Bericht zur Mathematischen Eingangsprüfung der DAV im Juli 2006

Günter Last, *Martin Folkers* und *Bruno Ebner* (Karlsruhe)

1. Aufgabe (8 Punkte)

Vorgegeben seien die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\vec{x} \mapsto \vec{y} = \varphi(\vec{x}) := A \cdot \vec{x}$ mit der (4×4)-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sowie der Untervektorraum

$$U := \operatorname{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \text{ mit } \vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinate der Matrix $(A + E_4)$, dabei bezeichne E_4 die 4-reihige Einheitsmatrix.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

c) Bestimmen Sie eine Basis von Kern(A).

d)
1. Beweisen Sie die Inklusion $\varphi(U) \subseteq U$.
2. Es bezeichne $\varphi|_U : U \to U$, $\vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x})$ die Einschränkung der Abbildung φ auf den Untervektorraum U. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix T von $\varphi|_U$ bezüglich der Basis $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ von U.

Lösung:

Zu a)

Entwicklung nach der letzten Zeile ergibt

$$\det(A + E_4) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = (-2) \cdot \det(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = 0.$$

Zu b)
Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$g_A(x) = \det(A - x \cdot E_4) = \det(\begin{pmatrix} -x & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix})$$

$$= \det(\begin{pmatrix} -x & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} -x & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix})$$

$$= (-x) \cdot \det(\begin{pmatrix} -x & 2 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 2 & 0 & -1-x \end{pmatrix}) = (-x) \cdot \big((-x) \cdot (x^2 - 1) + 4 - 2 \cdot (1-x)\big)$$

$$= x \cdot \big(x^3 - 3 \cdot x - 2\big) = x \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2).$$

Folglich besitzt die Matrix die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2.$$

Zu c)
Zur Bestimmung von Kern(A) ist das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ zu lösen. Es gilt

$$\text{Kern}(A) = \text{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Zu d)
Es gilt

$$A \cdot \vec{u}_1 = \varphi(\vec{u}_1) = 2 \cdot \vec{u}_1 \quad \text{und} \quad A \cdot \vec{u}_2 = \varphi(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2.$$

Also gilt

$$\varphi(U) \subseteq U \text{ und } T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$z_1 := \frac{8 + 6 \cdot i}{3 + i} \quad \text{und} \quad z_2 := \frac{9 - 7 \cdot i}{1 - 3 \cdot i}.$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$e^{i \cdot x} + 2 \cdot e^{-i \cdot x} = -3.$$

c) Geben Sie die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{C}^3$ des folgenden komplexen, linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & (1+2\cdot i)\cdot x_2 & - & x_3 & = & -3\cdot i \\ & & (1-i)\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 4+6\cdot i \\ -x_1 & + & (2-i)\cdot x_2 & + & x_3 & = & 3\cdot i\,. \end{array}$$

d) Vorgegeben sei die Abbildung

$$f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\ z\mapsto f(z):=\frac{2\cdot z+1}{z}.$$

Bestimmen Sie das Bild $f(K_1)$ der Einheitskreislinie $K_1 := \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$, und zeigen Sie, dass $f(K_1)$ wieder eine Kreislinie in der komplexen Zahlenebene ist. Bestimmen Sie sowohl den Mittelpunkt P als auch den Radius r des Kreises $f(K_1)$.

Lösung:

Zu a)

Es gilt

$$z_1 = \frac{8+6\cdot i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i} = \frac{30+10\cdot i}{10} = 3+i$$

und

$$z_2 = \frac{9-7\cdot i}{1-3\cdot i}\cdot\frac{1+3\cdot i}{1+3\cdot i} = \frac{30+20\cdot i}{10} = 3+2\cdot i.$$

Zu b)

Es gilt

$$e^{i\cdot x}+2\cdot e^{-i\cdot x} = -3 \Longleftrightarrow \left(e^{i\cdot x}\right)^2 + 3\cdot e^{i\cdot x}+2 = (e^{i\cdot x}+1)\cdot(e^{i\cdot x}+2) = 0,$$

und folglich wegen $\left|e^{i\cdot x}\right| = 1$ für $x\in\mathbb{R}$

$$e^{i\cdot x} = -1 \Longleftrightarrow x = \pi+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Zu c)

Der Gaußalgorithmus liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+2\cdot i & -1 & -3\cdot i \\ 0 & 1-i & 2 & 4+6\cdot i \\ -1 & 2-i & 1 & 3\cdot i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+2\cdot i & -1 & -3\cdot i \\ 0 & 1-i & 2 & 4+6\cdot i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3\cdot i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2+3\cdot i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2+3\cdot i \end{array}\right),$$

das lineare Gleichungssystem ist folglich eindeutig lösbar, und die Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2+3\cdot i \end{pmatrix}.$$

Zu d)

Es gilt

$$f(K_1) = \{\overline{z}+2 : z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}.$$

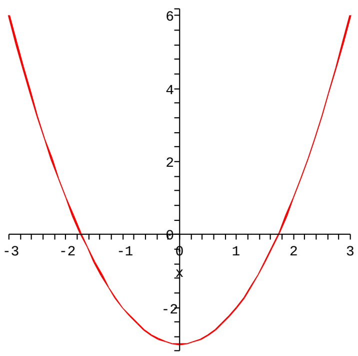
$f(K_1)$ ist also ein Kreis mit Mittelpunkt $(2,0)$ vom Radius $r=1$ in der komplexen z-Ebene.

