left\| \binom{x}{y} - \binom{0}{0} \right\|} = 0$$

haben muss. Im Fall der Existenz der Ableitung $\mathcal{J}f(0, 0)$ sind die Einträge dieser Matrix die partiellen Ableitungen der Funktion f an der Stelle $(0, 0)$, also $\mathcal{J}f(0, 0) = (0, 0)$. Damit ist $R(x, y) = f(x, y)$ und die Bedingung für die totale Differenzierbarkeit von f in $(0, 0)$ wird zu

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{R(x, y)}{\left\| \binom{x}{y} - \binom{0}{0} \right\|} = \lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{x \sin y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Wegen

$$\left.\frac{x \sin y}{x^2 + y^2}\right|_{x=0} = 0$$

und

$$\left.\frac{x \sin y}{x^2 + y^2}\right|_{y=x} = \frac{\sin x}{2x} \to \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad x \to 0$$

existiert dieser Grenzwert nicht. Daher ist die Funktion f an der Stelle $(0, 0)$ nicht total differenzierbar.

(d) Es sei $\Omega^* = \left\{(r, \varphi) \mid 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1\right\}$ und $\psi : \Omega^* \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\psi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Es gilt $\psi(\Omega^*) = \Omega$ sowie $\left|\det \mathcal{J}\psi(r, \varphi)\right| = r$ und damit erhält man aus der Transformationsformel

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, d(x, y) = \iint\limits_{\Omega^*} f\big(\psi(r, \varphi)\big) r\, d(r, \varphi) = \iint\limits_{\Omega^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d(r, \varphi).$$

Durch Anwendung des Satzes von Fubini ergibt sich das iterierte Integral

$$\iint\limits_{\Omega^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d(r, \varphi) = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \sin\big(r\sin(\varphi)\big) r\, d\varphi\, dr$$

Mit der Substitution $t = r\sin(\varphi)$ im φ-Integral erhält man

$$\frac{dt}{d\varphi} = r\cos(\varphi), \quad \varphi = 0 \Longleftrightarrow t = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow t = r$$

und es ergibt sich

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \sin\bigl(r \sin(\varphi)\bigr) r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^r \sin(t) \, dt \, dr =$$

$$\int_0^1 \left(- \cos(t)\Big|_{t=0}^{t=r} \right) dr = \int_0^1 1 - \cos r \, dr = r - \sin r \Big|_0^1 = 1 - \sin 1.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Es seien p_0, $p_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und y_1 sei eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

im Intervall $[a, b]$. Der Funktionsgraph von y_1 sei an einer Stelle $x_0 \in (a, b)$ tangential zur x-Achse, d.h. es gelte $y_1(x_0) = 0$ und $y_1'(x_0) = 0$. Beweisen Sie, dass die Funktion y_1 im Intervall $[a, b]$ identisch Null ist.

Lösung:
Die Nullfunktion ist eine Lösung von jeder homogenen Differentialgleichung, damit auch von der zu untersuchenden.
Da es sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung mit stetigen Koeffizienten handelt, hat für jedes $x_0 \in [a, b]$ und alle y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$ das AWP $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ in ganz $[a, b]$ eine eindeutig bestimmte Lösung.
Da das AWP $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$, $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ die Lösungen y_1 und die Nullfunktion besitzt, müssen diese beiden Funktionen übereinstimmen. Daher ist y_1 identisch Null.