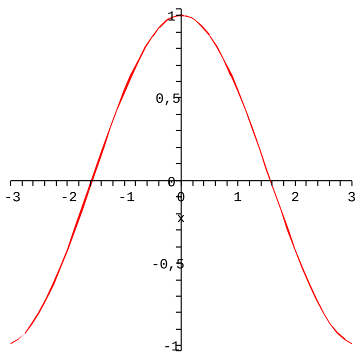
3. Aufgabe (8 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) := \max(x^2 - 3, \cos(x), 0).$$

Hinweis: Die Schaubilder der Funktionen $g(x) = x^2 - 3$ und $h(x) = \cos(x)$ für $x \in [-3, 3]$:





a) Zeigen Sie, dass f eine gerade Funktion ist, d.h.

$$f(x) = f(-x), \quad x \in [-3, 3].$$

b) Ist die Abbildung f stetig?

c) Geben Sie die Menge $D \subseteq [-3, 3]$ aller Punkte $x \in [-3, 3]$ an, in denen die Abbildung f differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ in diesen Punkten.

d) Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der Abbildung f. Handelt es sich hier auch um das Minimum, bzw. das Maximum der Abbildung f?

e) Skizzieren Sie den Graphen der Abbildung f.

f) Bestimmen Sie den Wert I des Riemannintegrals

$$I := \int_{-3}^{3} f(x)dx.$$

Lösung:

Zu a)

Da die Funktionen $x^2 - 3$ und $\cos(x)$ gerade sind und die Maximumsfunktion die Symmetrieeigenschaft nicht verändert, ist auch f eine gerade Funktion.

Zu b)

Die Abbildung f ist stetig, da das Maximum stetiger Funktionen stetig ist.

Zu c)

Die Abbildung f läßt sich schreiben als:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{für } \sqrt{3} \leq |x| \leq 3 \\ 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} < |x| < \sqrt{3} \\ \cos(x), & \text{für } |x| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Fall: Sei $\sqrt{3} < |x| \leq 3$. Dann gilt: $f'(x) = 2 \cdot x$.
2. Fall: Sei $\frac{\pi}{2} < |x| < \sqrt{3}$. Dann gilt: $f'(x) = 0$.
3. Fall: Sei $|x| < \frac{\pi}{2}$. Dann gilt: $f'(x) = -\sin(x)$.

Aus Symmetriegründen müssen nur noch die Stellen $x_0 = \sqrt{3}$ und $x_1 = \frac{\pi}{2}$ betrachtet werden. Es gilt nach der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \downarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3 - 0}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \downarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \downarrow \sqrt{3}} x + \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}, \end{aligned}$$

und

$$\lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \uparrow \sqrt{3}} \frac{0 - 0}{x - \sqrt{3}} = 0.$$

Demzufolge ist f nicht in $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ differenzierbar. Weiter gilt nach der Regel von de L'Hospital:

$$\lim_{x \uparrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(x)}{1} = -1,$$

und

$$\lim_{x \downarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} \frac{0 - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = 0.$$

Also ist die Abbildung f auch nicht in $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ differenzierbar.

$$\Longrightarrow D = [-3, 3] \setminus \{-\sqrt{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \sqrt{3}\}.$$

Zu d)

Da $x^2 - 3$ eine nach oben geöffnete Parabel ist, nimmt Sie ihr Maximum am Rand an und $f(-3) = f(3) = 6$. Weiter gilt $\cos(x) \leq 1$ für alle $x \in [-3, 3]$ und $0 < 6$. Daraus folgt:

$$\sup_{x \in [-3,3]} f(x) = f(3) = 6.$$

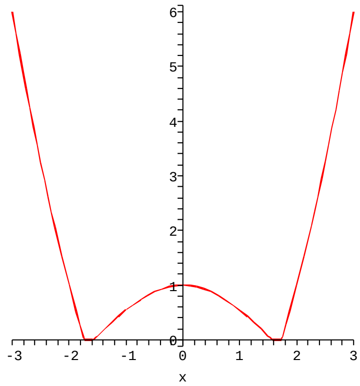
Es handelt sich hier auch um ein Maximum, da der Wert angenommen wird. Aufgrund der Maximumsfunktion wird kein Wert unter 0 angenommen und da $f(x) = 0$ für $\frac{\pi}{2} < |x| < \sqrt{3}$ gilt:

$$\inf_{x \in [-3,3]} f(x) = 0.$$

Es handelt sich hier auch um ein Minimum.

Zu e)

Das Schaubild der Abbildung f:



Zu f)

Da die Abbildung f gerade ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
I = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx &= 2 \cdot \int_{0}^{3} f(x)\,dx = 2 \cdot \left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{3} (x^2 - 3)\,dx \right] \\
&= 2 \cdot \left[[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 - 3 \cdot x \right]_{\sqrt{3}}^{3} \right] \\
&= 2 \cdot \left[1 - 0 + 9 - 9 - \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{3} \right] \\
&= 2 + 4 \cdot \sqrt{3} \approx 8.9282
\end{aligned}
$$

4. Aufgabe (8 Punkte)

a) Vorgegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto z = f(x, y) := e^{x^2-1} \cdot (-2 + x^2 + y^2).$$

1. Bestimmen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x, y) = D_{\vec{e}} f(x, y)$ von f in Richtung des Vektors $\vec{e} := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Bestimmen Sie im Punkt $(x_0, y_0) := (1, 2)$ die "Richtung des steilsten Anstieges" von f, d.h. bestimmen Sie diejenige Richtung $\vec{e}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\|\vec{e}_0\|_2 = 1$, für die gilt

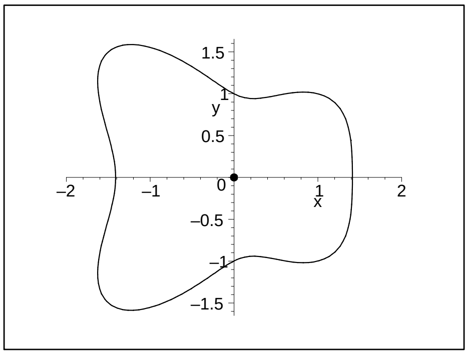
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_0}(1, 2) = D_{\vec{e}_0} f(1, 2) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1, 2) : \vec{e} \in \mathbb{R}^2,\ \|\vec{e}\|_2 = 1 \right\}.$$

(Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_2$ die übliche Euklidnorm im $\mathbb{R}^2$.)

b) Vorgegeben sei die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto z = F(x, y) := x^4 + y^4 + x \cdot y^2 - 2 \cdot x^2 - y^2.$$

Unten sehen Sie das Schaubild der Kurve, welche als Schnittkurve entsteht, wenn man den Graphen der Abbildung F mit der Ebene $z = 0$ schneidet.



$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass in einer geeigneten Umgebung $U(0)$ von $x_0 := 0$ durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ und die Bedingung $y(0) = 1$ implizit eine differenzierbare Funktion $y : U(0) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = y(x)$, definiert ist.
2. Der Punkt $(x_0, y_0) := (0, 0)$ ist ein Punkt aus der Menge K. Wird in einer geeigneten Umgebung $U(0)$ von $x_0 = 0$ durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ und die Bedingung $y(0) = 0$ implizit eine differenzierbare Funktion $y : U(0) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = y(x)$, definiert? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

Lösung:

Zu a)

Die partiellen Ableitungen der Funktion f lauten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2-1} \cdot 2 \cdot x \cdot (x^2 + y^2 - 1) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x^2-1} \cdot 2 \cdot y.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x, y) = D_{\vec{e}} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(e^{x^2-1} \cdot 2 \cdot x \cdot (x^2 + y^2 - 1),\ e^{x^2-1} \cdot 2 \cdot y\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{x^2-1} \cdot \left(2 \cdot x^3 + 2 \cdot x \cdot y^2 - 2 \cdot x + 2 \cdot y\right). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 8 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4.$$

Damit ergibt sich für die Richtung des steilsten Anstieges im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$

$$\vec{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{80}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zu b)

Die partielle Ableitung von $F(x, y)$ nach y lautet

$$F_y(x, y) = 4 \cdot y^3 + 2 \cdot x \cdot y - 2 \cdot y.$$

1. Es gilt

$$F(0, 1) = 0 \text{ und } F_y(0, 1) = 2 \neq 0.$$

Die Behauptung folgt aus dem Hauptsatz über implizit definierte Funktionen.

2. Wegen

$$F_y(0, 0) = 0$$

ist der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen nicht anwendbar. Es gilt

$$F_x(x, y) = 4 \cdot x^3 + y^2 - 4 \cdot x,\ F_x(0, 0) = 0.$$

Folglich ist der Punkt $(0, 0)$ ein stationärer Punkt der Funktion F. Die Hessematrix von F im Punkt $(0, 0)$ lautet

$$H(F, (0, 0)) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

und da diese Matrix negativ definit ist, besitzt die Funktion F im Punkt ein strenges lokales Maximum und folglich die ebene Kurve $F(x, y) = 0$ einen isolierten Punkt.